E 1

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et tel que $BC = 6$

1) Calculer $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$.

2) Soit D le point tel que BCDA soit un parallélogramme.

a) Montrer que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}=0$

b) En déduire que l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CM}=0$ est la droite passant par D et perpendiculaire à (AB).

E 2

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on a : $A(1\,;2)$, $B(-1\,;-3)$.

Soit M (x ; y) un point du plan.

1) Écrire les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ en fonction de x et de y.

2) a) Déterminer l'équation de l'ensemble **C** des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=2$.

b) En déduire la nature de **C** et indiquer ses éléments caractéristiques.

E 3

Soit ABC un triangle équilatérale de coté 3cm

1) a) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$.

b) Calculer $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{BC}$

c) En déduire que les droites (BD) et (BC) sont perpendiculaires

d) Vérifier que $CD = 6$ et $\widehat{ACD}=\frac{2\pi}{3}$

e) Calculer AD^2 puis en déduire AD

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 2) ; (B, 1) et (C, 1) et I le milieu de [BC]

a) Montrer que G est le milieu de [AI]

b) Vérifier que $GA^2=\frac{27}{16}$ et $GB^2=GC^2=\frac{63}{16}$

c) Montrer que pour tout $M\in P$: $2MA^2+MB^2+MC^2=4MG^2+\frac{45}{4}$

d) En déduire et construire l'ensemble des points M suivant :

$(C)=\left\{M\in P \text{ tels que } 2MA^2+MB^2+MC^2=\frac{81}{4}\right\}$

E 4

Soit ABC un triangle équilatéral de coté 4cm et G son centre de gravité. $I = A * C$ et D le point vérifiant : $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BI}$

1) Calculer : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

2) Quelle est la nature du quadrilatère ADCB ?

3) Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma = \{M \in P \ / \ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 5\}$

4) a) Montrer que pour tout point $M \in P$ on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - MB^2 = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BD} + 8$

b) En déduire l'ensemble Δ des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} - MB^2 - 8 = 0$

5) Soit l'application $f : P \to IR \quad M \mapsto f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$

a) Montrer que pour tout point $M \in P$ on a $f(M) = 3MG^2 + 16$

b) Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma' = \{ M \in P \ / \ MA^2 + MB^2 + MC^2 = 43 \}$

E 5

Dans le plan P ; ABC un triangle tel que : AB= 4 ; AC = 5 et BC = 6 (unité :cm)

On pose : $I = A * B$

1) a) Montrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Calculer alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Soit l'ensemble $(\xi) = \{M \in P \ ; \ MA^2 + MB^2 = 61\}$

a) Vérifier que $C \in (\xi)$.

b) Déterminer et construire l'ensemble (ξ).

3) Soit $(\Delta) = \{ M \in P \ ; \ MA^2 - MB^2 = -11\}$

a) Vérifier que $C \in (\Delta)$.

b) Montrer que $M \in (\Delta)$ signifie $2\,\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MI} = -11$.

c) Déduire que $M \in (\Delta)$ signifie $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MC} = 0$

d) Déterminer alors et construire l'ensemble (Δ).

4) (Δ) recoupe (ξ) en C'. Montrer que le triangle ACC' est isocèle.

E 6

Dans un plan P on considère un rectangle ABCD tel que AB = 2 BC = 2 (l'unité de longueur étant choisie)

Soit J le point du segment [CD] tel que $CJ = \frac{1}{2}$. La droite(BJ) coupe (AC) en I et coupe (AD) en K .

A) 1) Faire une figure illustrant les données ci-dessous puis vérifier que $AC = \sqrt{5}$.

2) Démontrer que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CJ}$. En déduire que $(BJ) \perp (AC)$

3) a) Calculer la distance BJ et Démontrer que $BI = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

b) Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ}$.

4) a) Démontrer que D est le barycentre de deux points pondérés (A, 3) et (K, 1).

b) En déduire que $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC} = 4$.

5) Soient les ensembles : $E = \{M \in P \text{ tq } MA^2 + MB^2 = 6\}$ et $F = \{M \in P \text{ tq } 3.MA^2 + MK^2 = 16\}$.

a) Vérifier que C appartient à E. Déterminer alors l'ensemble E et le construire.

b) Vérifier que A appartient à F. Déterminer alors l'ensemble F et le construire.

c) Déterminer l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in P \text{ tel que } (3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MK}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0\right\}$