DEVOIR SYNTHESE 2.

S M A A L I. **4°T2.**

2019 (3H).

Ex I.

I. ………………………………………………

1) *Soit g la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $g(x) = 1 - x + 2\ln(x)$ *dont son tableau de variation est le suivant :*

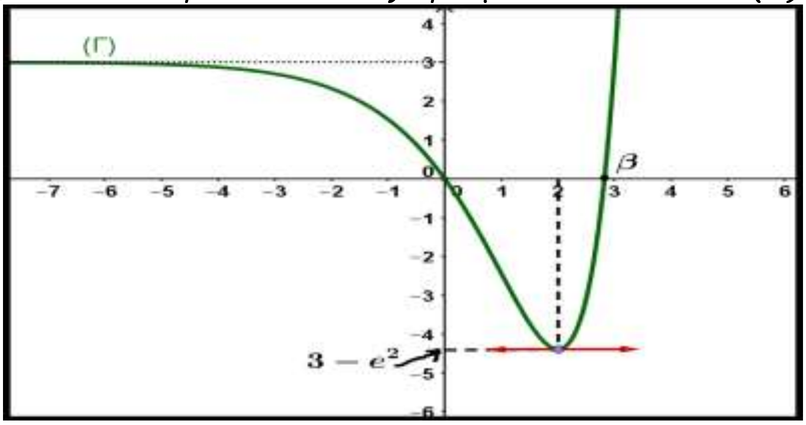
x	0	1	2	α	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$\ln\left(\frac{4}{e}\right)$ ↘	0 ↘	$-\infty$

a- *dresser le tableau de signe de g(x).*

b- *déduire le tableau de signe de g (1/x).*

2) *soit h la fonction définie sur IR par* $h(x) = (ax + b)e^x + c$

où $a, b, c \in IR$, *dont sa représentation graphique est la courbe* (Γ) *suivante :*



a- *lire graphiquement h(0) et déduire que* $b + c = 0$

b- *lire graphiquement* $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ *et déduire que* $c = 3$

c- *donner l'expression de h'(x) en fonction de* x, a et b.

d- *lire graphiquement h'(2) et déduire que* $3a + b = 0$

e- *prouver alors que* $h(x) = (x - 3)e^x + 3$

f- *dresser graphiquement le tableau de signe de h(x).*

II. ………………………………………………

On considère la fonction f définie sur IR par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{1-e^x} & si\ x < 0 \\ -x + x^2\left(1 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

Et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) *montrer que f est continue en 0.*

2) *étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.*

3) *montrer que la courbe (C) admet deux branches infinies de direction* $(o, \vec{j})$.

4)

a- *montrer que pour tout x>0,* $\mathbf{f'(x) = x.g(\frac{1}{x})}$

b- *montrer que pour tout x<0,* $\mathbf{f'(x) = \left(\frac{x}{1-e^x}\right)^2.h(x)}$

5)

a- *vérifier que* $\mathbf{f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{\alpha-1}{2.\alpha^2}}$

b- *dresser le tableau de variation de f.*

6) *Tracer la courbe (C) en affichant toutes les tangentes horizontales et les demi-tangentes à (C).*

- *unité graphique : 3cm x 3cm.*
- *on donne :* $\alpha \cong 3{,}5$; $\frac{1}{\alpha} \cong 0{,}3$ et $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cong -0{,}1$.

Ex 2.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $\mathbf{A(1,1,0); B(-1,2,1)}$ **et** $\mathbf{C(0,1,1)}$.

1) a) *Déterminer les composantes du vecteur* $\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{AC}}$.

b) *En déduire que les points A, B et C déterminent un plan (P) dont une équation est* $\mathbf{x+y+z=2}$

2) *Soit* (Δ) *la droite dont une représentation paramétrique est:*

$$\begin{cases} \mathbf{x=-1} \\ \mathbf{y=-1+3t} \\ \mathbf{z=1-3t} \end{cases} (\mathbf{t} \in \mathbb{R}).$$

Montrer que (Δ) *est strictement parallèle à (P).*

3) *Soit* α *un réel et* $\overrightarrow{\mathbf{U_\alpha}} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{-\alpha} \end{pmatrix}$ *un vecteur de l'espace.*

On considère (S_α) *l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que*

$$\mathbf{OM^2 - 2\left(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{U_\alpha}\right) + \alpha(\alpha+1) = 0}$$

a) *Montrer que, pour tout réel* α, (S_α) *est une sphère de centre* $\mathbf{I_\alpha(-1,\alpha,-\alpha)}$ *et de rayon* $\mathbf{R_\alpha = \sqrt{\alpha^2-\alpha+1}}$.

b) *Montrer que, pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *le point* $I_\alpha \in (\Delta)$.

c) *Calculer pour tout réel* α, *le volume* V_α *du tétraèdre* ABCI_α .

4) a) *quelles sont les sphères* (S_α) *tangentes à (P) ? et préciser en quel point.*

b) *Vérifier que les sphères* (S_α) *et* $(S_{1-\alpha})$ *ont le même rayon.*

c) *Déterminer* α *pour que le plan (P) coupe chacune des sphères* (S_α) *et* $(S_{1-\alpha})$ *selon un cercle de rayon* **2**.