PRECIS

DE

PROBABILITES

PROBABILITES

TERMINALES C/D

M. KOPE Atsè Sylvain Akomian

Sommaire

CONSEILS PRATIQUES

▪ L'ÉPREUVE ECRITE DE MATHS AU BACCALAURÉAT

Le texte de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat comporte deux exercices et un problème indépendants les uns des autres. Le barème des points attribués au problème et aux exercices peut être indiqué sur le sujet. Dans tous les cas, vous devez savoir qu'il doit respecter les limites suivantes : 8 à 12 points pour le problème, 4 à 6 points pour les exercices.
Les modalités des épreuves sont les suivantes :
Série C : durée 4 heures   coefficient 5
Série D : durée 4 heures   coefficient 4

▪ CONSEILS POUR REUSSIR UN DEVOIR DE PROBABILITE

1. Face à un exercice de probabilités

- ❖ Commencer par bien lire l'énoncé.
- ❖ Certaines expressions permettent de traduire tout de suite l'hypothèse d'équiprobabilité (« au hasard », « dé non pipé », « boules indiscernables au toucher», ...).
- ❖ La formulation du problème conduit souvent à un schéma (arbre, tableau, ...) qui traduit la situation et aide à résoudre l'exercice.
- ❖ Certains énoncés utilisent des données statistiques qui peuvent être traduites en termes probabilistes (par exemple, 25 % correspond à une probabilité de $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$)

2. Méthodes classiques

- ❖ Un événement complexe peut se traduire comme la réunion de plusieurs événements incompatibles plus simples : on est alors amené à calculer la probabilité de chacun de ces événements, et à utiliser la propriété suivante :

Si A et B sont incompatibles, alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

- ❖ Utiliser la propriété suivante : $p(\overline{A})=1-p(A)$ lorsque le calcul de $p(\overline{A})$ est plus simple (c'est-à-dire conduit à moins de cas) que celui de $p(A)$;

Par exemple, lorsque A se traduit par « au moins un... », $\overline{A}$ se traduit par « aucun ».

3. **Règles à ne pas oublier**
   - ❖ Toute probabilité est comprise entre 0 et 1.
   - ❖ La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 (n'est jamais mentionné dans l'énoncé, mais doit toujours être présent à l'esprit).
   - ❖ Vérifier la cohérence des résultats vis-à-vis des données de l'exercice et ne pas négliger l'intuition ; par exemple, une population peu représentée conduira en général à une probabilité faible.

▪ CONSEILS POUR CONSTRUIRE UN DEVOIR DE MATHEMATIQUES

1) **Au début de l'épreuve**
   - Lisez attentivement tout l'énoncé.
   - Déterminer le temps maximum que vous devez employer pour traiter, rédiger et relire les exercices et le problème en fonction des indications du barème. A titre indicatif sachez que vous avez dans la majeur partie des cas 45 minutes pour chaque exercice et 2 heures 30 minutes pour le problème.
   - Commencer par l'exercice qui vous paraît « le plus facile »

2) **Pendant l'épreuve**
   - Chercher d'abord les questions au brouillon. Si vous terminer l'exercice recopiez-le ; si vous n'arrivez pas à résoudre une question, relisez une fois de plus votre brouillon et la question. Si tout vous paraît juste, commencez la rédaction : « la mise au propre », en faisant ressortir les résultats obtenus dans les premières questions, ces résultats vous aideront dans la suite du devoir.
   - Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat donné dans l'énoncé, laisser du blanc dans votre copie et continuez votre exercice ou votre problème.
   - N'oubliez pas qu'une réponse doit être justifiée.

3) **Présentation de votre copie**
   - Séparez les questions, encadrez ou soulignez les résultats : respectez les notations du texte.
   - N'abusez pas des effaceurs et des correcteurs (gomme, Blanco …), la copie devient parfois illisible.

- Les représentations graphiques se font sur du papier millimétré. Si les unités ne sont pas précisées dans le texte, bien les choisir ainsi que la place de l'origine sur la feuille. N'oubliez pas que les tangentes aident à faire un meilleur graphique.
- Les dessins des exercices de géométrie doivent comporter tous les points nécessaires à la compréhension de vos démonstrations.

BONNE COMPOSITION

LE COURS

NOTION DE PROBABILITÉ

1. **LE VOCABULAIRE DES EVENEMENTS**

a) Expérience aléatoire

On appelle *expérience aléatoire* une expérience dans laquelle il n'est pas possible de prévoir le résultat.

<u>EXP</u> : « *On lance un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le chiffre inscrit sur sa face supérieure* »

b) Univers des éventualités d'une expérience aléatoire

Soit une expérience aléatoire donnant un nombre fini de résultats (possible) appelés *éventualités.* On appelle *univers des éventualités* de cette expérience aléatoire l'ensemble de toutes les éventualités.

<u>EXP</u> : dans l'expérience décrite ci-dessus 2 est une éventualité.

$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ est l'univers des éventualités.

c) Évènement

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

On appelle évènement de Ω toute partie de Ω.

d) Évènements particuliers

- ✓ Lorsque l'évènement considéré est un singleton, on l'appelle **évènement élémentaire**.
- ✓ Lorsque l'évènement considéré est l'ensemble vide, on l'appelle **évènement impossible**.
- ✓ Lorsque l'évènement considéré est l'univers, on l'appelle **évènement certain**.
- ✓ Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, A et B deux évènements de Ω.
  - On appelle évènement « A ou B » la partie $A \cup B$ de Ω.
  - On appelle évènement « A et B » la partie $A \cap B$ de Ω.
  - On appelle évènement contraire de A l'évènement noté $\bar{A}$ qui est le complémentaire de A dans Ω.
  - On dit que l'évènement A et l'évènement B sont incompatibles lorsque l'évènement « A et B » est l'évènement impossible.

2. PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT

a) Définition

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
On dit que l'on définit une probabilité P sur Ω lorsque à toute partie A de Ω on peut associer un nombre réel noté P (A) ; appelé probabilité de A et vérifiant les conditions suivantes :

- La probabilité d'un évènement est comprise *entre 0 et 1*.
- La probabilité de l'évènement certain est égale à 1 ; celle de l'évènement impossible est égale à 0.
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le compose.

b) Propriétés

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si A et B sont deux évènements incompatibles de Ω, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $\bar{A}$ est l'évènement contraire de A, on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

3. CALCUL DES PROBABILITES EN SITUATION D'EQUIPROBABILITE

a) Définition

On a une situation d'équiprobabilité (ou de probabilité uniforme) lorsque tous les évènements élémentaires de l'univers d'une expérience aléatoire ont la même probabilité.
Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme : « dé parfait » ; « dé non pipé » ; « cartes bien battues » ; « tirage au hasard » ; « boules indiscernables au toucher »…

b) Propriété

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω ; dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout évènement A de Ω, on a : $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

INDÉPENDANCE – PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

1. INDÉPENDANCE

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux évènements de Ω.
Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

<u>EXP :</u> une urne contient deux boules rouges et trois boules bleues indiscernables au toucher.
On tire au hasard et successivement avec remise deux boules de l'urne et on note les couleurs des boules tirées.
Soit les évènements suivants :
A : « La première boule tirée est rouge »
B : « La deuxième boule tirée est rouge »

Puisqu'on a remis la première boule tirée dans l'urne, la couleur de la boule obtenue au second tirage ne dépend pas de celle obtenue lors du premier tirage. Les évènements A et B sont donc indépendants.

2. PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

a) Définition

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, B un évènement de Ω de probabilité non nulle. L'application P_B qui à tout évènement A de Ω associe le nombre réel $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur Ω ; elle est appelé *probabilité conditionnelle sachant que B est réalisé.*
$P_B(A)$ (ou $P(A / B)$) est appelé probabilité de A sachant que B est réalisé ou tout simplement probabilité de A sachant B.

b) Propriété

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, P une probabilité sur Ω et P_B une probabilité conditionnelle sur Ω. Pour tous évènement A et B de Ω tels que $P(B) \neq 0$ on a : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

c) Corollaire

Deux évènements A et B sont indépendants ⇔ $P_B(A) = P(A)$.
Cette propriété n'a de sens que lorsque $P(B) \neq 0$

VARIABLE ALÉATOIRE

1. DÉFINITION

On appelle *variable aléatoire* X sur un univers Ω, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

NOTATION ET VOCABULAIRE

X(Ω)=$\{x_1;x_2;...;x_n\}$ est appelé univers image de Ω par X.

(X=x_i) désigne l'évènement « X prend la valeur x_i »

(X<α) désigne l'évènement « X prend les valeurs inférieures à α »

2. LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Définition

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire X la donnée des probabilités P_i des évènements (X=x_i)

On note $P_i=P(X=x_i) \quad 1 \le i \le n$

Remarques

- ✓ ***Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau***
- ✓ ***Lorsqu'on finit la loi de probabilité d'une variable aléatoire, il prudent de vérifier que*** $P_1+P_2+...+P_n=1$

3. FONCTION DE RÉPARTITION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité *P*.

La *fonction de répartition* de X est l'application *F* de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ définie par :

$F(x)=P(X \le x)$

4. CARACTERISTIQUES D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

a) Espérance Mathématique

Définition

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité $P_i=P(X=x_i) \quad 1 \le i \le n$.

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel, noté *E(X)* défini par :

E(X) $= x_1P_1+x_2P_2+...+x_nP_n$

b) Variance – écart type

Définitions

Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité $P_i=P(X=x_i) \quad 1 \le i \le n$.

- ✓ On appelle variance de X le nombre réel noté *V(X)* défini par :
  $V(X)=[x_1-E(X)]^2P_1+[x_2-E(X)]^2P_2+...+[x_n-E(X)]^2P_n$
- ✓ On appelle écart type de X le nombre réel noté $\sigma(X)$ défini par : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Propriété

Soit une variable aléatoire X d'espérance mathématique *E(X)*.La variance de X est donnée par : $V(X)=x_1^2P_1+x_2^2P_2+...+x_n^2P_n-[E(X)]^2$

NB : Cette dernière expression de la variance est plus pratique que celle donnée par la définition ci – dessus.

LOI BINOMIALE

1. SCHÉMA DE BERNOULLI

a) Épreuve de BERNOULLI

Définition

On appelle épreuve de Bernoulli, toute épreuve aléatoire ne conduisant qu'à deux éventualités ; l'une appelée succès et l'autre appelée échec.
La probabilité p d'obtenir un succès est appelée *paramètre de l'épreuve de Bernoulli.*

b) SCHÉMA DE BERNOULLI

Définition

On appelle schéma de Bernoulli une suite d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes

c) Propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n (n élément de *IN*) épreuves où pour chaque épreuve la probabilité d'un succès est p (celle de l'échec est 1-p).
La probabilité d'obtenir exactement k succès $(0 \leq k \leq n)$ au cours de ces n épreuves est : $P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

2. LA LOI BINOMIALE

a) Définition – propriété

Soit un schéma de Bernoulli à n (n élément de *IN*) épreuves où pour chaque épreuve la probabilité d'un succès est p (celle de l'échec est 1-p), X la variable aléatoire qui a chaque éventualité du schéma de Bernoulli associe le nombre k de succès $(0 \leq k \leq n)$
La loi de probabilité de X est définie par : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Cette loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.

b) Espérance mathématique – variance

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p.
On a : $E(X) = n \times p$; $V(X) = n \times p(1-p)$.