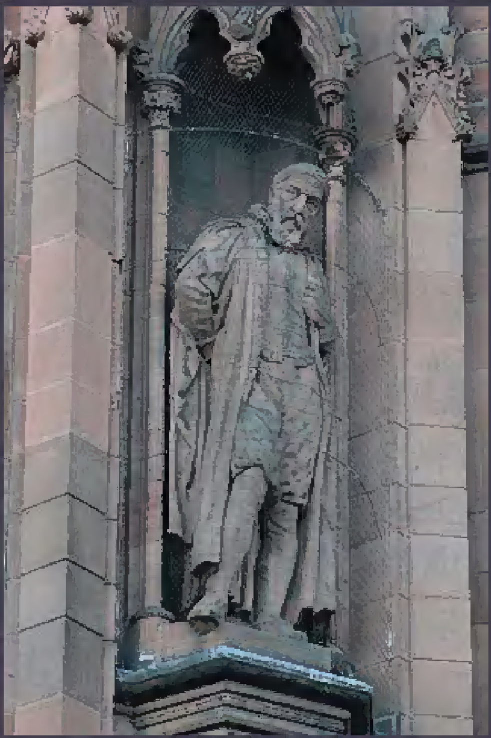
La fonction logarithme népérien

--- Dhaouadi Nejib ---

I. Vue Historique

C'est à John NAPIER (ou NEPER), mathématicien écossais (1er février 1550 - 4 avril 1617), que l'on doit le mot et le concept de logarithme dans sa : « Description de la stupéfiante règle des logarithmes » en 1614.
Son but était la recherche d'une table de correspondance qui permette de simplifier les calculs en ramenant le calcul d'un produit à celui d'une somme. L'introduction de cette technique de calcul allait conduire à des études théoriques qui permirent de dégager la notion de FONCTION LOGARITHME.



Statue de John Napier, Galerie nationale écossaise des portraits

II. Définition et propriétés

1 Définition

Activité 1

On se propose de chercher les fonctions f telles que :

- f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$
- Pour tous nombres réels strictement positifs a *et* b, $f(ab)=f(a)+f(b)$

1. On pose $a=1$ et $b=1$. Montrer que $f(1)=0$
2. Soit $a>0$ fixé. On définie la fonction g sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=f(ax)-f(x)$
   a. Vérifier que g est une fonction constante.
   b. Justifier que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout réel $x>0$ $g'(x)=af'(ax)-f'(x)$.
   c. En déduire que $g'(1)=af'(a)-f'(1)$
3. On pose $f'(1)=k$ où $k\in\mathbb{R}$

   Montrer alors que f est la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\longmapsto\frac{k}{x}$ qui s'annule en 1.

   Pour $k=1$, la fonction f est appelée fonction logarithme népérien.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien et on note $\ln$ l'unique primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\longmapsto\frac{1}{x}$, qui s'annule en 1.

Conséquences

- La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x\in]0;+\infty[$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$
- $\ln(1)=0$
- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0:+\infty[$
- Pour tous réels strictement positifs a *et* b

  $a<b\Longleftrightarrow\ln a<\ln b$
- Pour tous réels a *et* b tels que $a>0$ *et* $b>0$

  $a=b\Longleftrightarrow\ln a=\ln b$
- Pour tout réel strictement positif a

$$0 < a < 1 \iff \ln a < 0$$
$$a > 1 \iff \ln a > 0$$

2 Propriétés

Activité 2

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(ax)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$
2. En déduire que pour tout $x \in]0; +\infty[\,; \ln(ax) = \ln x + \ln a$

Propriété fondamentale

Pour tous réels a *et* b tels que $a > 0$ *et* $b > 0$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Activité 3

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. En écrivant $a \times \dfrac{1}{a} = 1$, montrer que $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. En écrivant $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$, justifier que $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n; $\ln(a^n) = n\ln a)$
4. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{Z}_-;\quad \ln(a^n) = n\ln a$
5. Soit un entier $p \geqslant 2$. En écrivant $a = (\sqrt[p]{a})^p$, montrer que $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \dfrac{1}{p}\ln a$

Propriétés

Pour tous réels strictement positifs a et b.

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$
$$\ln\left(a^n\right) = n\ln a \quad (n \in \mathbb{Z})$$
$$\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \frac{1}{p}\ln a \quad (p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2)$$

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:
   $\ln(x^2+2x+2)=0$
   $\ln(2x-1)=\ln x$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:
   $\ln(x+2)>0$
   $\ln(3x+1)<0$
   $\ln(x^2+x+1)\geqslant\ln(x+2)$

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
   $\ln(x+1)+\ln(3-x)=\ln(4-x^2)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
   $\ln(x+1)+\ln(3-x)<\ln(4-x^2)$

Exercice 3

1. Calculer, sans utiliser la calculatrice, Chacun des nombres suivants:
   - $A=\ln(\sqrt{5}-2)+\ln(\sqrt{5}+2)$
   - $B=\ln 16+\ln 0.0625$
   - $C=\ln\dfrac{6}{5}+\ln\dfrac{5}{3}$
2. Exprimer en fonction de $\ln 3$ chacun des nombres suivants:
   - $D=6\ln\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\ln 81$
   - $E=\ln\dfrac{100}{9}+2\ln 2.7$

Remarques

➤ Pour tous réels a et b tels que $ab\neq 0$ on a :
- $\ln|ab|=\ln|a|+\ln|b|$
- $\ln\left|\dfrac{a}{b}\right|=\ln|a|-\ln|b|$

➤ En particulier si $ab>0$ on a :
- $\ln(ab)=\ln|a|+\ln|b|$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln|a|-\ln|b|$

Pour tout entier pair n et pour tout réel $a \neq 0$ on a :

- $\ln(a^n) = n\ln|a|$

Exemples

Pour tout réel $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ $\ln(x^2-1)$ existe et on a :

$$\ln(x^2-1)=\begin{cases}\ln(x-1)+\ln(x+1) & \text{si } x\in]1;+\infty[\\ \ln(1-x)+\ln(-x-1) & \text{si } x\in]-\infty;-1[\end{cases}$$

Pour tout réel $x \neq 0$ $\ln(x^2)=\begin{cases}2\ln x & \text{si } x>0\\ 2\ln(-x) & \text{si } x<0\end{cases}$

III. Etude et représentation Graphique de la fonction ln

Activité 1

On se propose de déterminer la limite de la fonction $\ln$ en $+\infty$.

Soit A un réel strictement positif.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln 2^n = +\infty$
2. En déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $\ln 2^{n_0} > A$
3. Montrer alors qu'il existe un réel $B>0$ tel que pour tout réel x,
   $x > B \Longrightarrow \ln x > A$
4. Conclure.

Activité 2

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$
2. a. Monter que pour tout réel $t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

   En déduire que $\ln x \leqslant 2\sqrt{x}-2$ pour $x \geqslant 1$

   b. Montrer alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et déduire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$
4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $\ln$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction $\ln$

   b. Ecrire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   c. Construire la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

☛ Retenons

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$;
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Remarques

- La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\ln(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$.
- L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est notée e (cette notation a été donnée par le mathématicien **EULER** qui a démontré aussi que e n'est pas un nombre rationnel.) .
- e est appelé la base de la fonction logarithme népérien. Une valeur approchée de e est : $2,718281828456$

Activité 3

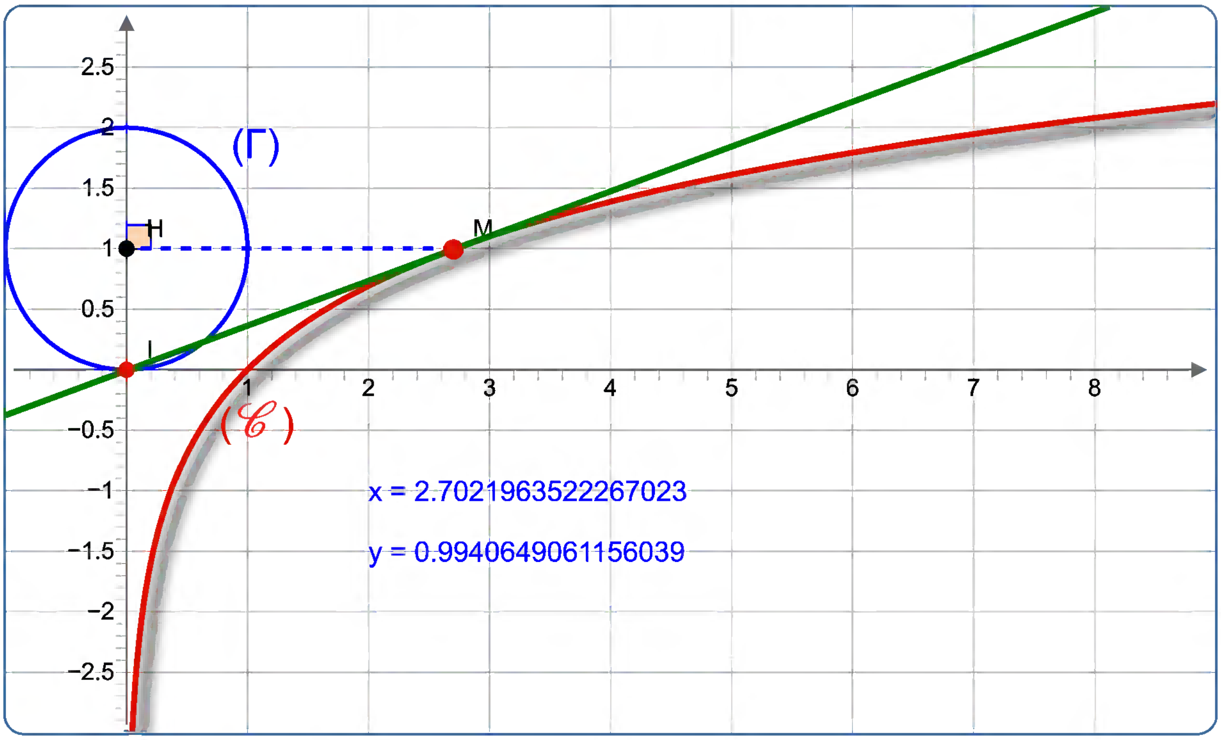
On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé. Soit A un point de (C) d'abscisse a, la tangente à (C) en A coupe l'axe des ordonnées en I. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées et par y_H et y_I les ordonnées respectives des points H et I.

1. Montrer que $y_H — y_I$ est constant.
2. En déduire une construction de la tangente en un point de la courbe (C).

Construction de la tangente

- La courbe $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction $\ln$.
- $M(x,y)$ est un point de la courbe $(\mathscr{C})$
- H le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées
- (Γ) le cercle de centre H et de rayon 1
- (Γ) coupe l'axe des ordonnées en un point I tel que $y_I < y_H$.
- La tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ en M est la droite (MI)

Vous pouvez faire glisser le point M sur la courbe.



IV. Autres limites

Activité 4

Soit m un entier naturel non nul et n un entier supérieur à 2.

1. a. Vérifier que $\dfrac{(\ln x)^n}{x^m} = \left(\dfrac{n}{m} \times \dfrac{\ln\left(\sqrt[n]{x^m}\right)}{\sqrt[n]{x^m}}\right)^n \quad , \quad x > 0$

   b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x^m} = 0$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \left|x^m (\ln x)^n\right|$

Théorème

Pour tous entiers naturels non nuls n et m on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} x^m (\ln x)^n = 0$$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x-\ln x \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{x^2+1} \ ; \ \lim_{x\to+\infty} 2(\ln x)^2-7\ln x+3 \ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x)-1}{\ln(2x)+1} \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{1+x}$$

Exercice 5

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \ ; \ \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+3x)}{x} \ ; \ \lim_{x\to3} \frac{\ln(x-2)}{x-3} \ ; \ \lim_{x\to0} \frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x}$$

$$; \ \lim_{x\to1^-} (x-1)\ln\left|x^2-1\right|$$

V. Fonctions x⟼ln(u(x)) et x⟼ ln(|u(x)|)

Activité 5

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et vérifiant $\forall x\in I; u(x)>0$

Montrer, en utilisant le théorème de la dérivabilité de la composée, que la fonction f définie sur I par : $f(x)=\ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x\in I, f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle $\forall x\in I, u(x)>0$

Alors la fonction f définie sur I par : $f(x)=\ln(u(x))$ est dérivable sur I et

$$\forall x\in I, f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Activité 6

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et vérifiant $\forall x\in I; u(x)\neq0$

Montrer que la fonction f définie sur I par : $f(x)=\ln|u(x)|$ est dérivable sur I et calculer $f'(x)$.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$

Alors la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet comme primitive sur I la fonction

$F : x \longmapsto \ln(|u(x)|) + k$ où k est une constante réelle.

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de f, étudier la dérivabilité et calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
2. $f(x) = \ln\left(\sqrt{4-x^2}\right)$
3. $f(x) = \ln|\tan(x)|$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$; $I = \left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-1}$; $I =]1; +\infty[$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$; $I = R$

Exercice 8

On pose $g(x) = \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$

1. Déterminer le domaine de définition D_g de g.
2. Montrer que g est dérivable sur D_g et calculer $g'(x)$
3. Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x}$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ qui s'annule en $\dfrac{\pi}{3}$.

Activité

Soit la fonction $u : x \longmapsto x \ln x$

Calculer $u'(x)$.

En déduire une primitive de la fonction $\ln$.

Théorème

Une primitive de la fonction $\ln$ sur $]0; +\infty[$ est la fonction $x \longmapsto x \ln x - x$

VI. Exercices

Exercice 9

Simplifier les sommes suivantes :

a. $\ln\left(1+\sqrt{3}\right) + \ln\left(\sqrt{3}-1\right)$.

b. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \ln\left(2-\sqrt{3}\right)$.

c. $\ln 2 + \ln\left(2+\sqrt{2}\right) + \ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 10

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$ dans chacun des cas suivants :

$f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $f(x) = x^2 - x + 1 - 2\ln x$; $f(x) = x\ln x - 3x^3$;

$f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$; $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x}$

2. Calculer la limite de la fonction f à droite en 0 dans chacun des cas suivants :

$f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$; $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$; $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln x}$;

$f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de f sur D.

a. $f(x) = 2x\ln x - 3x$ et $D =]0; +\infty[$

b. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et $D =]0; +\infty[$

c. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ et $D = \mathbb{R}$

d. $f(x) = \ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$ et $D =]-3; 3[$

e. $f(x) = \ln|3x - 2|$ et $D = \mathbb{R}\diagdown\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

f. $f(x) = x\ln\left|\dfrac{5+x}{5-x}\right|$ et $D = \mathbb{R}\diagdown\{-5; 5\}$

Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

a. $f(x) = \dfrac{5}{3-2x}$; $I = \left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$; $x_0 = 2$ et $y_0 = -3$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; $I =]1; +\infty[$; $x_0 = e^2$ et $y_0 = 2\ln 2$

c. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; $I =]0; +\infty[$; $x_0 = e$ et $y_0 = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 17x - 4}{3x^2 - 4x + 1}$

1. Déterminer trois nombres réels $a, b\ et\ c$ tels que : pour tout x élément de I,

   $f(x) = a + \dfrac{b}{1-3x} - \dfrac{c}{1-x}$

2. Déduire alors la primitive de f sur I qui prend la valeur $\dfrac{\ln 25}{3}$ en 2.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right)$ $si\ x > 0$ et $f(0) = 0$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. a. Vérifier que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = x(\ln x - 1)$
   b. Dresser le tableau de variations de f.
4. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Tracer T et $\mathscr{C}$ dans le repère (O, I, J).

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2$ $si\ x > 0$ et $f(0) = 0$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
   b. Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.
   c. Interpréter graphiquement les résultats précédents.
2. a. Justifier que pour tout $x > 0,\ f'(x) = x(\ln x - 1)$.
   b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Déterminer les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Construire T et $\mathscr{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 16

f est la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1. Démontrer que f est strictement croissante sur I.
2. a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est une asymptote à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au voisinage de $+\infty$

   b. Préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (D)

   c. Construire (D) puis $\mathscr{C}$

Exercice 17

A. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[[0; +\infty[[$ par : $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$

1. Démontrer que sur l'intervalle $[1; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.
2. Préciser le signe de g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

B.Etude d'une fonction

f est la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et donner une équation de la demi tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentation graphique de f.

   a. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. a. Démontrer que pour tout réel $x > 0,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

   b. Etudier les variations de f et drésser son tableau de variations.

   c. Construire T, puis $\mathscr{C}$

Exercice 18

f et g sont deux fonctions définies sur $[1;+\infty[$ par :

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}$ et $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

1. a. Etudier les variations de f et g.

   b. En déduire que pour tout réel $x \geqslant 1$,

   $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$ (1)

2. On note (V_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

   a. En utilisant la relation (1), démontrer que : $V_n \geqslant \ln(n+1)$

   b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

Exercice 19

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + \ln x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathscr{C}$

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution a_n dans $]0;+\infty[$

   b. Démontrer que la suite (a_n) est strictement croissante.

3. A est le point de $\mathscr{C}$ d'anscisse 1.

   a. Déterminer une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ en A.

   b. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite Δ

4. a. Exploiter les résultats de la question précédente pour démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n+1}{2} \leqslant a_n$

   b. Déterminer la limite de la suite (a_n)

Exercice 20

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

1. En étudiant les variations de deux fonctions convenablement choisies, démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Utiliser alors les résultats des questions précédentes pour trouver la limite de la suite (u_n)

Exercice 21

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f avec $n \geqslant 1$.

1. Calculer pour tout réel $x > 0$, $f^{(1)}(x)$ et $f^{(2)}(x)$.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
   $f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}$ pour tout réel $x > 0$ avec :
   $$\begin{cases} u_1 = 1 \text{ , } v_1 = -1 \\ u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n \\ v_{n+1} = -(n+1)v_n \end{cases}$$
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. Démontrer par récurrence que : $u_n = (-1)^{n+1} n! \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)$.
3. En déduire $f^{(7)}(x)$.

Pour voir la version dynamique (Animation et solutions des activités et des exercices) de ce cours visiter le lien suivant :

https://www.sigmaths.net/articles/ln.php