

E1 Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 3x + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 7x + 4}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1/ déterminer les limites de f en $(-\infty)$ et en $(+\infty)$.

2/ f est-elle continue en 1 ?

E2 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. a) Montrer que pour tout $x < 0$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$

b) Montrer que f est continue en 0.

3. a) Montrer que pour tout réel $x < 0$, $f(x) = \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}}$

b) Calculer alors la limite de f en $-\infty$.

E3 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1) Calculer $f(0)$

2) a) Montrer que pour $x > 0$ on a $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1} + 1}$

b) Montrer que f est continue en 0

3) Étudier la continuité de f sur chacune des intervalles $]-\infty, 0[$ [et] $0, +\infty[$.

4) Dédurre le domaine de continuité de f .