Épreuve : Mathématiques Durée : 2H	**Devoir de synthèse n°1** ◉○◉○◉ **3ème Maths**	Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x^2+9}-3}{x} & \text{si } x>0\\ x-1+\dfrac{1}{x+1} & \text{si } x<0\end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}$ *sa courbe représentative dans un repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Montrer que f est continue sur D_f.

2) a) Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+9}+3}$.

b) En déduire la limite de f à droite en 0.

c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et définir son prolongement g.

3) a) Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)\le\dfrac{4x}{2x+3}$

b) En déduire que pour tout réel $x>0$, $f(x)<2$.

4) a) Vérifier que pour tout réel $x>0$, $f(x)=\sqrt{4+\dfrac{9}{x^2}}-\dfrac{3}{x}$.

b) En déduire que la droite d'équation $y=2$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

5) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale que l'on précisera.

6) a) Montrer que la droite Δ d'équation : $y=x-1$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

b) Déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Δ sur $]-\infty,0[$.

Exercice 2

1) Résoudre, dans $]0,\pi[$, l'équation (E) : $\cos 3x-\cos 2x=0$.

2) a) En écrivant $\cos 3x=\cos(2x+x)$, montrer que $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

b) En déduire que pour tout réel x, $\cos 3x-\cos 2x=(\cos x-1)(4\cos^2 x+2\cos x-1)$.

3) a) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $4t^2+2t-1=0$.

b) En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

c) Vérifier que $1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=0$.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points $A(1,\sqrt{3})$ et $B(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

1) a) Déterminer les coordonnées polaires des points A et B.

b) En déduire que le triangle OAB est isocèle en O.

2) a) Montrer que $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})\equiv\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$.

b) En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) Soit C le point du plan tel que $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

a) Construire les points A, B et C.

b) Montrer que $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OC}})\equiv\frac{\pi}{24}\ [2\pi]$.

c) Calculer la distance OC.

d) Vérifier les égalités :

$$(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})(8+2\sqrt{2}-2\sqrt{6})=8(1+\sqrt{2})^2.$$

$$(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})(8+2\sqrt{2}-2\sqrt{6})=8(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2.$$

e) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}}$