

# Physique

4<sup>ème</sup> année de l'enseignement secondaire  
**Sciences techniques**

**Sous la direction de**  
**Abdelhamid BAATOUT**

## **Equipe de rédaction**

**Abdelhamid BAATOUT**  
Inspecteur G. E

**Mohamed Arbi BEN DAAMAR**  
Inspecteur E. P. L

**Abdessattar HRICHI**  
Inspecteur E. P. L

**Taoufik BACCARI**  
Inspecteur G. E..

**Abdelaziz DHAOUADI**  
Professeur principal

**Mouldi TAALOUCHE**  
Inspecteur E. P. L.

## **Evaluation**

**M'hammed EL GHADHAB**  
Inspecteur E. P. L.

**Mohamed OMMEZZINE**  
Professeur universitaire

**Ardhaoui KOUAS**  
Inspecteur E. P. L.

## **Mise à jour et adaptation**

**Abdessattar HRICHI**  
Inspecteur E. P. L.

**Ali Soltani**  
Inspecteur E. P. L.

## **Evaluation de la mise à jour et de l'adaptation**

**Rachid Dridi**  
Inspecteur E. P. L.

**Taoufik Rwabeh**  
Inspecteur E. P. L.



# AVANT PROPOS

Cet ouvrage de physique est conforme au programme officiel de 4<sup>ème</sup> année Sciences techniques, publié en Septembre 2009.

Avec un découpage en neuf chapitres développant les trois thèmes du programme (Evolution de systèmes - Filtres électriques - Ondes mécaniques), ce manuel a été conçu pour être élaboré avec une approche centrée sur l'élève afin que celui-ci s'y retrouve et puisse en tirer le maximum de profit dans sa préparation à l'examen de baccalauréat, à côté de ce qu'il réalise avec ses pairs et son professeur en classe.

Effectivement, les différents contenus sont construits dans l'esprit de permettre à l'élève une exploitation optimale du livre, que ce soit avant la classe pour essayer de faire tout seul son cours ou après dans le but de consolider ses acquis. Dans cette perspective, les 9 chapitres du livre sont présentés avec une logique visant la stimulation de la motivation de l'élève et facilitant son implication dans la construction de nouvelles connaissances. Avec les objectifs fixés et le prérequis précisé en début du chapitre, des questionnements tirés du vécu quotidien sont cités pour donner du sens à l'étude proposée. Après position du problème, un ensemble d'activités proposées le plus souvent sous forme d'une manipulation réalisable dans une séance de classe (cours ou travaux pratiques) est suivi de questions posées sur les observations et les constatations indiquées, sur les mesures faites, voire sur leur exploitation graphique ou analytique afin d'entraîner l'apprenant à la pratique de la démarche scientifique expérimentale.

Outre les conclusions, les analyses et les interprétations théoriques, développées par les auteurs, viennent pour rassurer l'apprenant et l'aider à s'auto-évaluer. Les connaissances fondamentales construites par le traitement du chapitre sont reformulées dans une rubrique intitulée "L'essentiel" et insérée à la fin du cours. Un ensemble de questions de contrôle rapide des acquis, d'exercices d'application et de synthèse dont les réponses figurent en fin d'ouvrage est précédé d'un exercice entièrement résolu, présenté comme un autre support d'aide à l'auto-évaluation. En fin de chapitre, sont proposées une fiche technique comme complément facilitateur de l'étude ou une rubrique intitulée "En savoir plus" dont le contenu est un sujet de lecture qui peut servir à un certain approfondissement des connaissances du lecteur et à l'éclairer davantage sur leur importance dans la compréhension du monde physique moderne.

Enfin, nous espérons que cet ouvrage aura le mérite, comme nous avons souhaité lors de sa rédaction, d'être un support clair, pratique et attrayant pour son premier public qui sont les élèves de terminale et tous ceux qui penseront à y recourir.

Les auteurs

# SOMMAIRE

## ÉVOLUTION DE SYSTÈMES ÉLECTRIQUES

### LE CONDENSATEUR LE DIPÔLE RC

1



L'éclair lumineux de très forte intensité d'une lampe flash d'un appareil photo se produit grâce à un condensateur.

- ◆ Le condensateur est un composant électrique connu comme un réservoir d'énergie. De quelle forme d'énergie s'agit-il et qu'est-ce qui confère au condensateur cette propriété ?
- ◆ Quel est le principe de fonctionnement du flash d'un appareil photo ?

11

### LA BOBINE LE DIPÔLE RL

2



Même les gros transformateurs utilisent des bobines.

- ◆ Pourquoi, les transformateurs ne peuvent pas être utilisés en courant continu ?
- ◆ Comment fonctionnent les ralentisseurs électromagnétiques des véhicules "voies lourdes" ?

43

### OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES

3



Le quartz apporte sa fréquence grâce aux oscillations, une propriété électromécanique y joue un rôle crucial.

- ◆ Que désigne-t-on par les expressions "oscillations électriques", "oscillateur électrique", "circuit oscillant" ... ?
- ◆ Est-ce que le courant alternatif est un phénomène oscillatoire ?

77

## ÉVOLUTION D'UN SYSTÈME MÉCANIQUE

### OSCILLATIONS FORCÉES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

4



La guitare électrique est munie d'une caisse en cèdre à laquelle sont adossés des micros électromagnétiques. Grâce à la résonance électrique, le son amplifié passe par la résonance naturelle de la caisse.

- ◆ En quoi consiste la recherche manuelle ou automatique d'une chaîne radio ou d'un canal de télévision ?
- ◆ Que veut-on dire par "résonance électrique" dont les applications sont très nombreuses ?

105

### OSCILLATIONS LIBRES D'UN PENDULE ÉLASTIQUE

5



Avec son amortisseur à ressort, le VTT (Milo Test Terrain) 75 (Test Esquende) donne au cycliste un confort d'utilisation supérieur dans une conception de descente d'une montagne.

En évitant le balancement des amortisseurs, le gymnaste démontre tout sa force que son équilibre.

- ◆ Les gyres, le cœur humain et le balancier d'une horloge sont, entre beaucoup d'autres exemples, des systèmes oscillants. Pourquoi ?
- ◆ Quelle est l'origine du ronflement continu que l'on entend souvent à proximité de fils électriques ou téléphoniques aériens ?
- ◆ À quel est due la catastrophe naturelle connue sous le nom de tsunami ?

131

### OSCILLATIONS FORCÉES D'UN PENDULE ÉLASTIQUE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

6



Les marées sont des oscillations périodiques. À quoi sont-elles dues et en quoi diffèrent-elles des tsunamis ?

Le violoniste fait vibrer les cordes de son instrument et les frotte avec l'archet pour produire un son avec des notes plus ou moins hautes.

Clarinettes "gyres" offrent une musique très impressionnante.

- ◆ Pourquoi ces formes particulières des instruments de musique comme le violon, la violoncelle, le contre basse, la clarinette ... ?
- ◆ Dans certaines voitures, on entend parfois des bruits inconfortables de la carrosserie. À quel sont-ils dus et pourquoi à des bruits bien déterminés et non pas à d'autres ?
- ◆ Pourquoi a-t-on interdit à un régiment de soldats de traverser un pont (même non suspendu) au pas ?

153

# FILTRES ÉLECTRIQUES

## LES FILTRES ÉLECTRIQUES

7



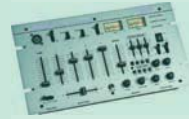
Dans une rooming, atténuer les filtres électriques permettent d'adapter, sur chaque haut-parleur, de recevoir la plage de fréquences qui lui correspond.

- ◆ D'où provient l'énergie des vagues ?
- ◆ Le déferlement des vagues correspond-il à un déplacement de matière ou d'énergie ?
- ◆ Nos oreilles perçoivent des sons. Qu'est-ce qui fait qu'ils nous parlent et pourquoi les sons émis et ceux qu'on perçoit sont les mêmes ?

173

## EXEMPLES DE FILTRES ÉLECTRIQUES

8



Un égaliseur (égaliseur en anglais) ou correcteur, est un outil utilisé avec des haut-parleurs pour régler l'amplitude de la bande de fréquences de certains sons.

- ◆ Les filtres sont indissociables de l'acoustique, de la radioélectrique et de plusieurs autres domaines.
- ◆ Les filtres sont utilisés dans la conception des chaînes HiFi, des amplificateurs, des récepteurs et des tables de mixage, etc.
- ◆ Dans le domaine des asservissements les filtres utilisés sont appelés des correcteurs. Comment fonctionnent ces filtres en acoustique ?

191

# ONDES MÉCANIQUES

## ONDES MÉCANIQUES PROGRESSIVES

9



Les vagues constituent un exemple de propagation d'ondes dans un milieu élastique.

- ◆ D'où provient l'énergie des vagues ?
- ◆ Le déferlement des vagues correspond-il à un déplacement de matière ou d'énergie ?
- ◆ Nos oreilles perçoivent des sons. Qu'est-ce qui fait qu'ils nous parlent et pourquoi les sons émis et ceux qu'on perçoit sont les mêmes ?

229

# STRUCTURE DU LIVRE


## Présentation d'un thème du livre

Intitulé du thème à étudier


Photographies illustrant le thème

### ÉVOLUTION DE SYSTÈMES


Siège chaque touche de certains claviers se trouve un condensateur dont la capacité varie lors de la frappe. La variation des grandeurs électriques qui en découlent est illustrée par une photo.



Grâce à une bobine placée au sein d'un circuit, on peut réaliser un condensateur électrostatique.




Pour l'entretien et le bon fonctionnement, un visiteur des circuits électriques existants.




### ÉVOLUTION DE SYSTÈMES

Le piano, qui instrumente de musique, tire part du phénomène de résonance, qui est responsable dans son fonctionnement d'être ébranlé le son le plus puissant.



La conception d'une bobine de gaines les rendant imperméables de la réaction mécanique.



Chapitres constituant le thème

## Présentation d'un chapitre du thème

Objectifs visés par le traitement du chapitre

Prérequis indispensables à l'étude du chapitre, en termes de connaissances spécifiques aux sciences physiques

Connaissances déclaratives (définitions, concepts, modèles, lois...)

### LE CONDENSATEUR LE DIPÔLE RC

**Objectifs**

- Réaliser la charge et la décharge d'un condensateur.
- Reconstruire que l'intensité  $i$  du courant électrique est une grandeur algébrique.
- Déterminer à l'aide de la courbe de charge d'un condensateur, la valeur de la capacité  $C$ .
- Déterminer graphiquement la constante de temps  $\tau$  RC d'un dipôle RC.
- Établir l'équation différentielle régissant, au cours du phénomène de charge d'un condensateur :
  - la charge instantanée  $q(t)$  du condensateur,
  - la tension  $u(t)$  à ses bornes,
  - l'intensité  $i(t)$  du courant transitoire parcourant le circuit.
- Calculer l'énergie emmagasinée par un condensateur.

**Prérequis**

Savoir	Savoir FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>Définir :                             <ul style="list-style-type: none"> <li>l'intensité du courant électrique,</li> <li>la tension <math>u</math> ou <math>e.p.d</math> électrique,</li> <li>la quantité d'électricité, un résistor.</li> </ul> </li> <li>Écrire la relation <math>Q = I \cdot t</math>.</li> <li>Énoncer :                             <ul style="list-style-type: none"> <li>la loi des mailles,</li> <li>la loi des nœuds,</li> <li>la loi d'Ohm relative à un résistor,</li> <li>la loi d'Ohm relative à un générateur.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Distinguer entre une tension continue et une tension variable.</li> <li>Tracer un oscillogramme bicourbe.</li> <li>Calculer la quantité d'électricité transportée par un courant continu d'intensité <math>i</math> pendant une durée <math>\Delta t</math> : <math>Q = I \cdot \Delta t</math>.</li> <li>Reconstruire une tension variable alternative.</li> <li>Reconstruire une tension en créneau.</li> <li>Appliquer la loi d'Ohm pour un résistor.</li> <li>Appliquer la loi d'Ohm pour un générateur.</li> <li>Appliquer la loi des mailles.</li> </ul>

Intitulé du chapitre à étudier

Photographie illustrant le chapitre

Stimuli sous forme de questionnements tirés du vécu quotidien

Le condensateur est un composant électrique connu comme un réservoir d'énergie. De quelle forme d'énergie s'agit-il et qu'est-ce qui confère au condensateur cette propriété ?

Quel est le principe de fonctionnement du flash d'un appareil photo ?

Connaissances procédurales (capacités d'utiliser des connaissances déclaratives dans des situations particulières du domaine théorique et du domaine expérimental)

# Contenu scientifique du chapitre traité

Intitulé de la leçon

Introduction à l'étude proposée

Manipulation réalisable dans une séance de cours ou de travaux pratiques

Questions sur la manipulation

Analyse des résultats expérimentaux trouvés

Etude détaillée visant l'interprétation théorique des résultats expérimentaux

Notions et concepts essentiels mis en évidence expérimentalement ou théoriquement par l'étude faite

## Evaluation et consolidation des acquis

Exercices visant le contrôle immédiat de ses propres acquis

Exercices dont la résolution ne demande pas plus que la capacité d'appliquer

Exercice proposé avec une solution détaillée en vue de s'entraîner à la résolution scientifique d'un problème

Exercices dont la résolution demande la capacité de pratiquer la démarche scientifique

## Approfondissement

En fin de chapitre :

◆ Rubrique "Fiche technique" : complément d'aspect pratique

◆ Rubrique intitulée "En savoir plus" : sujet de lecture pouvant intéresser les élèves par son originalité et le sens qu'il ajoute à l'étude faite et à ses applications

A la fin du livre :

◆ Réponses aux questions des exercices proposés

◆ Références intéressantes (Adresse de sites web ayant trait aux thèmes traités).

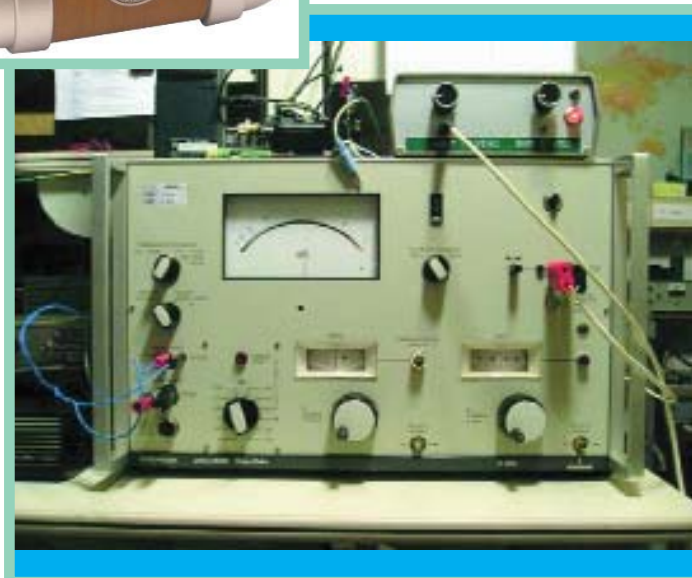
# ÉVOLUTION DE SYSTÈMES

Sous chaque touche de certains claviers se trouve un condensateur dont la capacité varie lors de la frappe. La variation des grandeurs électriques qui en découle est détectée par une puce.



Grâce à une bobine inductive, on peut amplifier le volume sonore d'un combiné téléphonique.

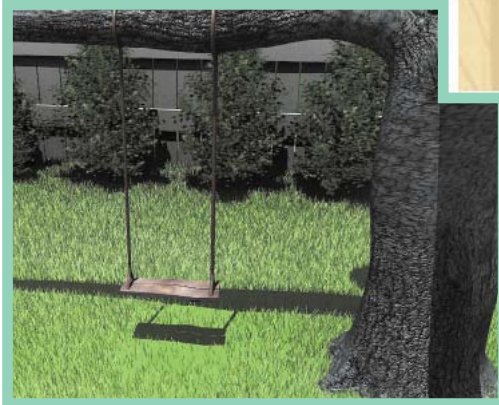
Pour l'émission et la réception radio, on utilise des circuits électriques oscillants.





# ÉVOLUTION DE SYSTÈMES

La plupart des instruments de musique tirent parti du phénomène de résonance qui est recherché dans leur conception afin d'émettre le son le plus puissant.



La conception d'une balançoire utilise les manifestations impressionnantes de la résonance mécanique.

## SOMMAIRE

### I- Evolution de systèmes électriques

- 1- Le condensateur ; le dipôle RC
- 2- La bobine ; le dipôle RL
- 3- Oscillations électriques libres
- 4- Oscillations électriques forcées en régime sinusoïdal

### II- Evolution d'un système mécanique :

- 1- Les oscillations libres d'un pendule élastique.
- 2- Les oscillations forcées d'un pendule élastique en régime sinusoïdal.

## Objectifs

- ◆ Réaliser la charge et la décharge d'un condensateur.
- ◆ Reconnaître que l'intensité  $i$  du courant électrique est une grandeur algébrique.
- ◆ Déterminer à l'aide de la courbe de charge d'un condensateur, la valeur de la capacité  $C$ .
- ◆ Déterminer graphiquement la constante de temps  $\tau = RC$  d'un dipôle RC.
- ◆ Établir l'équation différentielle régissant, au cours du phénomène de charge d'un condensateur :
  - la charge instantanée  $q(t)$  du condensateur,
  - la tension  $u(t)$  à ses bornes,
  - l'intensité  $i(t)$  du courant transitoire parcourant le circuit.
- ◆ Calculer l'énergie emmagasinée par un condensateur.

## Prérequis

SAVOIR	SAVOIR FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Définir :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- l'intensité du courant électrique,</li> <li>- la tension ( ou d.d.p) électrique,</li> <li>- la quantité d'électricité,</li> <li>- un résistor.</li> </ul> </li> <li>◆ Ecrire la relation <math>Q = I.\Delta t</math></li> <li>◆ Enoncer :               <ul style="list-style-type: none"> <li>- la loi des mailles,</li> <li>- la loi des noeuds,</li> <li>- la loi d'Ohm relative à un résistor,</li> <li>- la loi d'Ohm relative à un générateur.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Distinguer entre une tension continue et une tension variable.</li> <li>◆ Utiliser un oscilloscope bicourbe.</li> <li>◆ Calculer la quantité d'électricité transportée par un courant continu d'intensité <math>I</math> pendant une durée <math>\Delta t</math> : <math>Q = I.\Delta t</math>.</li> <li>◆ Reconnaître une tension variable alternative.</li> <li>◆ Reconnaître une tension en créneaux.</li> <li>◆ Appliquer la loi d'Ohm pour un résistor.</li> <li>◆ Appliquer la loi d'Ohm pour un générateur.</li> <li>◆ Appliquer la loi des mailles.</li> </ul>

# LE CONDENSATEUR LE DIPÔLE RC

1



L'éclair lumineux de très forte intensité d'une lampe flash d'un appareil photo se produit grâce à un condensateur.

- ◆ Le condensateur est un composant électrique connu comme un réservoir d'énergie. De quelle forme d'énergie s'agit-il et qu'est-ce qui confère au condensateur cette propriété ?
- ◆ Quel est le principe de fonctionnement du flash d'un appareil photo ?

# LE CONDENSATEUR

Le condensateur est un terme introduit en 1782 par Volta ( physicien italien, 1745-1827) après avoir constaté que l'électricité "se condense" sur les surfaces en regard de deux conducteurs quand on les approche l'un de l'autre.

## 1 DÉFINITION ET EXEMPLES

### 1.1- DÉFINITION ET SYMBOLE

Un condensateur est un composant électrique constitué de deux plaques conductrices très faiblement espacées et séparées par un isolant électrique. Les plaques sont désignées par les armatures du condensateur et le matériau isolant est appelé diélectrique.

Le condensateur est symboliquement représenté par deux traits parallèles qui représentent les armatures (Fig.1).

La petite distance qui les sépare représente l'épaisseur du diélectrique, celui-ci peut être de l'air, une feuille de papier imbibée d'huile de paraffine, de la céramique formée d'un mélange d'oxyde de titane et de titanates, du mica, du téflon, du polyéthène, de l'alumine ...

Étant un dipôle électrocinétique, le condensateur a deux bornes reliées directement à ses armatures. Dans le cas où les armatures sont planes et parallèles, le condensateur est dit plan.

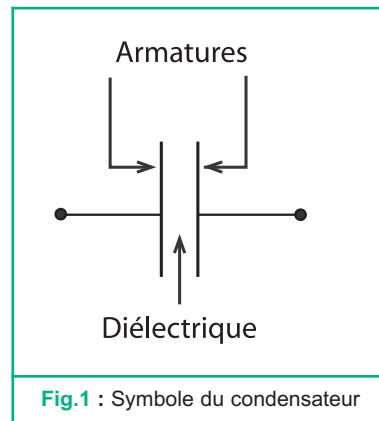


Fig.1 : Symbole du condensateur

### 1.2- EXEMPLES DE CONDENSATEURS USUELS

Actuellement, dans le commerce et comme le montre la photographie de la figure 2, on trouve des modèles de condensateurs de formes et de dimensions diverses.

Exemples :

- ♦ Les condensateurs à air où le diélectrique est l'air.
- ♦ Les condensateurs à diélectrique solide dans lesquels les feuilles métalliques, minces, sont roulées. Ils sont généralement de forme cylindrique.
- ♦ Les condensateurs électrochimiques dans lesquels les armatures sont en aluminium et le diélectrique est une mince couche d'alumine déposée par électrolyse.



Fig.2 : Quelques condensateurs usuels

## 2

## CHARGE ET DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR

## Manipulation

On réalise le montage de la figure 3 qui comprend un générateur de force électromotrice  $E$ , un galvanomètre balistique  $G$ , un résistor de résistance  $R$  et un commutateur  $K$ .

On commence par mettre le commutateur  $K$  dans la position 2, rien ne se produit.

En plaçant le commutateur  $K$  en position 1, l'aiguille du galvanomètre  $G$  dévie d'un angle  $\alpha$  dans le sens 1 indiqué sur la figure 4.a, puis revient à zéro.

Lorsqu'on ouvre le circuit et on le ferme de nouveau, on n'observe plus de déviation, on dit que le condensateur est chargé.

Quand on bascule le commutateur en position 2, l'aiguille du galvanomètre dévie du même angle  $\alpha$  que précédemment mais dans le sens 2, puis elle revient lentement à zéro (Fig.4b)

Lorsqu'on ouvre le circuit et on le ferme de nouveau, on n'observe plus de déviation, on dit que le condensateur est déchargé.

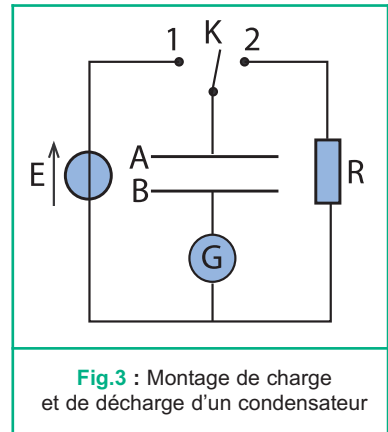


Fig.3 : Montage de charge et de décharge d'un condensateur

## Questions

1°) Peut-on décharger un condensateur non chargé ? préciser, parmi les observations faites, celle qui justifie la réponse.

2°) Expliquer les phénomènes de charge et de décharge d'un condensateur et en déduire si l'on peut recharger un condensateur déchargé.

## Interprétation

## ♦ Commutateur en position 1

Quand le commutateur  $K$  est en position 1, les armatures  $A$  et  $B$ , initialement neutres, du condensateur se trouvent reliées directement et respectivement au pôle (+) et au pôle (-) du générateur.

Des déplacements d'ensemble d'électrons s'effectuent alors dans les fils conducteurs de l'armature  $A$  vers le pôle (+) et du pôle (-) vers l'armature  $B$  jusqu'à ce que  $A$  soit au même potentiel que le pôle (+) et  $B$  au même potentiel que le pôle négatif. En d'autres termes, un courant électrique circule du pôle (+) vers  $A$  et de  $B$  vers le pôle (-) jusqu'à ce qu'il apparaisse une charge  $+q$  sur l'armature  $A$  et une charge  $-q$  sur l'armature  $B$  (Fig.4a), créant une différence de potentiel ( $V_A - V_B$ ) égale à celle délivrée aux bornes du générateur.

Ainsi, le condensateur est chargé.

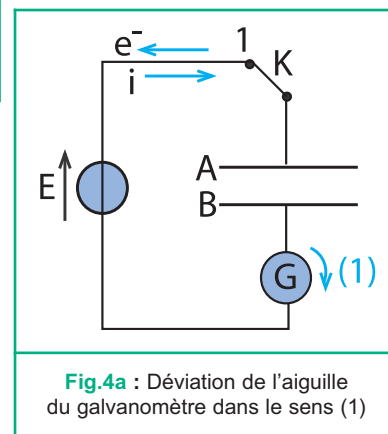


Fig.4a : Déviation de l'aiguille du galvanomètre dans le sens (1)

♦ **Commutateur en position 2**

Malgré le fait que le générateur de tension ne soit plus dans le circuit (Fig.4b), on note la circulation d'un courant bref dans celui-ci. En fait, lorsque K est en position 2, les armatures A et B portant les charges antagonistes  $+q$  et  $-q$  se trouvent reliées l'une à l'autre à travers le résistor, l'attraction entre  $+q$  et  $-q$  provoque un mouvement d'ensemble d'électrons de B vers A, dans les fils conducteurs à travers le résistor, c'est-à-dire la circulation d'un courant électrique dans le sens contraire. Un courant qui cesse dès que les armatures A et B se retrouvent de nouveau neutres. Ainsi, le condensateur est déchargé.

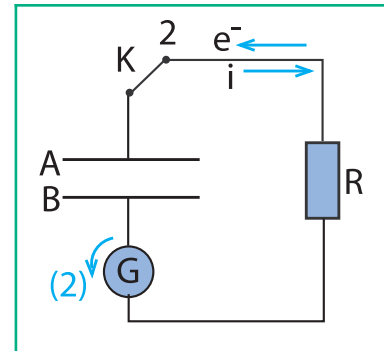


Fig.4b : Déviation de l'aiguille du galvanomètre dans le sens (2)

**Conclusion**

Le condensateur est un composant électrique capable de stocker des charges électriques.

## 3 CHARGE D'UN CONDENSATEUR ET INTENSITÉ DU COURANT

### 3.1- CARACTÈRE ALGÈBRE DE L'INTENSITÉ DU COURANT

**Manipulation**

On réalise le montage de la figure 5 avec un générateur de tension idéal de f.e.m.  $E$ , un résistor de résistance  $R$ , un condensateur, un commutateur  $K$  et deux diodes électroluminescentes  $D_1$  et  $D_2$ .

On enregistre à l'aide d'un oscilloscope à mémoire ou d'un système informatique d'acquisition de données, la tension  $u_R$  aux bornes du résistor lorsque le commutateur  $K$  est respectivement en position 1 et en position 2 (Fig.6).

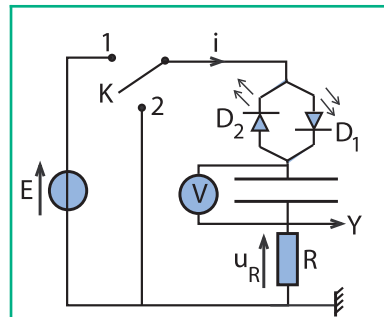


Fig.5 : Montage de charge et de décharge d'un condensateur

**Questions**

1°) Montrer que lorsque le commutateur  $K$  est dans la position 1, c'est la diode  $D_1$  seulement qui s'allume, tandis que lorsqu'il est dans la position 2, c'est la diode  $D_2$  qui s'allume.

2°) L'enregistrement de la figure 6 montre que la tension  $u_R$  est positive lorsque  $K$  est en 1, négative quand il est en 2. Sachant que  $u_R = Ri$ , montrer graphiquement, que l'intensité  $i$  est positive et décroissante pendant la charge, négative et croissante pendant la décharge.

### Interprétation

En choisissant comme sens positif du courant, celui indiqué sur la figure 5, on voit que l'intensité  $i$  est positive lorsque  $K$  est en position 1, c'est-à-dire pendant la charge du condensateur. La diode  $D_1$ , passante, s'allume. Par contre, pendant la décharge, le courant électrique circule dans le sens contraire du sens positif choisi, ce qui explique le signe négatif de son intensité et la luminescence de la diode  $D_2$ .

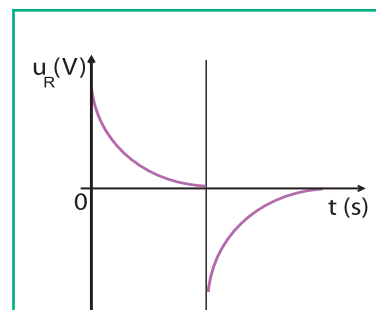


Fig.6 : Caractère algébrique de l'intensité du courant

### Conclusion

L'intensité du courant électrique est une grandeur algébrique. Elle est positive si le courant circule dans le sens arbitraire choisi et négative si le courant circule dans le sens contraire.

### 3.2- CHARGE $q$ D'UN CONDENSATEUR

On choisit arbitrairement un sens positif pour l'intensité du courant, celui indiqué sur la figure 7 par exemple.

Soit  $i$  l'intensité algébrique du courant :  $i > 0$  si le courant circule dans le sens indiqué sur la figure 7 et  $i < 0$  s'il circule dans le sens contraire.

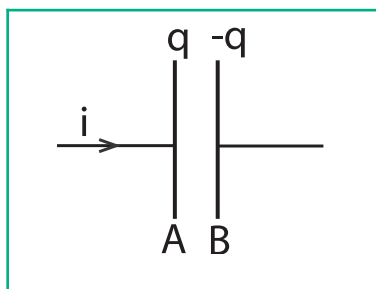


Fig.7 : Charge du condensateur

### Définition

On appelle charge  $q$  d'un condensateur  $\odot$ , la charge de l'une de ses armatures, choisie conventionnellement, celle vers laquelle est orienté le sens positif du courant.

$\odot$  Ne pas confondre entre la charge  $q$  d'un condensateur et le phénomène de charge.

### 3.3- RELATION ENTRE INTENSITÉ $i$ DU COURANT ET CHARGE $q$ D'UN CONDENSATEUR

Les grandeurs  $i$  et  $q$  sont variables au cours du temps. Entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , le courant circulant dans le sens positif, transporte la quantité d'électricité  $\Delta q > 0$ , ce qui fait augmenter la charge de l'armature A de  $\Delta q$ .

L'intensité du courant étant la quantité d'électricité transportée (ou traversant une section droite) par unité de temps, on a :

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

## 4 RELATION ENTRE LA CHARGE $q$ ET LA TENSION $u_C$

### Manipulation

On réalise le montage de la figure 8 avec un générateur de courant, un interrupteur  $K_1$ , un ampèremètre et un condensateur montés tous en série. Un voltmètre numérique et un interrupteur  $K_2$  sont branchés aux bornes du condensateur.

Étant idéal, le générateur de courant débite dans le circuit un courant continu d'intensité  $I$ .

La charge  $q$  étant proportionnelle à la durée  $t$ , on a  $q = I.t$ .

Étudier  $q$  en fonction de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur revient à étudier  $u_C$  en fonction du temps.

Avant toute mesure, on ferme l'interrupteur  $K_2$ , puis on l'ouvre et on le maintient ainsi durant toute l'expérience.

Simultanément, on ferme  $K_1$  et on déclenche le chronomètre.

Toutes les 5 secondes, on mesure la tension  $u_C = u_{AB}$ .

Pour  $I = 0,144$  mA par exemple, on obtient les résultats consignés dans le tableau suivant :

$t$ (s)	0	5	10	15	20	25	30
$u_C$ (V)	0	1,5	3,0	4,6	6,1	7,6	9,2

### Questions

1°) Que se passe-t-il quand on ferme  $K_2$  ? Quelle est l'indication du voltmètre ?

2°) Avant de fermer  $K_2$ , le voltmètre peut indiquer une tension non nulle. Expliquer cette possibilité.

3°) A l'aide du tableau de mesures dressé, montrer que la charge  $q$  augmente avec  $u_C$ .

4°) Comme courbe d'évolution de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur en fonction de la durée de charge, on obtient le tracé de la figure 9.

Montrer, graphiquement, que  $u_C = kt$  où  $k$  est une constante que l'on calculera.

5°) Déterminer la relation entre la charge  $q$  du condensateur et la tension  $u_C$  à ses bornes.

### Interprétation

#### ♦ Relation de proportionnalité entre $q$ et $u_C$

La courbe  $u_C = f(t)$  est une droite qui passe par l'origine (Fig.9). Par suite,  $u_C = kt$  avec  $k$  une constante positive. On en déduit que la tension  $u_C$  est proportionnelle à la durée  $t$  de passage du courant de charge. Compte tenu de la relation  $q = It$ , il vient :

$$u_C = k \frac{q}{I}, \text{ d'où } : q = \frac{I}{k} u_C.$$

Comme  $I$  est constant, le quotient  $\frac{I}{k}$  est une constante notée  $C$ .

On a ainsi :  $q = C u_C$ .

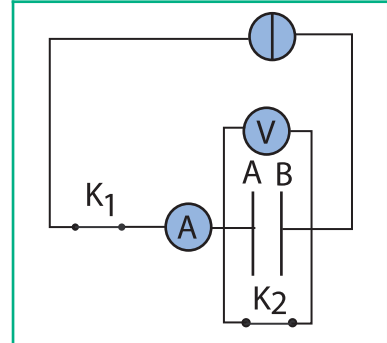


Fig.8 : Montage de charge d'un condensateur à courant constant

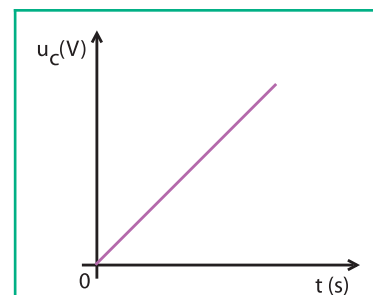


Fig.9 : Courbe d'évolution de la tension  $u_C$  au cours du temps



**Remarque**

Si on refait la même expérience avec un autre condensateur, on aboutit à la même relation de proportionnalité mais avec une autre valeur pour la constante C.

**♦ Capacité d'un condensateur**

La charge  $q$  d'un condensateur est proportionnelle à la tension  $u_C$  à ses bornes :  $q = C u_C$ . Le facteur de proportionnalité C est une grandeur qui caractérise l'aptitude du condensateur à emmagasiner une charge électrique  $q$  lorsqu'il est soumis à une tension  $u_C$ , appelée capacité du condensateur.

C ne dépend que des caractéristiques géométriques du condensateur et de la nature du diélectrique.

**♦ Unité et ordres de grandeur**

La capacité C d'un condensateur est une grandeur mesurable. Dans le système international d'unités, elle s'exprime en Farad (F)<sup>⊙</sup>. Le farad est la capacité d'un condensateur qui, soumis à une différence de potentiel de 1 V, prend une charge de 1 Coulomb.

⊙ Le nom de l'unité de capacité est dédié à Michael Faraday (physicien et chimiste anglais, 1791-1867)

La valeur de la capacité des condensateurs usuels varie selon l'usage dans un vaste domaine mais tout en restant très inférieure au farad. Autrement dit, le farad est une grande unité de capacité. On préfère alors utiliser des sous multiples du farad :

- le millifarad :  $1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F}$
- le microfarad:  $1 \text{ } \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$
- le nanofarad:  $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$
- le picofarad :  $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$
- le femtofarad:  $1 \text{ fF} = 10^{-15} \text{ F}$

Voici quelques exemples d'ordres de grandeurs de C :

Type du condensateur	Ordre de grandeur de C
Condensateur électrochimique	$\mu\text{F} - \text{F}$
Condensateur au mica, céramique	$\text{pF} - \text{nF}$
Condensateur au papier	$\mu\text{F}$
Condensateur au tantale	$0,1 \mu\text{F} - 0,01 \mu\text{F}$
Condensateur au polypropylène	$\text{nF} - \mu\text{F}$

**5****CAPACITÉ D'UN CONDENSATEUR PLAN**

La capacité d'un condensateur plan est proportionnelle à la surface S des armatures en regard et inversement proportionnelle à l'écartement e de ses armatures (Fig.10).

On peut écrire :

$$C = \varepsilon \frac{S}{e}$$

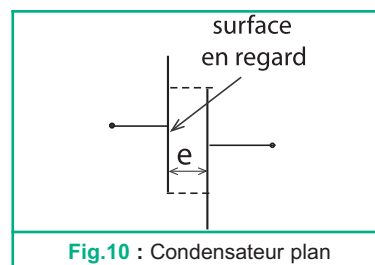


Fig.10 : Condensateur plan

Le facteur de proportionnalité  $\epsilon$  est une constante qui ne dépend que de la nature du diélectrique, on l'appelle permittivité absolue du diélectrique. Dans le système international d'unités,  $\epsilon$  s'exprime en farads par mètre. La permittivité  $\epsilon_0$  du vide est :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \quad (\text{F.m}^{-1})$$

La permittivité de l'air est pratiquement égale à celle du vide. Tous les autres diélectriques ont une permittivité absolue plus grande que celle du vide.

Pour des raisons de commodité de travail, on définit aussi la permittivité relative  $\epsilon_r$  d'un diélectrique comme étant le rapport de sa permittivité absolue sur la permittivité du vide :

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad \text{d'où} \quad C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{e}$$

Le tableau suivant donne des exemples de valeurs de la permittivité absolue  $\epsilon$  et de la permittivité relative  $\epsilon_r$  :

Diélectrique	$\epsilon_r$	$\epsilon$ ( $10^{-11}$ F.m <sup>-1</sup> )
Vide , air	1	0,885
Papier paraffiné	2 - 2,5	1,8 - 2,2
Polystyrène	2 - 3	1,8 - 2,7
Verre	4 - 7	3,5 - 6,2
Mica	5 - 8	4,4 - 7,1
Céramique	15 - 2500	13,2 - 2200

## 6

## TENSION DE SERVICE ET TENSION DE CLAQUAGE

En plus de la valeur de la capacité du condensateur, le constructeur indique généralement sur le boîtier deux valeurs différentes de tensions électriques, que représentent-elles ?

La charge  $q = C \cdot u$  d'un condensateur ne peut pas augmenter indéfiniment avec la tension  $u$  à ses bornes car celle-ci ne doit pas atteindre une valeur limite qui entraîne un dysfonctionnement (perte des propriétés) du composant.

En fait, lorsque la tension  $u$  est très élevée, les charges  $q$  et  $-q$  portées par les armatures du condensateur font jaillir des étincelles à travers le diélectrique qui sera à son tour troué quand il est autre que l'air ou le vide et perdra alors son caractère isolant. Dans ces conditions, on entend généralement un crépitement et on dit que le condensateur a claqué: il est détérioré, d'où le nom de tension de claquage ou de rupture.

### Définition

On appelle tension de claquage d'un condensateur la plus petite tension (en valeur absolue) faisant jaillir une étincelle entre les armatures du condensateur.

Ainsi, pour éviter de détériorer un condensateur, il faut éviter d'appliquer à ses bornes une tension de valeur absolue voisine de la valeur de la tension de claquage indiquée par le constructeur.

La deuxième valeur de tension indiquée sur le boîtier d'un condensateur est appelée tension de service, elle est d'une valeur nettement inférieure à celle de claquage, c'est la tension nominale du composant.

## 7 ÉNERGIE EMMAGASINÉE PAR UN CONDENSATEUR

### 7.1- LE CONDENSATEUR EST UN RÉSERVOIR D'ÉNERGIE

On sait qu'un courant électrique ne circule dans une portion de circuit, que lorsqu'il existe entre ses bornes une différence de potentiel non nulle. Ainsi, la circulation du courant dans les expériences décrites précédemment, en l'absence de tout générateur prouve que c'est le condensateur chargé qui a joué, pendant quelques instants, le rôle de générateur. Donc, le condensateur est un réservoir d'énergie.

#### Expérience complémentaire

On réalise le montage de la figure 11, constitué d'un générateur délivrant une tension continue  $E$  réglable, d'un condensateur de très grande capacité  $C$ , d'un petit moteur électrique  $M$  et d'un commutateur  $K$ .

On place le commutateur  $K$  dans la position 1 puis on le bascule sur la position 2, le moteur se met à tourner, puis s'arrête spontanément.

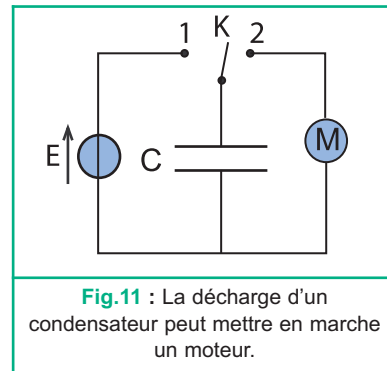


Fig.11 : La décharge d'un condensateur peut mettre en marche un moteur.

#### Questions

- 1°) Qu'est ce qui montre, dans cette expérience, que le condensateur est un réservoir d'énergie?
- 2°) Quelle est l'opération avec laquelle le condensateur est devenu ce réservoir d'énergie?
- 3°) Expliquer la petite durée de rotation du moteur.

#### Conclusion

Le condensateur est un réservoir d'énergie potentielle électrique (ou électrostatique).

Cette énergie se manifeste, lors de la décharge du condensateur, en se transformant en énergie thermique dans les différents conducteurs, en énergie cinétique dans un moteur, en énergie lumineuse dans une diode LED par exemple...

### 7.2- EXPRESSION DE L'ÉNERGIE EMMAGASINÉE

L'énergie électrostatique emmagasinée par un condensateur de capacité  $C$ , chargé sous une tension  $u$ , s'exprime par :

$$E_c = \frac{1}{2} C u^2$$

Avec  $C$  en farad et  $u$  en volt,  $E_c$  s'exprime en joule.

En utilisant la relation  $q = C.u$ , on obtient d'autres expressions de  $E_c$  soit :

$$E_c = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} q u$$

# LE DIPÔLE RC

Le dipôle RC est constitué d'un résistor de résistance  $R$  associé en série avec un condensateur de capacité  $C$ . On se propose d'étudier la variation de la charge  $q$  du condensateur en fonction du temps ; lorsque la tension aux bornes du dipôle RC passe brusquement de zéro à une valeur constante  $E$ . L'évolution brusque de la tension constitue l'échelon de tension.

## 1 RÉPONSE D'UN DIPÔLE RC À UN ÉCHELON DE TENSION

### 1.1- ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

#### Manipulation

On réalise le montage de la figure 12 avec un condensateur de capacité  $C$ , un résistor de résistance  $R$  et un générateur de tension continue montés tous en série. Les deux entrées  $Y_1$  et  $Y_2$  d'un oscilloscope numérique à mémoire sont branchées comme c'est indiqué sur la figure 13.

En mettant le commutateur dans la position 1, l'oscilloscope enregistre les oscillogrammes de la figure 14 traduisant les variations de la tension  $u$  délivrée par le générateur et la tension  $u_c$  aux bornes du condensateur.

#### Questions

- 1°) Identifier la courbe obtenue sur la voie  $Y_1$  de l'oscilloscope et celle obtenue sur la voie  $Y_2$ .
- 2°) La charge du condensateur est-elle instantanée ?

#### Interprétation

Avant la fermeture du circuit la tension aux bornes du condensateur est nulle. Lorsque le commutateur  $K$  est fermé dans la position 1, le générateur fournit la tension constante  $E$  au dipôle RC ; donc  $u_{DB} = E$ .

La tension  $u_{AB}$  aux bornes du condensateur croît progressivement jusqu'à devenir égale à  $E$ . Comme  $q = Cu_{AB}$ , la charge du condensateur évolue de manière similaire à  $u_{AB}$ .

#### Conclusion

La réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension est la charge du condensateur. N'étant pas instantanée, celle-ci constitue un phénomène transitoire.

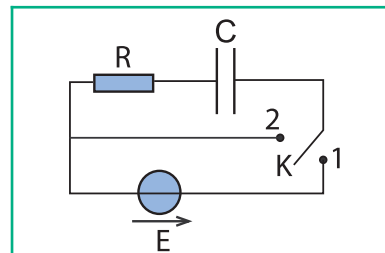


Fig.12 : Montage de réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension

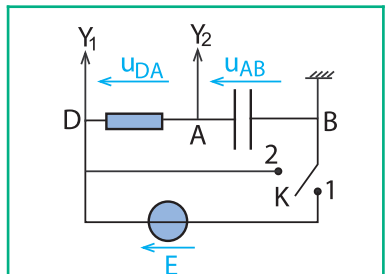


Fig.13 : Montage de visualisation de la réponse d'un dipôle RC

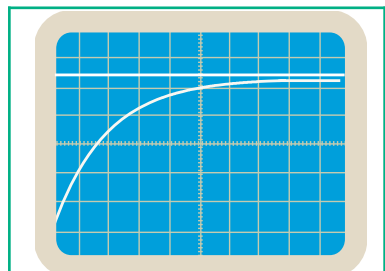


Fig.14 : Evolution de la réponse en tension au cours du temps

## 1.2- ÉTUDE THÉORIQUE

### Mise en équation

En régime transitoire et pendant que le condensateur se charge, le circuit de la figure 12 est équivalent à celui de la figure 15. Appliquons la loi des mailles à ce circuit :

$$u_{DA} + u_{AB} - E = 0, \text{ soit : } Ri + u_c - E = 0.$$

$$\text{Or, } i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}, \text{ d'où : } u_c + RC \frac{du_c}{dt} = E \quad (1)$$

$$\text{ou bien : } \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = \frac{E}{\tau} \text{ avec } \tau = RC, \quad (1)'$$

équation différentielle en  $u_c$  avec second membre non nul.

Avec  $u_c = \frac{q}{C}$  et  $i = \frac{dq}{dt}$ , la même équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau} q = \frac{E}{R} \quad (2) \text{ ou } i + \frac{1}{\tau} \int i dt = \frac{E}{R} \quad (3).$$

### Expression de $u_c(t)$

La solution de l'équation différentielle (1)' est de la forme :

$u_c(t) = Ae^{-\alpha t} + B$  où  $A$ ,  $B$  et  $\alpha$  sont des constantes à déterminer  
 $A t = 0, u_c(t = 0) = A + B = 0$ , d'où  $B = -A$ .

Il vient :  $u_c(t) = A(e^{-\alpha t} - 1)$ .

La dérivée de  $u_c(t)$  par rapport au temps s'écrit :  $\frac{du_c}{dt} = -\alpha A e^{-\alpha t}$ .

En remplaçant  $\frac{du_c}{dt}$  par son expression dans l'équation (1),

$$\text{on trouve : } A(e^{-\alpha t} - 1) - \alpha \tau A e^{-\alpha t} = E ;$$

$$\text{ce qui donne : } -A + (1 - \alpha \tau) A e^{-\alpha t} = E.$$

En égalisant membre à membre cette équation qui doit être satisfaite pour toute valeur de  $t$ , on obtient :

$$A = -E \text{ et } 1 - \alpha \tau = 0 \text{ d'où } \alpha = \frac{1}{\tau}.$$

Ainsi, avec  $A = -E$  et  $\alpha = \frac{1}{\tau}$ , la tension aux bornes du condensateur s'écrit :

$$u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

La courbe représentative de la fonction  $u_c(t)$  est celle de la figure 16.

### Remarque

En l'absence d'oscilloscope à mémoire ou d'un système informatique d'acquisition de données, on peut utiliser dans le montage de la figure 12 un générateur basse fréquence à la place du générateur de tension continue.

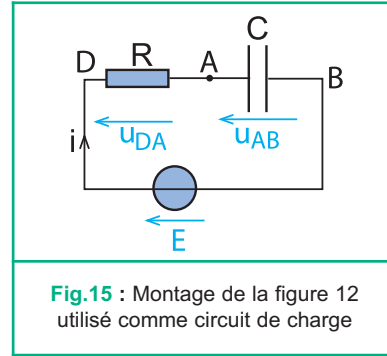


Fig.15 : Montage de la figure 12 utilisé comme circuit de charge

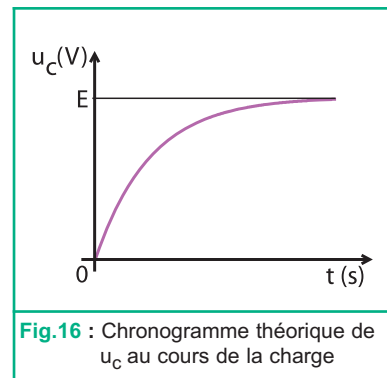


Fig.16 : Chronogramme théorique de  $u_c$  au cours de la charge

### Expression de $q(t)$

L'expression de la charge  $q$  du condensateur est  $q(t) = C \cdot u_c(t)$ ,  
d'où :  $q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  avec  $Q_0 = CE$ .

La courbe d'évolution de la charge  $q(t)$  présente une allure analogue à celle de  $u_c(t)$  (Fig.17). Lorsque  $t$  tend vers l'infini  $u_c(t)$  tend vers  $E$  et  $q$  vers  $Q_0$ , le condensateur porte sa charge maximale.

### Expression de $i(t)$

On a  $i = \frac{dq}{dt}$ . En remplaçant  $q$  par son expression,

on trouve  $i(t) = \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$  ou encore :

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } I_0 = \frac{E}{R}$$

La courbe de la figure 18 représente la variation de l'intensité  $i(t)$  du courant, dans le circuit, au cours du temps. L'intensité  $i$  du courant est alors positive au cours de la charge du condensateur, résultat attendu du fait que le sens positif du courant est orienté vers l'armature située dans le circuit de côté du pôle positif du générateur.

On peut visualiser simultanément l'évolution de la tension  $u_c(t)$  et l'intensité  $i(t)$  lors de la charge en réalisant l'expérience de la figure 19 avec un montage comprenant un générateur de tension à masse flottante (ou branché au secteur via un transformateur d'isolement), de f.e.m.  $E$ , un interrupteur  $K$  et un dipôle RC associés en série. À l'aide de l'interrupteur  $K$  on ferme le circuit. Un oscilloscope à mémoire permet d'enregistrer:

- sur la voie  $Y_1$ , la tension  $u_{DA} = Ri$  aux bornes du résistor.
- sur la voie  $Y_2$ , la tension  $u_{AB}$  aux bornes du condensateur au lieu de  $u_{BA}$  et ce, en appuyant sur le bouton **INV**.

On obtient ainsi les oscillogrammes (1) et (2) de la figure 20.

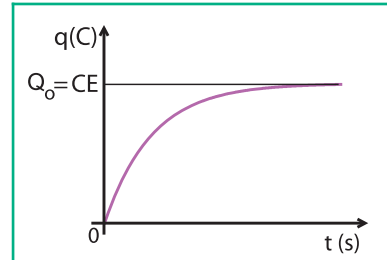


Fig.17 : Chronogramme théorique de  $q$  au cours de la charge

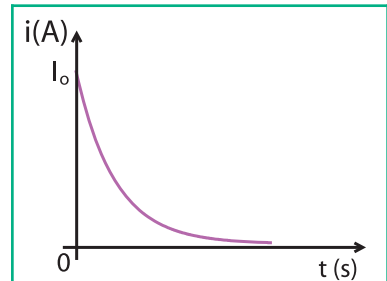


Fig.18 : Chronogramme théorique de  $i$  au cours de la charge

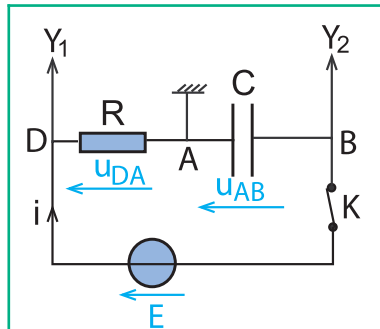


Fig.19 : Branchement pour visualiser simultanément  $U_c(t)$  et  $i(t)$

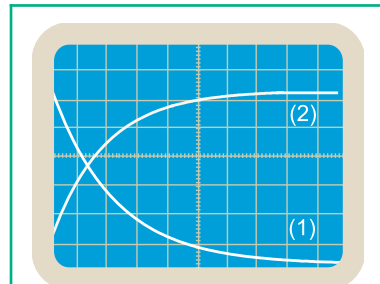


Fig.20 : Chronogrammes de  $U_c$  et de  $u_R$

### Questions

Dans la figure 20, montrer que l'oscillogramme (1) représente la tension  $u_{DA}$  aux bornes du résistor et que l'oscillogramme (2) représente la tension  $u_{AB}$  aux bornes du condensateur.

## 2 DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR DANS UN RÉSISTOR

### 2.1- ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

#### Manipulation

On reprend le montage de la figure 13. Le condensateur est préalablement chargé et la tension à ses bornes est supposée égale à  $E$ , on bascule le commutateur dans la position 2. Le condensateur se trouve directement fermé sur le résistor de résistance  $R$ .

Sur la voie  $Y_2$  de l'oscilloscope à mémoire, on enregistre l'oscillogramme de la figure 21 traduisant l'évolution de  $u_C(t)$ .

#### Questions

- 1°) Expliquer l'allure de  $u_C(t)$ .
- 2°) La décharge du condensateur est-elle instantanée?

#### Interprétation

Avant la mise du commutateur  $K$  dans la position 2, la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur était égale à  $E$ . Par la suite,  $u_C$  décroît du fait que l'énergie emmagasinée par le condensateur, pendant la charge, est progressivement dissipée dans le résistor. La tension  $u_C$  décroît jusqu'à s'annuler.

Comme  $q = Cu_C$ , la charge du condensateur évolue, au cours du temps, de la même manière que  $u_C$ . La charge électrique  $q(t)$  s'annule lorsque le condensateur est complètement déchargé.

#### Conclusion

Dans un dipôle RC, un condensateur chargé se décharge progressivement dans le résistor.

### 2.2- ÉTUDE THÉORIQUE

#### Mise en équation

Le condensateur étant initialement chargé, à l'instant  $t = 0$ , la tension à ses bornes est égale à  $E$ . Le circuit est équivalent à celui de la figure 22.

Avec l'orientation choisie pour le circuit, on peut écrire :

$$u_C + u_R = 0 \text{ et } u_R = Ri \text{ d'où } u_C + Ri = 0.$$

$$\text{Or, } i = \frac{dq}{dt} \text{ et } q = Cu_C, \text{ on aura :}$$

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = 0 \text{ ou bien } \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0 \quad (4).$$

On obtient une équation différentielle en  $u_C$  sans second membre.

On obtient aussi les équations différentielles (5) et (6) respectivement en  $q$  et en  $i$  :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{\tau} q = 0 \quad (5) ; i + \frac{1}{\tau} \int i dt = 0 \quad (6).$$

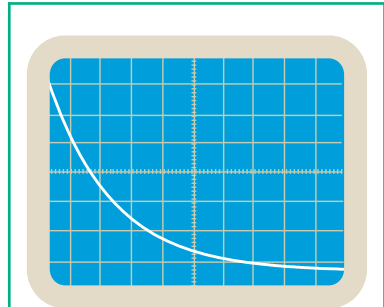


Fig.21 : Chronogramme de  $u_C$  au cours de la décharge

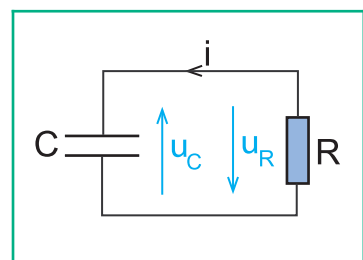


Fig.22 : Montage de la figure 12 utilisé comme circuit de décharge

### Expression de $u_C(t)$

La solution de l'équation différentielle (4) est de la forme :

$u_C(t) = A e^{-\alpha t}$  où les constantes  $A$  et  $\alpha$  sont déterminées par les conditions initiales :  $A t = 0, u_C = E$ , d'où  $A = E$ .

En remplaçant  $u_C$  et  $\frac{du_C}{dt}$  par leurs expressions dans (4),

on obtient :  $-\alpha A e^{-\alpha t} + \frac{1}{\tau} A e^{-\alpha t} = 0$ , ce qui entraîne :

$$\left(-\alpha + \frac{1}{\tau}\right) A e^{-\alpha t} = 0 \quad \forall t. \text{ D'où } -\alpha + \frac{1}{\tau} = 0, \text{ ce qui donne : } \alpha = \frac{1}{\tau}.$$

Il vient finalement :  $u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$

La courbe représentative de la fonction  $u_C(t)$  au cours de la décharge est celle de la figure 23.

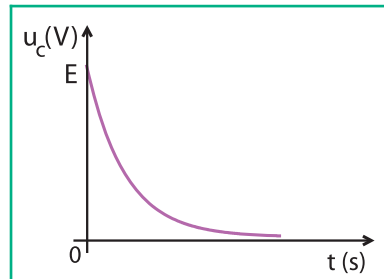


Fig.23 : Chronogramme théorique de  $u_C$  au cours de la décharge

### Expression de $q(t)$

L'évolution de la charge  $q$  du condensateur au cours du temps est donnée par la relation  $q(t) = C u_C(t)$ . D'où :

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } Q_0 = CE$$

La courbe  $q(t)$  présente une allure analogue à celle de  $u_C(t)$  (Fig.24). Lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $q$  tend vers zéro ; le condensateur est déchargé.

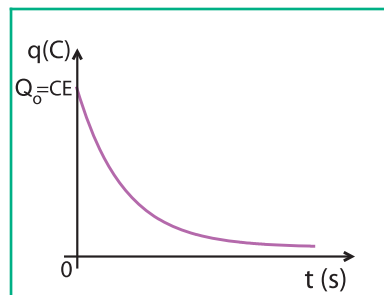


Fig.24 : Chronogramme théorique de  $q$  au cours de la décharge

### Expression de $i(t)$

On a :  $i = \frac{dq}{dt}$ , donc :  $i(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$  ou encore :

$$i(t) = -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } I_0 = \frac{E}{R}.$$

On note bien pour  $i(t)$  le signe contraire de celui de l'intensité du courant de charge, c'est à dire que le courant de décharge circule dans le sens contraire de celui de charge (Fig.25).

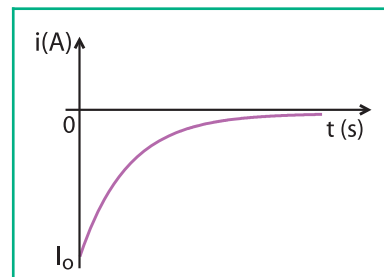


Fig.25 : Chronogramme théorique de  $i$  au cours de la décharge



## Remarque

On peut visualiser simultanément l'évolution de la tension  $u_C(t)$  et l'intensité  $i(t)$  lors de la décharge en réalisant l'expérience de la figure 26.

Le montage comprend un générateur<sup>⊙</sup> de tension de f.e.m.  $E$  pour charger au préalable le condensateur, un dipôle RC et un commutateur  $K$ .

⊙ Pour que l'opération soit possible, le générateur doit être à masse flottante.

Le condensateur ayant été chargé, on bascule le commutateur  $K$  sur la position 2. Un oscilloscope à mémoire permet d'enregistrer :

- sur la voie  $Y_1$ , l'oscillogramme (1) de la figure 27 qui représente la tension  $u_{DA}$  aux bornes du résistor, positive lors de la charge, est devenue négative.

- sur la voie  $Y_2$ , l'oscillogramme (2) de la figure 27 qui représente la tension  $u_{AB}$  aux bornes du condensateur qui n'est autre que la tension  $u_{BA}$  changée de signe. Cette tension  $u_{AB}$ , tout en restant positive, diminue progressivement jusqu'à s'annuler.

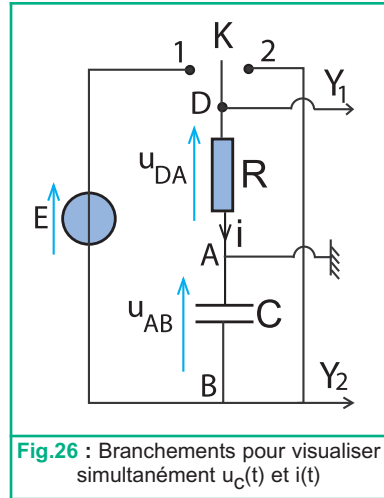


Fig.26 : Branchements pour visualiser simultanément  $u_C(t)$  et  $i(t)$

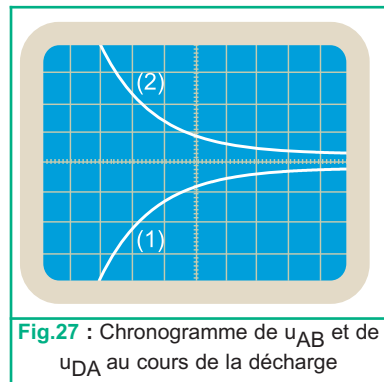


Fig.27 : Chronogramme de  $u_{AB}$  et de  $u_{DA}$  au cours de la décharge

## 3

## INFLUENCE DES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES D'UN DIPÔLE RC SUR LA DURÉE DE CHARGE OU DE DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR

### 3.1- INFLUENCE DE LA RÉSISTANCE R

#### Manipulation

On reprend le montage de la figure 13, mais en reliant le point B à la masse de l'oscilloscope à mémoire, le point A à son entrée  $Y_1$  (Fig.28) afin de visualiser  $u_C(t)$  et le point D à son entrée  $Y_2$  afin de visualiser  $u_{DB}(t)$ .

En chargeant le même condensateur plusieurs fois avec le générateur de f.e.m  $E = 6$  V, mais en l'associant à chaque fois avec un résistor différent des autres, on obtient une série d'oscillogrammes comme celles de la figure 29 visualisés avec  $C = 1\mu\text{F}$  et respectivement avec  $R_1 = 5$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 10$  k $\Omega$ ,  $R_3 = 15$  k $\Omega$ ,  $R_4 = 20$  k $\Omega$  ; les sensibilités étant réglées horizontalement à 5 ms /div et verticalement à 1 V/div.

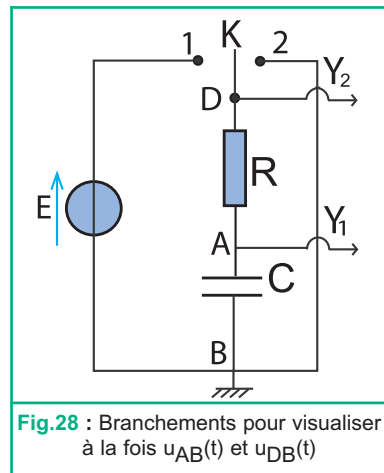
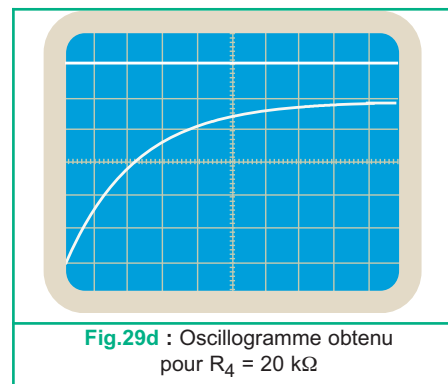
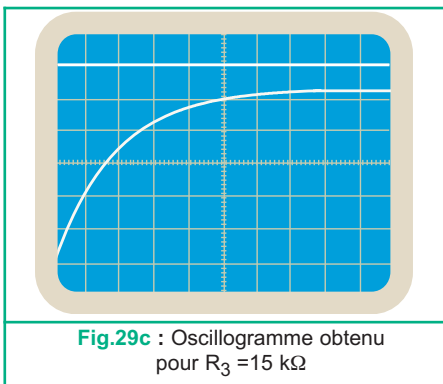
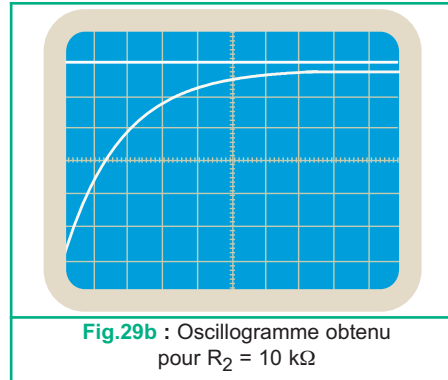
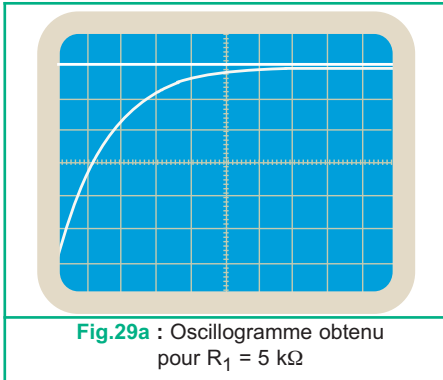


Fig.28 : Branchements pour visualiser à la fois  $u_{AB}(t)$  et  $u_{DB}(t)$



### Questions

1°) Dresser un tableau consignnant les durées  $t$  au bout des quelles la tension  $u_C(t)$  a atteint la valeur 4V par exemple.

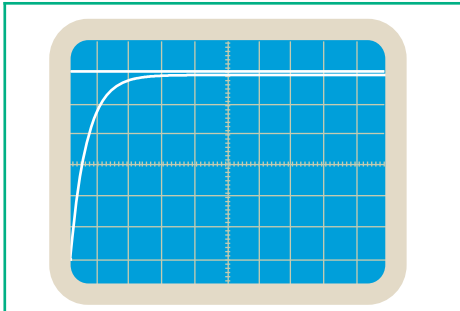
R (kΩ)	5	10	15	20
t (ms)				

2°) À l'aide des résultats trouvés :

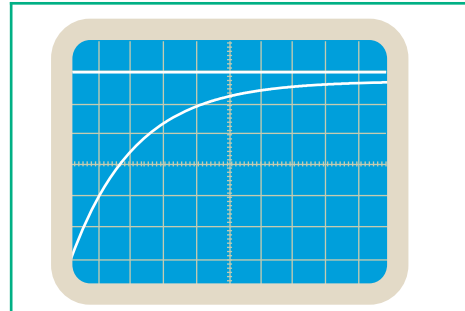
- ♦ préciser qualitativement l'influence de la valeur de la résistance sur la durée  $t$  de la charge du condensateur.
- ♦ montrer que la durée  $t$  est proportionnelle à  $R$ .

### 3.2- INFLUENCE DE LA CAPACITÉ C

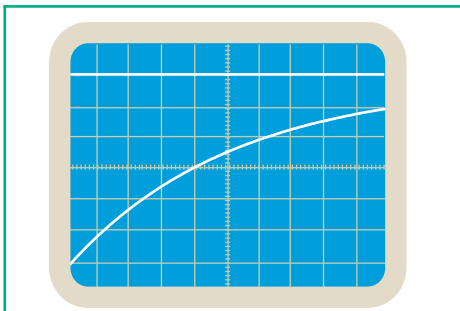
On refait la même expérience, mais cette fois avec des condensateurs de capacités différentes associés respectivement avec le même résistor; on obtient alors les oscillogrammes de la figure 30 avec  $R = 10 \text{ k}\Omega$  et respectivement avec  $C_1 = 0,5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 5 \mu\text{F}$  et  $C_4 = 10 \mu\text{F}$ ; la sensibilité verticale étant maintenue toujours à la valeur 1V/div.



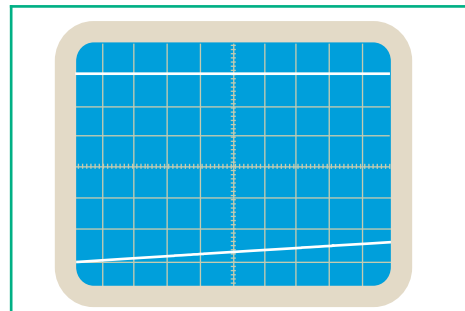
**Fig.30a:**Oscillogramme obtenu pour  $C = 0,5 \mu\text{F}$  avec une sensibilité horizontale de 5ms/div



**Fig.30b:**Oscillogramme obtenu pour  $C = 2 \mu\text{F}$  avec une sensibilité horizontale de 5 ms/div



**Fig.30c :** Oscillogramme obtenu pour  $C = 5 \mu\text{F}$  avec une sensibilité horizontale de 50 ms/div



**Fig.30d:**Oscillogramme obtenu pour  $C = 10 \mu\text{F}$  avec une sensibilité horizontale de 50 ms/div

### Questions

1°) Dresser un tableau consignait les durées  $t$  au bout desquelles la tension  $u_C(t)$  a atteint la valeur 4V par exemple.

<b>C(μF)</b>	0,5	2	5	10
<b>t (ms)</b>				

2°) À l'aide des résultats trouvés :

- ♦ préciser qualitativement l'influence de la valeur de la capacité  $C$  du condensateur sur la durée  $t$  de sa charge.
- ♦ montrer que la durée  $t$  est proportionnelle à la capacité  $C$ .

### Remarque

Les mêmes expériences, faites avec la décharge d'un condensateur, conduisent aux mêmes résultats.

### 3.3- CONSTANTE DE TEMPS D'UN DIPÔLE RC

#### Notion de constante de temps

On vient de montrer que toute valeur de la charge  $q$  d'un condensateur est atteinte au bout d'une durée  $t$  :

- proportionnelle à  $R$  lorsque  $C$  est gardée constante;
- proportionnelle à  $C$  lorsque  $R$  est gardée constante.

Donc, la durée de charge ou de décharge est proportionnelle au produit  $RC$ , ce qui confère à ce produit la dénomination de constante de temps, notée  $\tau$ .

On sait que  $R$  a la dimension du quotient d'une tension par une intensité de courant et  $C$  a la dimension du quotient d'une charge par une tension. Donc, le produit  $RC$  a la dimension d'une charge par une intensité, c'est-à-dire un temps, ce qui justifie encore sa dénomination de constante de temps.

$$\tau = RC : \text{constante de temps}$$

#### Question

Tant au cours de la charge qu'au cours de la décharge,  $u_c(t)$  est une fonction exponentielle du temps d'exposant  $(-\frac{t}{\tau})$ . En déduire que  $\tau = RC$  ne peut avoir effectivement que la dimension d'un temps.

#### Définition

La constante de temps  $\tau$  est une grandeur caractéristique du dipôle RC, elle renseigne sur la rapidité avec laquelle s'établit la tension  $u_c = E$  entre les armatures du condensateur. La charge et la décharge du condensateur sont d'autant plus rapides que la constante de temps  $\tau$  est plus petite.

#### Détermination de la constante de temps $\tau$

##### ♦ Par calcul direct

Connaissant les valeurs de  $C$  et de  $R$ , on peut calculer directement la valeur de la constante de temps  $\tau = RC$ .

##### ♦ Détermination graphique (première méthode)

Pour déterminer  $\tau$ , on trace la tangente à la courbe de charge ou de décharge  $u_c(t)$  au point d'abscisse  $t = 0$ .

Cette tangente a pour équation  $u_c = a t$ ,  $a$  étant son coefficient directeur dont la valeur est donnée par :

$$a = \left( \frac{du_c}{dt} \right)_{t=0} . \text{ Or : } \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ alors } \left( \frac{du_c}{dt} \right)_{t=0} = \frac{E}{\tau} = a$$

Finalement, l'équation de la tangente s'écrit :  $u_c = E \frac{t}{\tau}$ .

L'intersection de cette tangente avec la droite  $u_c = E$  donne  $t = \tau$  (fig.31).

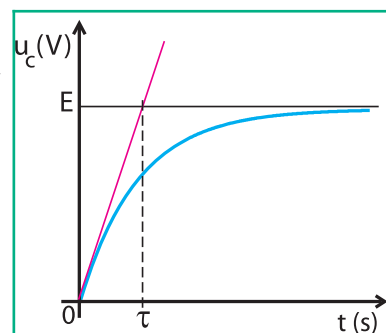


Fig.31 : Détermination de  $\tau$  à partir de la courbe de charge

### Remarque

La même méthode de détermination graphique de  $\tau$  s'applique à la courbe de décharge. L'intersection de la tangente à la courbe  $u_C(t)$  à l'origine avec l'axe des abscisses donne  $t = \tau$  (fig.32).

### ♦ Détermination graphique (deuxième méthode)

Dans le cas de la charge du condensateur, en remplaçant  $t$  par  $\tau$  dans l'expression de  $u_C(t)$ , on obtient :

$$u_C = E(1 - e^{-1}) = 0,63 E.$$

Donc, par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe  $u_C(t)$  d'ordonnée  $0,63E$ , on obtient la valeur de  $\tau$  (Fig.33).

$\tau$  correspond donc au temps nécessaire pour charger un condensateur à 63%.

Dans le cas de la décharge, en remplaçant  $t$  par  $\tau$  dans l'expression de  $u_C(t)$ , on obtient  $u_C = E e^{-1} = 0,37E$ .

$\tau$  est alors l'abscisse du point de la courbe  $u_C(t)$  d'ordonnée  $0,37E$  (Fig.34).

### Remarque

On peut déterminer  $\tau$  en traçant la tangente à la courbe  $i(t)$  au point d'abscisse  $t = 0$ .

### Question

Montrer que l'intersection de la tangente à la courbe  $i(t)$  avec l'axe des abscisses donne  $t = \tau$  (Fig.35a et Fig.35b)

### Intérêt pratique de la constante de temps $\tau$

La tension  $u_C$  aux bornes du condensateur, étant donnée par l'expression  $u_C(t) = E (1 - e^{-t/\tau})$  pendant la charge et par l'expression  $u_C(t) = E e^{-t/\tau}$  pendant la décharge, atteint respectivement les valeurs  $u_C = E$  et  $u_C = 0$  au bout des durées  $t$  infinies respectivement de charge et de décharge, ce qui n'est pas physiquement pratique.

On admet alors que le condensateur est complètement chargé ou déchargé quand la différence relative entre la valeur atteinte par  $u_C$  et la valeur asymptotique  $E$  (pour la charge) ou zéro (pour la décharge) ne dépasse pas 1%.

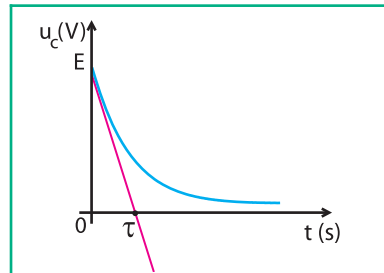


Fig.32 : Détermination de  $\tau$  à partir de la courbe de décharge

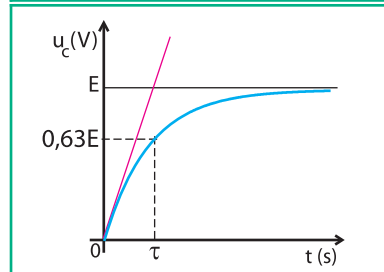


Fig.33 : Détermination de  $\tau$  par lecture directe sur la courbe de charge

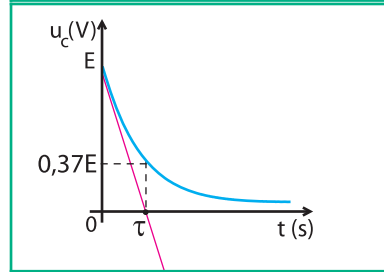


Fig.34 : Détermination de  $\tau$  par lecture directe sur la courbe de décharge

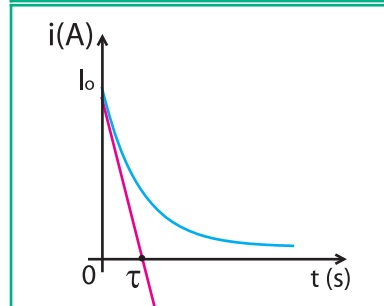


Fig.35a : Méthode de la tangente à l'origine (charge)

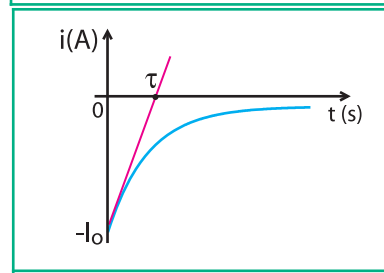


Fig.35b : Méthode de la tangente à l'origine (décharge)

Pour la charge par exemple :

$$\frac{E - u_C}{E} \leq 1\% \text{ ce qui signifie que } E - u_C \leq 0,01 E \text{ d'où } u_C \geq 0,99 E.$$

$$\text{Or, } u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

$$\text{Donc, pour } t_c = t_{\text{charge}}, \text{ on a : } 0,99E = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\text{d'où } 0,99 = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \text{ ce qui entraine } e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,01,$$

$$\text{d'où } \text{Log } e^{-\frac{t}{\tau}} = \text{Log } 0,01 \text{ ou bien } \frac{t}{\tau} = 2\text{Log}10 = 4,6, \text{ d'où } t_c \simeq 5\tau.$$

Quand l'étude se veut plus précise, on exige une erreur relative ne dépassant pas 1‰. Avec un calcul semblable au précédent, on aboutit à  $t_c = 6,9 \tau \simeq 7 \tau$  pour avoir  $u_C = 0,999E$ .

### Question

Montrer que les mêmes durées  $4,6 \tau$  et  $6,9 \tau$  sont indispensables pour décharger complètement un condensateur respectivement à 1‰ et à 1‰ près.

### Récapitulation

	Durée t	0	$\tau$	$4,6 \tau$	$6,9 \tau$
Charge	$u_C$	0	0,63 E	0,99 E	0,999 E
Décharge	$u_C$	E	0,37 E	0,01 E	0,001 E

# L'essentiel

■ Un condensateur est un ensemble de deux plaques conductrices séparées par un isolant. Il se charge lorsqu'on établit entre ses bornes une tension continue et se décharge lorsqu'on le ferme sur un récepteur.

■ En désignant par  $q$  la charge portée par l'armature du condensateur vers laquelle est orienté le sens positif du courant, on a :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

■ La capacité  $C$  est une grandeur mesurable caractérisant la faculté d'un condensateur à stocker une charge  $q$  sous une tension  $u$  :

$$q = C \cdot u$$

■ La capacité  $C$  d'un condensateur plan est proportionnelle à la surface  $S$  en regard des armatures et inversement proportionnelle à la distance  $e$  qui les sépare :

$$C = \epsilon \cdot \frac{S}{e}$$

où  $\epsilon$  est la permittivité absolue du diélectrique.

■ Sous une tension  $u$ , un condensateur de capacité  $C$  emmagasine une énergie potentielle électrique :

$$E_c = \frac{1}{2} C u^2$$

■ Toute décharge d'un condensateur s'explique par une restitution d'énergie emmagasinée.

■ Un dipôle RC soumis à un échelon de tension  $E$  répond par une évolution de la tension  $u_c$  aux bornes du condensateur régie par la loi :

$$u_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

où  $\tau = RC$  est la constante de temps du dipôle.

■ Quand un dipôle RC chargé est fermé sur lui même, la tension  $u_c$  aux bornes du condensateur, initialement égale à  $E$ , évolue selon la loi :

$$u_c(t) = E e^{-t/\tau}$$

■ La constante de temps  $\tau = RC$  renseigne sur la rapidité de la charge et de la décharge du condensateur.

# Exercices

## Exercice résolu

### ÉNONCÉ

Pour étudier la charge d'un condensateur ou sa décharge dans un résistor, on réalise le montage de la figure 1.

À l'aide d'un ordinateur, d'un capteur et d'une interface de saisie de données, on suit l'évolution temporelle de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur.

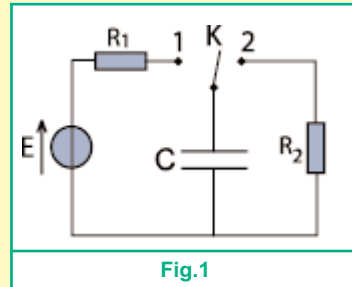


Fig.1

1°) En plaçant le commutateur dans la position 1, on obtient la courbe  $u_C(t)$  de la figure 2.

a- Interpréter l'allure de la courbe  $u_C(t)$  de la figure 2.

b- Déterminer graphiquement le temps mis par le condensateur pour se charger.

Pour cela on suppose que le condensateur est complètement chargé quand  $u_C = E$  à 1% près.

2°) On bascule le commutateur dans la position 2, le condensateur se décharge complètement dans le résistor de résistance  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$  au bout d'une durée  $t = 250 \text{ ms}$ . La courbe de décharge  $u_C(t)$  est représentée sur la figure 3.

a- Interpréter l'allure de la courbe  $u_C(t)$  obtenue lors de la décharge du condensateur à travers le résistor de résistance  $R_2$ .

b- Déterminer graphiquement la constante de temps  $\tau_2$  et en déduire la valeur de la capacité  $C$  du condensateur.

3°) Déterminer la valeur de la résistance  $R_1$ .

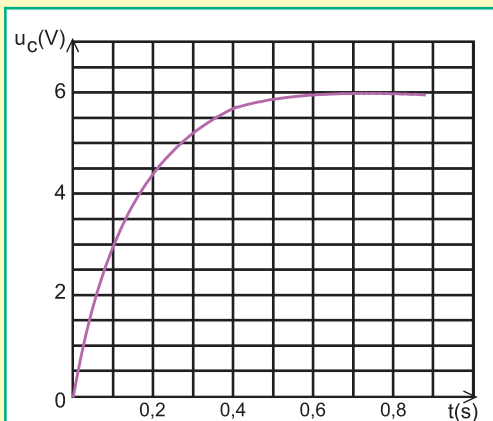


Fig.2

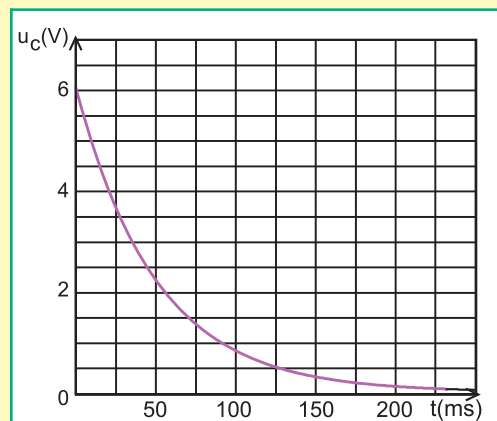


Fig.3



**SOLUTION**

1°) a) Quand le commutateur K est en position 1, c'est le circuit schématisé ci-contre qui est fermé.

Dans ce cas, la loi des mailles s'écrit :  $u_C + u_{R_1} - E = 0$ .

Avec  $u_{R_1} = R_1 i$ ,  $u_C = \frac{q}{C}$  et  $i = \frac{dq}{dt}$ .

On a :  $\tau_1 \frac{du_C}{dt} + u_C = E$ , où  $\tau_1 = R_1 C$ .

On sait qu'une telle équation différentielle admet comme solution :

$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau_1})$ . A l'instant  $t = 0$ ,  $e^{-t/\tau_1} = 1$ , donc  $u_C = 0$ .

Quand  $t$  tend vers l'infini,  $u_C$  augmente exponentiellement pour atteindre la valeur  $E$ , ce qui explique l'allure de la courbe de charge

b) Soit  $\theta$  la durée au bout de laquelle le condensateur est complètement chargé.

A  $t = \theta$ ,  $u_C \simeq E$  à 1% près, c'est-à-dire  $u_C = 0,99 E$ .

Or  $u_C(\theta) = E(1 - e^{-\theta/\tau_1})$ , on a donc :  $0,99 E = E(1 - e^{-\theta/\tau_1})$ ,

ce qui donne  $\frac{\theta}{\tau_1} = 2 \log 10$ , d'où :  $\theta = 4,6 \tau_1 \simeq 5 \tau_1$ .

En conséquence, déterminer graphiquement  $\theta$  revient à déterminer  $\tau_1$ .

On trace alors la tangente à la courbe de charge (Fig 2) au point d'abscisse  $t = 0$ , puis on projette son intersection P avec l'asymptote  $u = E$  sur l'axe des temps comme il est indiqué dans la figure ci-contre.

On obtient alors,  $\tau_1 = 0,1$  s. Donc  $\theta = 0,5$  s.

2°) a) Quand le commutateur K est en position 2, c'est le circuit schématisé ci-contre qui est fermé. Dans ce cas la loi des mailles s'écrit :  $u_C + u_{R_2} = 0$ .

Avec le même sens positif du courant, utilisé dans la question 1 - a,

on a :  $\frac{q}{C} + R_2 i = 0$  avec  $i = \frac{dq}{dt}$ .

Ce qui donne :  $\tau_2 \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ , où  $\tau_2 = R_2 C$ .

On sait qu'une telle équation différentielle admet comme solution :

$u_C(t) = E \cdot e^{-t/\tau_2}$ . A l'instant  $t = 0$ ,  $e^{-t/\tau_2} = 1$ , donc  $u_C = E$ .

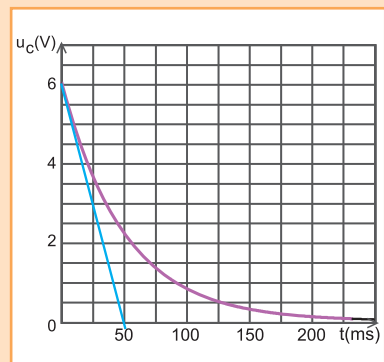
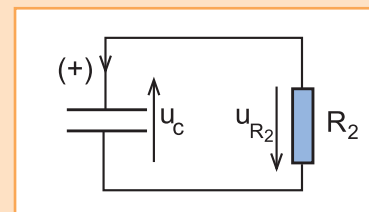
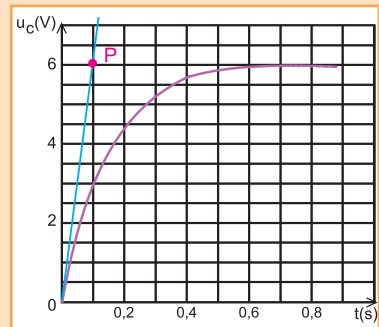
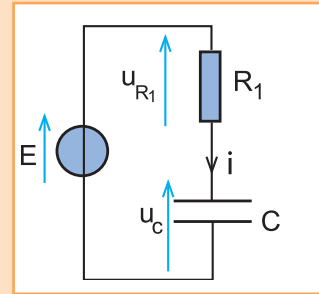
Quand  $t$  tend vers l'infini,  $u_C$  diminue exponentiellement vers zéro, ce qui explique l'allure de la courbe de décharge.

b) Le traçage de la tangente à la courbe de décharge de la figure 3,

donne :  $\tau_2 = 50$  ms. Or,  $\tau_2 = R_2 C$ , d'où  $C = \frac{\tau_2}{R_2}$ .

Soit, numériquement  $C = 50 \mu\text{F}$ .

3°) On a  $\tau_1 = R_1 C$ . d'où  $R_1 = \frac{\tau_1}{C}$ . Soit, numériquement  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ .



# Exercices à résoudre

## Tests rapides des acquis

### 1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

1°) Un condensateur chargé sous une tension  $U$  emmagasine une charge  $q = CU$ .

2°) Un condensateur est caractérisé par sa capacité  $C$ .

3°) Un condensateur ne restitue jamais la même quantité d'énergie emmagasinée.

4°) L'intensité  $i$  du courant est liée à la charge du condensateur par la relation :  $i = \frac{dq}{dt}$ .

5°) Au cours de la charge d'un condensateur, initialement déchargé, l'intensité  $i$  du courant est maximale au début et nulle à la fin.

6°) L'intensité maximale du courant de charge est :  $\frac{E}{R}$ .

7°) Au début de la décharge, l'intensité du courant est nulle.

8°) Pour déterminer la constante de temps  $\tau = RC$ , il suffit de tracer la tangente à l'origine de la courbe de décharge  $u_C(t)$  au point d'abscisse  $t = 0$  et de relever les coordonnées de son intersection avec l'axe des abscisses.

9°) Un condensateur de charge  $2q$  emmagasine l'énergie :  $E_C = \frac{q^2}{2C}$ .

### 2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la proposition juste.

■ I- Un condensateur chargé pendant 5s avec un générateur de courant d'intensité  $I = 1,2$  mA, emmagasine une charge  $Q$  égale à :

- a-  $8 \cdot 10^{-3}$  C ;
- b-  $6 \cdot 10^{-3}$  C ;
- c-  $5 \cdot 10^{-3}$  C.

■ II- La charge  $q$  portée par chacune des armatures d'un condensateur de capacité  $C$  sous une tension  $u$  est quadruplée quand :

a- il est chargé sous une tension 2 fois plus grande que  $u$ .

b- il est chargé sous une tension 4 fois plus grande que  $u$ .

c- il a une capacité 4 fois plus petite que  $C$ .

■ III- La constante de temps d'un circuit comportant un condensateur de capacité  $C = 10$   $\mu$ F et un résistor de résistance  $R$  vaut 2ms. La valeur de la résistance  $R$  est :

- a- 20  $\Omega$  ;
- b- 200  $\Omega$  ;
- c- 2000  $\Omega$ .

■ IV- La constante de temps  $\tau$  d'un dipôle RC, est la durée au bout de laquelle le condensateur est :

- a- complètement chargé ;
- b- à moitié chargé ;
- c- chargé à 63%.

■ V- Quand on se propose de ralentir la décharge d'un condensateur de capacité  $C$  dans un conducteur ohmique de résistance  $R$  réglable, on doit :

a- diminuer  $R$  ;

b- augmenter la constante de temps tout en augmentant  $R$  ;

c- diminuer la constante de temps tout en diminuant  $R$ .

■ VI- L'énergie emmagasinée par un condensateur portant une charge  $q$  est doublée quand on double :

a- la charge  $q$  ;

b- la capacité  $C$  ;

c- la tension  $u$  à ses bornes.

## Exercices d'application

**3** Un condensateur plan est formé par deux feuilles en aluminium, de surface en regard  $S = 1 \text{ m}^2$ , séparées par un isolant de permittivité relative  $\epsilon_r = 8$  et d'épaisseur  $e = 0,1 \text{ mm}$ .

1°) Calculer la capacité  $C$  du condensateur.

2°) Le condensateur est chargé sous une tension de  $50 \text{ V}$ , calculer l'énergie qui y est emmagasinée.

**4** On charge un condensateur de capacité  $C = 20 \text{ }\mu\text{F}$ , initialement non chargé, avec un générateur de courant d'intensité  $I = 1,8 \text{ }\mu\text{A}$ .

1°) Déterminer la charge  $q$  acquise par le condensateur lorsque le circuit reste fermé pendant 10 secondes.

2°) Déterminer :

a- la tension  $u_{AB}$  aux bornes du condensateur à l'instant  $t = 10 \text{ s}$ .

b- L'énergie emmagasinée par le condensateur au bout de  $t = 10 \text{ s}$ .

**5** Un condensateur de capacité  $C = 3 \text{ }\mu\text{F}$  se charge à travers un résistor de résistance  $R = 80 \text{ k}\Omega$  à l'aide d'un générateur de tension continue de f.e.m.  $E = 12 \text{ V}$ .

1°) Déterminer la valeur de la constante de temps  $\tau$  du dipôle RC.

2°) a) Après une durée de 2 secondes que vaut la tension aux bornes du condensateur ?

b) Déterminer l'intensité du courant circulant dans le circuit du condensateur après une durée égale à 2 secondes.

**6** Un générateur de tension de f.e.m.  $E = 6 \text{ V}$  est associé en série avec un condensateur de capacité  $C = 2 \text{ }\mu\text{F}$ , un résistor de résistance  $R = 10 \text{ k}\Omega$  et un interrupteur  $K$ .

1°) Calculer l'intensité du courant dans le circuit à l'instant où on ferme l'interrupteur  $K$ .

2°) Calculer la constante de temps  $\tau$  du dipôle RC.

3°) Déterminer la durée nécessaire pour que la tension aux bornes du condensateur soit égale à  $0,99 E$ .

4°) Tracer approximativement la courbe  $u_C(t)$ .

**7** L'acquisition de la tension aux bornes d'un condensateur au cours de sa charge, dans un circuit comprenant en série le condensateur, un résistor de résistance  $R = 100 \text{ }\Omega$ , un interrupteur  $K$  et un générateur de tension continue de f.e.m.  $E = 5 \text{ V}$ , a donné les valeurs suivantes :

$t(\mu\text{s})$	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5
$u_C(\text{V})$	0	2,2	3,3	4,0	4,3	4,7	4,8	4,9

1°) Proposer un schéma pour le montage qui a servi à dresser ce tableau de mesures.

2°) Tracer le graphe traduisant les variations de  $u_C$  au cours du temps.

3°) Déterminer graphiquement la constante de temps  $\tau$  du dipôle RC.

4°) En déduire la capacité  $C$  du condensateur.

**8** L'équation différentielle, vérifiée par la charge  $q$  dans un circuit fermé constitué d'un générateur de tension de f.e.m.  $E$  associé en série avec un dipôle RC, est :

$$0,12 \frac{dq}{dt} + q = 12 \cdot 10^{-5}$$

1°) Calculer la constante de temps  $\tau$ .

2°) Sachant que  $E = 12 \text{ V}$ , déterminer la valeur de la résistance  $R$ .

3°) En déduire la valeur de la capacité  $C$  du condensateur.

## Exercices de synthèse

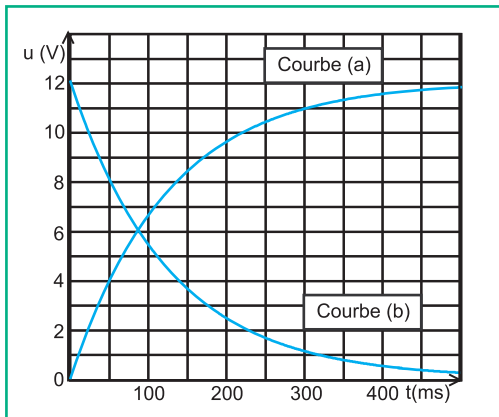
**9** On associe en série, un générateur de tension de f.e.m.  $E$  avec un résistor de résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$ .

1°) Faire un schéma du montage et préciser les connexions à faire pour visualiser à l'aide d'un oscilloscope numérique, les tensions  $u_C(t)$  et  $u_R(t)$  respectivement aux bornes du condensateur et du résistor.

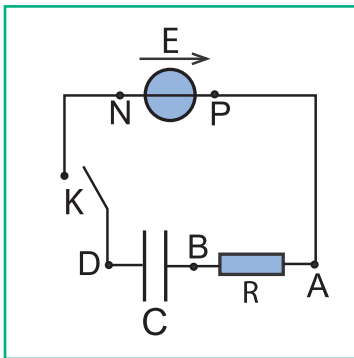
2°) Identifier les oscillogrammes de la figure ci-après.

3°) Déterminer à partir des oscillogrammes les valeurs de  $E$  et de la constante de temps  $\tau$  du dipôle RC.

4°) En déduire la valeur de  $R$ .



**10** On charge un condensateur de capacité  $C = 22 \mu\text{F}$  selon le montage schématisé ci-dessous. Le générateur est une alimentation stabilisée délivrant une tension  $E = 6 \text{ V}$  ; le conducteur ohmique a une résistance  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . À l'instant  $t = 0$ , le condensateur est déchargé et l'on ferme l'interrupteur  $K$ .



1°) En désignant par  $q$  la charge portée par l'armature B du condensateur.

Indiquer le sens arbitraire positif choisi pour avoir

$$i = \frac{dq}{dt}$$

2°) En appliquant la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $q(t)$ .

3°) Cette équation différentielle admet pour solution:  $q(t) = \alpha \cdot (1 - e^{-t/\beta})$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes.

a-Déterminer les expressions littérales de  $\alpha$  et de  $\beta$ , puis calculer leurs valeurs numériques.

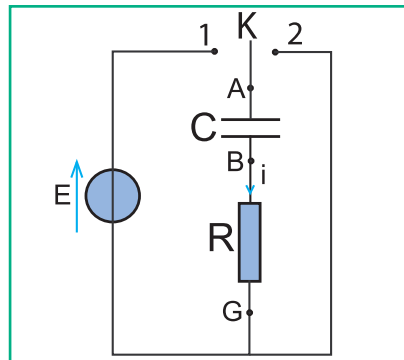
b-Exprimer l'intensité du courant de charge  $i(t)$ .

4°) a-Déterminer l'instant  $t_{1/2}$  pour lequel  $q(t) = \frac{1}{2} CE$ .

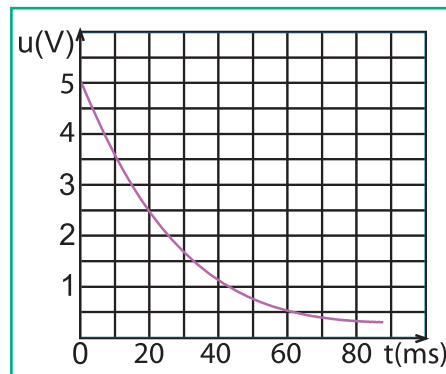
Comparer cet instant à la constante de temps  $\tau$ .

b-A quel instant  $t$  a-t-on  $q(t) = \frac{CE}{4}$  ?

**11** Le montage de la figure ci-après permet d'étudier l'évolution de la tension  $u_{AB}$  aux bornes d'un condensateur de capacité  $C$ , en série avec un résistor de résistance  $R$ .



Une interface, reliée à un ordinateur, permet l'acquisition de la tension  $u_{AB}$  au cours du temps. Initialement, l'interrupteur  $K$  est en position 1 depuis longtemps.



1°) À l'instant  $t = 0$ , on place l'interrupteur  $k$  en position 2. Quel est l'état du condensateur à cet instant ?

2°) À quoi correspond la courbe ci-dessus ?

3°) Quelle est la manipulation à effectuer sur le circuit pour obtenir cette courbe ?

4°) En respectant l'orientation choisie, préciser le signe de l'intensité  $i$  du courant lors de la décharge du condensateur.

5°) Écrire la relation entre :

- l'intensité  $i$  du courant et la tension  $u_{BG}$ ,
- la charge  $q_A$  du condensateur et la tension  $u_{AB}$ ,
- l'intensité  $i$  du courant et la charge  $q_A$ ,
- les tensions  $u_{BG}$  et  $u_{AB}$  lors de la décharge.

6°) En appliquant la loi des mailles, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la tension

$$u_{AB} \text{ est : } \frac{1}{\alpha} \frac{du_{AB}}{dt} + u_{AB} = 0$$

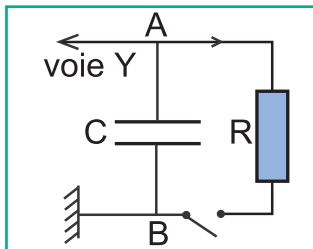
avec  $\alpha$  une constante que l'on exprimera en fonction des caractéristiques des différents dipôles du circuit de décharge.

**12** Un condensateur de capacité  $C = 5 \mu\text{F}$  est initialement chargé sous une tension  $u_{AB} = U_0 > 0$ .

Le condensateur est inséré dans un circuit schématisé ci-contre.

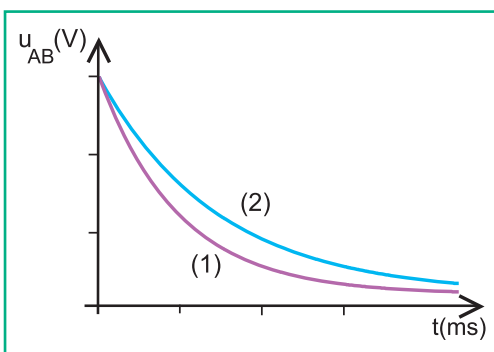
Les réglages d'acquisition de la tension  $u_{AB}$  sont les suivants : 2,5ms/div et 2V/div

À l'instant  $t = 0$ , on ferme le circuit.



1°) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_{AB}$ .

2°) Avec un résistor de résistance  $R_1 = 500 \Omega$ , on obtient la courbe 1 représentée sur le graphe ci-dessous :



En effectuant la même opération avec un résistor de résistance  $R_2$ , on obtient la courbe 2 du même graphe.

a- Indiquer la valeur de  $U_0$ .

b- Dédurre, de l'examen des deux courbes, la résistance la plus grande. Proposer une méthode de détermination de  $R_2$  et la calculer numériquement.

3°) a-Calculer l'énergie emmagasinée par le condensateur lors de sa charge.

b-En déduire la valeur de l'énergie  $E_1$  dissipée par effet Joule dans le résistor de résistance  $R_1$  lorsque la décharge du condensateur est terminée.

c-Cette énergie  $E_1$  varie-t-elle si on remplace le résistor de résistance  $R_1$  par celui de résistance  $R_2$  ? Justifier la réponse.

## Étude de texte

### Le défibrillateur cardiaque

**13** Le défibrillateur cardiaque est un appareil permettant d'appliquer un choc électrique sur le thorax d'un patient, dont les fibres musculaires du coeur se contractent de façon désordonnée (fibrillation). Cet appareil produit une impulsion électrique de très haute énergie à travers la poitrine d'un patient afin de relancer les battements de son coeur.

Un tel défibrillateur connu sous le nom de circuit à choc exponentiel tronqué comprend notamment un condensateur de capacité  $C = 32 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ , chargé sous une haute tension  $U$  égale à 5kV environ. La libération de l'énergie emmagasinée par le condensateur en une dizaine de milli-secondes par deux électrodes posées sur le thorax du patient entraîne un choc électrique.

La résistance électrique du thorax doit être prise en compte. Chez l'adulte, elle est évaluée à 75 ohms en moyenne, valeur mesurée par le défibrillateur grâce à des courants de faible intensité. La connaissance de la valeur de la résistance de la cage thoracique avant le choc permet de choisir le niveau d'énergie du choc électrique adapté au patient, c'est-à-dire l'énergie nécessaire pour relancer les battements avec le moins d'effets délétères.

### Questions

1°) Préciser l'utilité d'un défibrillateur cardiaque.

2°) Montrer que le défibrillateur et le thorax peuvent être assimilés à un dipôle RC.

3°) Décrire brièvement, le principe de fonctionnement d'un défibrillateur cardiaque.

4°) Trouver une explication à l'expression "circuit à choc exponentiel tronqué" utilisée dans le texte.

# Fiche technique

## Mesure d'une tension continue aux bornes d'un condensateur

### 1. Utilisation d'un voltmètre

On sait que le voltmètre est un appareil de mesure de très grande résistance interne  $R_V$ . monté dans un circuit, il est équivalent à un conducteur ohmique de résistance égale à sa résistance interne  $R_V$ . Lorsqu'on le branche aux bornes d'un condensateur chargé, celui-ci se trouve fermé sur un conducteur ohmique de résistance  $R_V$ . Par conséquent, il y a risque de décharge non négligeable du condensateur dans le voltmètre, ce qui fausse la mesure. Effectivement, la perturbation apportée par un voltmètre lorsqu'on mesure la tension aux bornes d'un condensateur est souvent importante et peut même la rendre impossible. La résistance d'un voltmètre numérique est en général voisine de  $10\text{ M}\Omega$  sur tous les calibres ; celle d'un voltmètre à aiguille est le plus souvent de l'ordre de  $20\text{ k}\Omega$  par volt, c'est-à-dire qu'utilisé sur le calibre  $10\text{ V}$  par exemple, la résistance du voltmètre est  $200\text{ k}\Omega$ . Le voltmètre, de résistance  $R_V$ , connecté aux bornes d'un condensateur de capacité  $C$ , se décharge avec la constante de temps  $R_V C$ . Pour faire des mesures de tension correctes, il faut que cette décharge soit négligeable. Pour cela, on ne peut pas jouer vraiment sur le temps de mesure dont la possibilité de réduction est limitée. Cependant, on peut jouer sur la valeur de  $R_V C$ , et ce en cherchant à ce qu'elle soit suffisamment élevée :

#### Solution particulière :

Pour les condensateurs de capacité très grande, le problème est pratiquement résolu par l'utilisation d'un voltmètre numérique.

Exemple : avec  $C = 5600\text{ }\mu\text{F}$  et  $R_V = 10\text{ M}\Omega$ , la constante de temps vaut  $56000\text{ s}$ , ce qui rend la perturbation apportée par le voltmètre très faible. La difficulté sera par contre de déterminer avec précision la capacité du condensateur. En effet pour les fortes capacités, les condensateurs sont chimiques et la valeur indiquée par le fabricant est souvent minorée de 20 à 40% voire plus. Mesurer les capacités de ces condensateurs n'est souvent pas à la portée des capacimètres courants.

#### Solution "idéale" :

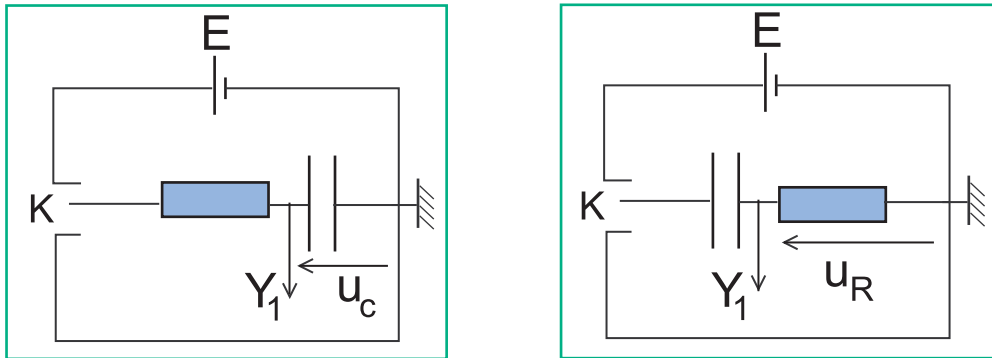
La meilleure méthode d'amélioration de  $R_V$  consiste à interposer entre le condensateur et le voltmètre un montage suiveur de tension. Réalisé avec le circuit intégré TL081, la résistance du dispositif de mesure atteint alors  $10^{12}\text{ }\Omega$  environ. Ainsi, avec même un condensateur de capacité trop petite, la mesure sera valable.

Exemple : avec  $C = 10\text{ nF}$ , on aura une constante de temps de l'ordre de  $10^4\text{ s}$ , ce qui laissera le temps de faire la mesure !

## 2. Utilisation d'un oscilloscope à mémoire

L'oscilloscope est caractérisé par une grandeur appelée impédance d'entrée de valeur courante ( $1\text{ M}\Omega$ ,  $50\text{ pF}$ ), ce qui signifie que la connexion d'un oscilloscope aux bornes d'un dipôle revient à connecter en parallèle aux bornes de ce dipôle, un conducteur ohmique de résistance  $1\text{ M}\Omega$  et un condensateur de capacité  $50\text{ pF}$ .

Pour faire l'étude de la charge du condensateur à l'aide d'un oscilloscope à mémoire, deux montages sont a priori utilisables :



Supposons  $R = 20\text{ k}\Omega$  et  $C = 125\text{ nF}$ . Considérons l'entrée de l'oscilloscope comme une résistance  $R_{\text{osc}}$  égale à  $1\text{ M}\Omega$ . Les  $50\text{ pF}$  sont négligeables devant la capacité du dipôle RC. Dans la situation schématisée à gauche, on montre que, lorsque le commutateur  $k$  est en position 1, la tension aux bornes du condensateur s'écrit :

$$u = \frac{R_{\text{osc}}}{R + R_{\text{osc}}} E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau = \frac{R R_{\text{osc}}}{R + R_{\text{osc}}} C$$

Avec les valeurs proposées,  $u$  aux bornes du condensateur tend vers  $E$  à 2% près et la constante de temps de la charge est inférieure à  $RC$  de 2% également ce qui reste acceptable. A la décharge on a la même constante de temps. Mais dès que le commutateur  $K$  est ouvert, le condensateur se décharge dans l'oscilloscope avec une constante de temps  $R_{\text{osc}}C$  égale à  $125\text{ ms}$ . Autrement dit, compte tenu du temps de basculement du commutateur  $K$ , le condensateur sera déchargé avant que le commutateur n'ait basculé. On n'enregistre pas la décharge du condensateur avec ce montage ! Le seul remède consiste à relier le condensateur à l'oscilloscope à travers un suiveur de tension.

Le montage de droite est utilisable si on veut éviter le suiveur de tension. La tension aux bornes du condensateur s'obtient évidemment en remarquant que  $u_C = E - u_R$ .

Il reste l'erreur de 2% sur la constante de temps mais le condensateur ne se décharge pas pendant la manœuvre du commutateur.

D'après web.ac-reims.

# En savoir plus

## La foudre et les paratonnerres

En météorologie, la foudre est cette décharge électrique qui se produit au cours d'un orage, accompagnée d'une vive lumière connue sous le nom d'éclair et d'une vague sonore sous forme de détonations constituant ce qu'on appelle le tonnerre. Effectivement, l'éclair est une manifestation lumineuse, subite et passagère à travers le ciel, d'une décharge électrique qui se produit entre des nuages chargés de pluie, ou bien entre un nuage chargé de pluie et la Terre. Il apparaît sous forme d'une ligne brisée ou d'un arc lumineux, parfois long de plusieurs kilomètres, qui s'étend entre les points de décharge.

On ne sait pas vraiment comment les nuages orageux se chargent, mais la plupart le sont négativement à la base et positivement à leur sommet. La plupart des météorologues pensent que la glace est un facteur nécessaire, car, généralement, un éclair ne se produit que lorsqu'il y a formation de glace dans la couche supérieure des nuages orageux. Des expériences ont montré que, quand des solutions diluées d'eau sont gelées, la glace se charge négativement et l'eau se charge positivement. Si, après le début de la congélation, l'air ascendant sépare les gouttelettes d'eau des particules gelées, les



gouttelettes se concentrent dans la partie supérieure du nuage et les particules plus grosses de glace tombent à la base. Par ailleurs, des expériences ont également montré que les grosses gouttes d'eau qui tombent rapidement se chargent négativement, alors que les petites gouttes qui tombent lentement se chargent positivement. La polarisation d'un nuage orageux peut donc être due à la différence de vitesse à laquelle tombent les grandes et les petites gouttes de pluie. De quelque façon qu'elle se forme, la charge négative à la base du nuage induit une charge positive sous elle, sur la Terre, qui agit comme la seconde plaque d'un énorme condensateur. Quand le potentiel électrique entre deux nuages ou entre un nuage et la Terre atteint une valeur suffisamment élevée (environ 10 000 V par cm), l'air s'ionise le long d'un passage étroit, et un éclair se forme. De nombreux météorologues croient que c'est de cette façon qu'une décharge négative est transportée vers le sol, et que la charge négative totale de la Terre est maintenue.



La foudre est très dangereuse ; elle est plus dangereuse même que les tornades et les ouragans. Elle tue chaque année, de nombreuses personnes et provoque notamment de nombreux feux de forêts. Il convient alors de prendre quelques précautions lorsque l'on se trouve sous un orage, pour pouvoir s'abriter. Il faut éviter de rester sous un arbre isolé.

À cause de leur hauteur, les arbres sont susceptibles d'être frappés par la foudre, et sont donc dangereux pendant de violents orages électriques. Le plus sûr pour une personne qui se trouve à l'extérieur pendant un orage est de se mettre à l'intérieur d'une voiture à structure d'acier, ou de rester allongée par terre, à l'extérieur.

Les bâtiments sont protégés grâce à des tiges métalliques placées au-dessus de la partie la plus haute du toit, et reliées au sol, appelées paratonnerres. Ces tiges forment un passage de faible résistance pour la foudre, et donc l'empêche de passer à travers la structure elle-même. Les lignes haute tension et les appareils radio, équipés d'antennes extérieures, sont protégés contre les éclairs grâce à des paratonnerres spéciaux, qui consistent en un petit espace rempli de gaz entre la phase et la masse. Cet espace offre une grande résistance aux tensions ordinaires, mais la foudre, qui a un potentiel de dizaines de millions de volts, ionise le gaz offrant un chemin de faible résistance pour cette décharge.

Toutefois, les éclairs ont des effets positifs. Le sol est enrichi par l'azote qui est libéré de l'atmosphère par les éclairs, et transporté vers le sol par la pluie. Certains scientifiques pensent que les éclairs ont été un élément clé dans l'origine de la vie sur Terre, créant à partir d'éléments simples des composés chimiques complexes qui ont donné naissance à la matière vivante.

D'après Encarta 2006

## Objectifs

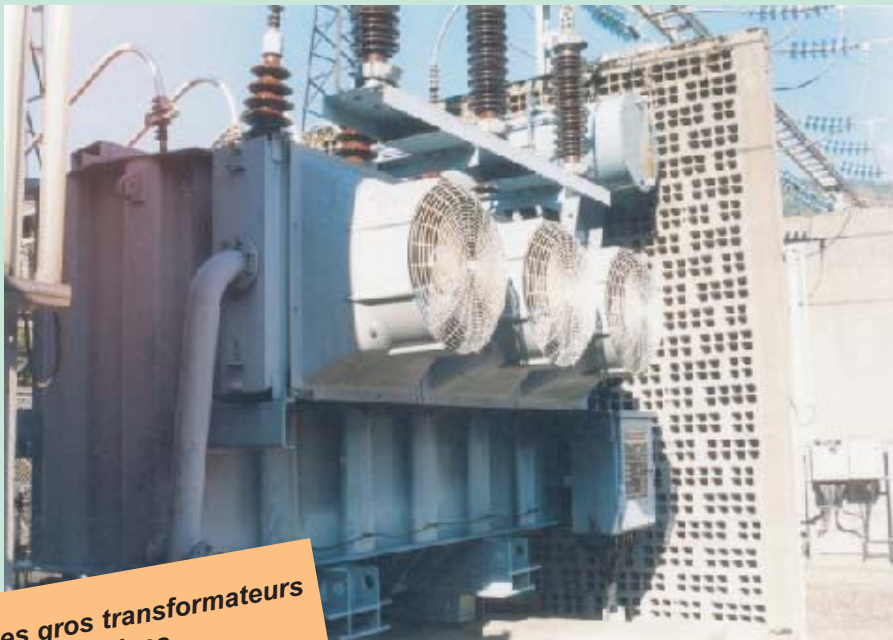
- ◆ Mettre en évidence expérimentalement le phénomène d'induction électromagnétique.
- ◆ Appliquer la loi de Lenz.
- ◆ Reconnaître les facteurs dont dépend la f.e.m. d'auto-induction.
- ◆ Calculer l'énergie emmagasinée dans un solénoïde.
- ◆ Établir, pour un dipôle RL soumis à un échelon de tension, l'équation différentielle qui régit les variations de l'intensité  $i$  du courant parcourant la bobine en fonction du temps.
- ◆ Déterminer graphiquement la constante de temps  $\tau = \frac{L}{R}$  à partir de la courbe  $u_L(t)$  ou  $i(t)$  d'un dipôle RL.

## Prérequis

SAVOIR	SAVOIR FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Définir un champ magnétique.</li> <li>◆ Définir le vecteur champ magnétique.</li> <li>◆ Définir un champ magnétique uniforme.</li> <li>◆ Enumérer les caractéristiques d'un champ magnétique créé par un courant continu circulaire (solénoïde).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Identifier les pôles d'un aimant et les faces d'une bobine.</li> <li>◆ Mettre en évidence expérimentalement l'existence d'un champ magnétique.</li> <li>◆ Déterminer les caractéristiques d'un vecteur champ magnétique.</li> <li>◆ Reconnaître un champ magnétique uniforme à partir de la forme de son spectre.</li> </ul>

# LA BOBINE LE DIPÔLE RL

# 2



*Même les gros transformateurs  
utilisent des bobines*

- ◆ Pourquoi, les transformateurs ne peuvent pas être utilisés en courant continu ?
- ◆ Comment fonctionnent les ralentisseurs électromagnétiques des véhicules “poids lourds” ?

# L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Une bobine est un dipôle électrocinétique constitué d'un enroulement dans le même sens, de fil conducteur recouvert d'un vernis isolant. De ce fait, elle a une résistance électrique interne. Un tel dipôle placé dans un circuit électrique, se comporte-t-il alors comme un résistor vis à vis du courant électrique ?

La bobine est-elle, comme le condensateur, un réservoir d'énergie ?

## 1

## LE PHÉNOMÈNE D'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

### 1.1- PRODUCTION D'UN COURANT INDUIT PAR DÉPLACEMENT RELATIF D'UN AIMANT ET D'UNE BOBINE

#### Manipulation

##### ♦ Expérience 1

On réalise le montage de la figure 1, comportant une bobine reliée à un milliampèremètre à zéro central, sensible aux courants très brefs.

- En approchant l'un des pôles d'un barreau aimanté de l'une des faces de la bobine, l'aiguille du milliampèremètre dévie dans un sens (Fig.2a). L'aiguille du milliampèremètre retourne à zéro dès que cesse le déplacement de l'aimant.

- En éloignant l'aimant de la bobine, l'aiguille du milliampèremètre dévie de nouveau, mais dans le sens contraire (Fig.2b). Les mêmes observations sont faites quand, au lieu de déplacer l'aimant, on le maintient fixe et on déplace la bobine suivant son axe disposé parallèlement au grand axe de l'aimant.

#### Remarque

On réussirait mieux toutes ces expériences si l'on disposait d'un galvanomètre balistique au lieu du milliampèremètre à zéro central.

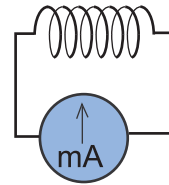
##### ♦ Expérience 2

On réalise le circuit fermé, schématisé par la figure 3, comportant une bobine ( $B_1$ ) et un résistor de résistance  $R$ .

Les deux bornes du dipôle sont reliées à l'entrée  $Y_1$  d'un oscilloscope à mémoire. On peut visualiser ainsi l'évolution temporelle de la tension  $u_R$  aux bornes du résistor.

- En approchant le pôle nord de l'aimant de l'une des faces de la bobine, l'oscilloscope mémorise sur son écran le chronogramme 1 de la figure 4a.

- La bobine et l'aimant étant maintenus dans les mêmes dispositions, quand on éloigne l'un de l'autre, on obtient l'oscillogramme 2 de la figure 4b.



milliampèremètre à zéro central

Fig.1 : Bobine en circuit fermé

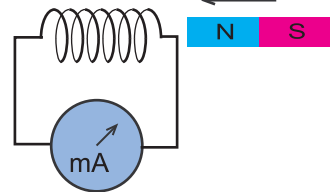


Fig.2a : Approche de l'aimant

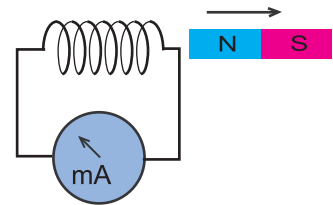


Fig.2b : Éloignement de l'aimant

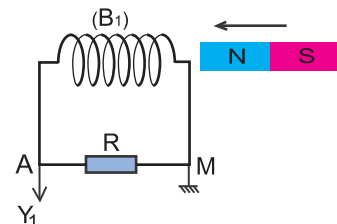


Fig.3 : Bobine fermée sur un résistor

- En approchant de nouveau, mais d'une manière plus rapide, le pôle nord de l'aimant de l'une des faces de la bobine, on obtient la même forme d'oscillogramme, avec un pic plus prononcé.

### Questions

1°) Que se passe-t-il, au niveau d'une bobine en circuit fermé, lors d'un déplacement relatif aimant-bobine ?

2°) Justifier le recours à  $u_R(t)$ , dans l'expérience 2, pour suivre l'évolution de l'intensité  $i$  du courant circulant dans le circuit de la bobine.

3°) D'après les observations des expériences 1 et 2, énumérer les facteurs dont dépendent les propriétés du phénomène qui se produit dans une bobine, en circuit fermé, par un déplacement relatif aimant-bobine.

### Conclusion

Avec un déplacement relatif bobine-aimant, on peut produire un courant électrique dans la bobine en circuit fermé. Un tel courant électrique est appelé courant induit, alors que l'aimant est appelé inducteur.

L'intensité du courant induit est d'autant plus grande que le déplacement relatif bobine-aimant est plus rapide.

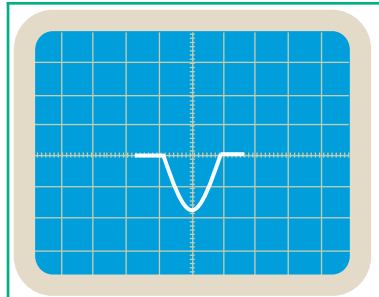


Fig.4a : Oscillogramme 1

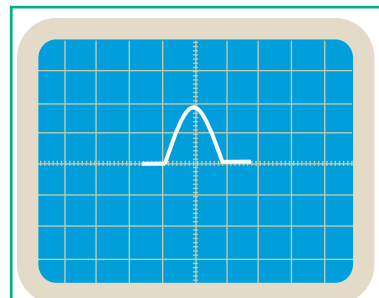


Fig.4b : Oscillogramme 2

## 1.2- AUTRE MODE DE PRODUCTION DU COURANT INDUIT

### Manipulation

On garde le montage de la figure 3 et on remplace l'aimant par un solénoïde ( $B_2$ ), de diamètre plus grand que celui de la bobine ( $B_1$ ), relié à un générateur de tension variable (un GBF par exemple) et on y introduit la bobine ( $B_1$ ) comme dans la figure 5.

Ayant déjà utilisé l'entrée  $Y_1$  de l'oscilloscope pour visualiser  $u_R(t)$ , on utilise l'entrée  $Y_2$  pour visualiser la tension  $u(t)$  délivrée aux bornes du générateur.

En appliquant, aux bornes du solénoïde ( $B_2$ ) une tension sinusoïdale, on observe aux bornes de la bobine ( $B_1$ ) une tension de forme semblable (Fig.6).

### Remarque

Si l'on refait la même expérience tout en remplaçant le GBF par un générateur de tension continue, il ne se passe plus rien dans la bobine ( $B_1$ ), une fois le courant y est établi.

### Question

Interpréter l'apparition du courant induit dans le circuit de la bobine ( $B_1$ ).

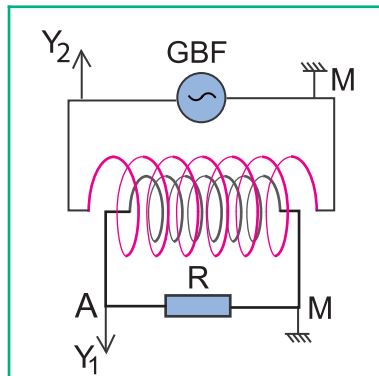


Fig.5 : Influence d'une bobine parcourue par un courant sinusoïdal

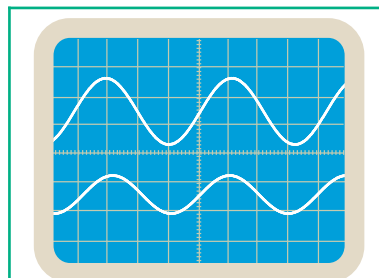


Fig.6 : Oscillogrammes aux bornes des bobines ( $B_1$ ) et ( $B_2$ )

**Constatation**

La variation de l'intensité du courant électrique  $i(t)$  dans une bobine produit un courant induit dans une autre bobine en circuit fermé à proximité de la première.

Le courant électrique variable, qui est à l'origine du courant induit, est appelé courant inducteur, tandis que le circuit dans lequel il circule est appelé circuit inducteur.

**Interprétation**

Lorsqu'une bobine est à proximité d'un aimant, elle est évidemment dans le champ magnétique de l'aimant. Par suite, tout déplacement relatif bobine-aimant fait varier les caractéristiques du champ où se trouve instantanément la bobine.

Lorsque la même bobine est placée dans une autre bobine parcourue par un courant électrique variable, elle se trouve aussi dans un champ magnétique variable. Il s'avère alors que, dans les deux cas étudiés expérimentalement, le courant induit produit dans le circuit fermé de la bobine est dû à une variation des caractéristiques du champ magnétique où baigne cette bobine, d'où la dénomination du champ magnétique variable comme étant le champ magnétique inducteur.

**Conclusion**

Toute variation de champ magnétique créée dans un circuit électrique fermé, situé à proximité du champ, un courant électrique appelé courant induit : c'est le phénomène d'induction électromagnétique.

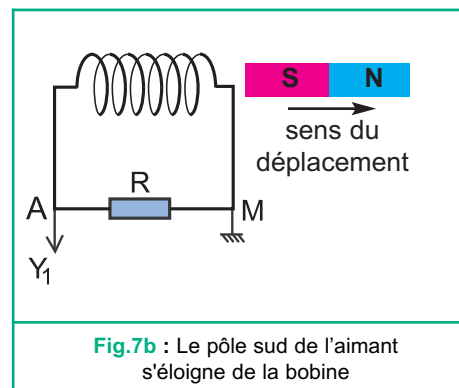
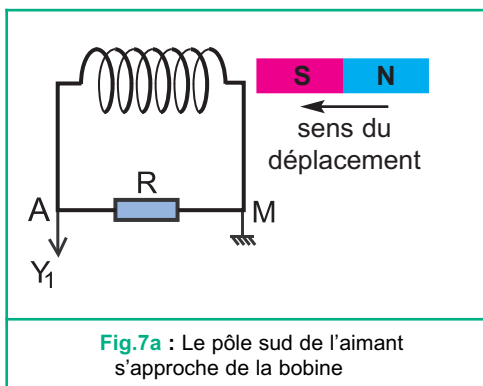
Le courant induit est d'autant plus intense que la variation locale des caractéristiques du champ inducteur est plus rapide.

Le sens du vecteur champ magnétique inducteur est un facteur dont dépend le sens du courant induit.

**2 LOI DE LENZ****Manipulation**

On refait l'expérience 2 du paragraphe 1-1, mais en orientant le pôle sud (au lieu du pôle nord) de l'aimant vers la même face de la bobine (Fig.7a et 7b).

On obtient alors les oscillogrammes des figures 7c et 7d.



### Questions

1°) A l'aide des oscillogrammes 7c et 7d de la figure 7, préciser le signe de  $u_p$  dans chacun des cas 7a et 7b ; en déduire dans chaque cas le sens du courant induit parcourant la bobine.

2°) Représenter dans chacun des cas 7a et 7b, le vecteur champ magnétique  $\vec{b}$  créé par le courant induit à l'intérieur de la bobine et déduire le nom de la face que la bobine présente à l'aimant.

3°) Identifier, parmi les cas 4a et 4b de l'expérience 2 du paragraphe 1, celui où le courant induit a le même sens que :

- le courant induit du cas présent 7c.
- le courant induit du cas présent 7d.

4°) Montrer que dans chaque cas, le courant induit s'oppose par son sens de circulation dans la bobine, au sens de déplacement de l'aimant, ainsi qu'au signe de variation de la valeur du vecteur champ magnétique inducteur à proximité de la bobine.

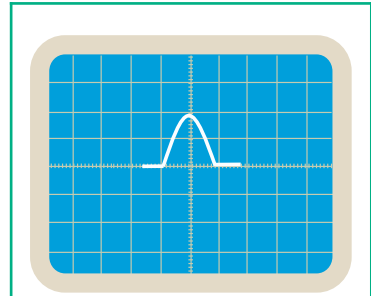


Fig.7c : Oscillogramme relatif à l'expérience 7a.

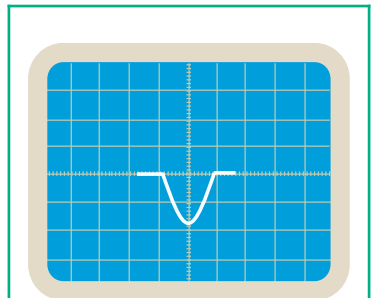


Fig.7d : Oscillogramme relatif à l'expérience 7b.

### Interprétation

Lorsqu'on approche le barreau aimanté de la bobine, parallèlement à son grand axe tel que dans le cas 7a (par son pôle sud) ou dans le cas 2a de l'expérience 1 du paragraphe 1.1, le vecteur champ inducteur  $\vec{B}$  à l'intérieur de la bobine augmente en valeur mais tout en étant orienté dans un sens ou bien dans l'autre.

Suivant ce sens, le courant induit circule dans la bobine dans un sens ou bien dans l'autre.

Expérience		
Sens de $\vec{B}$	de l'aimant vers la bobine	de la bobine vers l'aimant
Valeur de $\vec{B}$	$\vec{B}$    augmente	
Sens du courant induit	La bobine présente sa face nord au pôle nord de l'aimant	La bobine présente sa face sud au pôle sud de l'aimant
Effets du sens du courant induit	La bobine présente à l'aimant la face de même nom que le pôle de l'aimant qui est de son côté : répulsion bobine-aimant Ayant le sens contraire de celui de $\vec{B}$ , le vecteur champ $\vec{b}$ créé par le courant induit s'oppose à l'augmentation de    $\vec{B}$   .	

**Question**

Traiter de la même manière le cas 7b précédent et le cas 2b de l'expérience 1 du paragraphe 1.1 où le courant induit est produit par un éloignement de l'aimant par rapport à la bobine et dégager les effets du sens du courant induit.

En effet, comme on vient de dégager que le fait d'approcher l'aimant de la bobine provoque une répulsion aimant-bobine, on montre que le fait d'éloigner l'aimant de la bobine entraîne par contre une attraction aimant-bobine. De même, le fait qu'en éloignant l'aimant de la bobine, la valeur du vecteur champ inducteur  $\vec{B}$  à l'intérieur de la bobine diminue, le champ magnétique créé par le courant induit est tel que le vecteur champ  $\vec{b}$  prend plutôt le même sens que  $\vec{B}$  afin de compenser la diminution de la valeur de ce dernier.

**Remarque**

Le champ magnétique créé par le courant induit est appelé champ induit.

**Conclusion : la loi de Lenz**

Le courant induit a un sens tel qu'il s'oppose par ses effets à la cause qui lui donne naissance.

## 3 LA FORCE ÉLECTROMOTRICE D'INDUCTION

On sait que la circulation d'un courant électrique dans un circuit fermé demande la présence d'un générateur. Grâce à la f.e.m. (force électromotrice) qu'il possède, ce dernier fournit le courant au circuit extérieur. Cependant, on vient de découvrir que le courant induit est produit sans aucun générateur. Donc, il est dû à une f.e.m. délocalisée ; elle est là, partout dans le circuit induit. Elle prend naissance dans le circuit avec la cause et cesse avec la cause. Si le circuit induit est ouvert, la f.e.m. se manifeste par l'apparition d'une tension à ses bornes. Cette force électromotrice est appelée force électromotrice d'induction ou force électromotrice induite.

## 4 L'AUTO-INDUCTION

### 4.1- MISE EN ÉVIDENCE DU PHÉNOMÈNE D'AUTO-INDUCTION

**Manipulation**

On réalise le montage de la figure 8, comportant deux dérivations ; la première est constituée d'un conducteur ohmique de résistance ajustable  $R$  et d'une lampe  $L_1$  ; la seconde est constituée d'une bobine à noyau de fer doux et d'une lampe  $L_2$ . Les deux lampes sont identiques ; le conducteur ohmique et la bobine ont la même résistance  $R$ . En fermant l'interrupteur  $K$ , on constate que :

- la lampe  $L_1$  brille tout de suite,
- la lampe  $L_2$  n'atteint son éclat maximal (identique à celui de  $L_1$ ) qu'avec un retard de quelques millièmes de secondes.

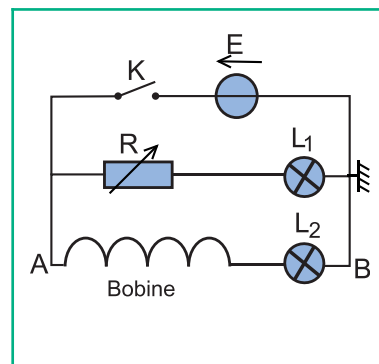


Fig.8 : Schéma du montage



### Questions

- 1°) A la fermeture de l'interrupteur K, les deux lampes sont-elles parcourues par des courants électriques de même intensité ?
- 2°) Préciser l'influence de la bobine sur l'intensité du courant dans la lampe  $L_2$ , lors de la fermeture du circuit ?

### Interprétation

Lors de la fermeture de l'interrupteur K, il y a variation de l'intensité du courant électrique dans la bobine de zéro à une valeur  $I$  non nulle, et par suite, variation du vecteur champ magnétique propre de la bobine, celle-ci produit un courant induit qui, conformément à la loi de Lenz, s'oppose à la variation de l'intensité du courant dans la branche AB.

Une telle induction électromagnétique due à une variation du vecteur champ magnétique propre de la bobine (le circuit induit est lui-même le circuit inducteur) est appelée auto-induction. Dans ce cas particulier, la f.e.m. qui est à l'origine du courant induit est appelée f.e.m. d'auto-induction (ou f.e.m. auto-induite).

### Conclusion

Une bobine ne se comporte pas comme un conducteur ohmique. Placée dans un circuit fermé, elle s'oppose aux variations de l'intensité du courant électrique qui y circule.

## 4.2- LA FORCE ÉLECTROMOTRICE D'AUTO-INDUCTION

### Manipulation

On réalise le montage de la figure 9, comportant en série, un résistor de résistance  $R_0$ , une bobine longue ( $B_1$ ) de résistance  $r$  négligeable devant  $R_0$  et un générateur de tension variable (GBF) dont la masse est isolée de la terre (masse flottante).

On relie les points A et C respectivement aux voies  $Y_1$  et  $Y_2$  d'un oscilloscope bicourbe (Fig 10).

On visualise simultanément la tension  $u_{AB}$  aux bornes du résistor sur la voie  $Y_1$  et la tension  $u_{BC}$  aux bornes de la bobine ( $B_1$ ) sur la voie  $Y_2$  de l'oscilloscope au lieu de  $u_{CB}$  (Fig.11), et ce en appuyant sur le bouton **INV** de  $Y_2$ .

### Questions

- 1°) Donner les expressions des tensions  $u_{AB}$  et  $u_{BC}$ .
- 2°) Par exploitation des oscillogrammes de la figure 11 :
  - a- exprimer les tensions  $u_{AB}$  et  $u_{BC}$ , entre les instants  $t_1 = 0$  et  $t_2 = \frac{T}{2}$ , en fonction du temps.
  - b- En déduire l'expression de la f.e.m. d'auto-induction en fonction de l'intensité  $i$  du courant parcourant la bobine.

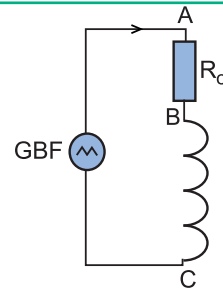


Fig.9 : Schéma du montage

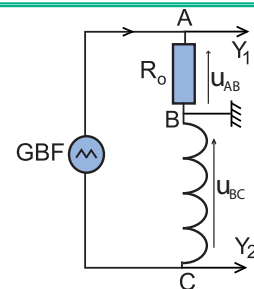


Fig.10 : Schéma du branchement de l'oscilloscope

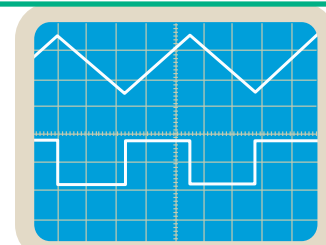


Fig.11 : Oscillogrammes des tensions  $u_{AB}$  et  $u_{BC}$

## Interprétation

Comme celle délivrée aux bornes du générateur BF, la tension  $u_{AB}$  aux bornes du résistor est une tension triangulaire (Fig.11). D'après la loi d'Ohm,  $u_{AB} = R_o i$ , d'où  $i = \frac{u_{AB}}{R_o}$ . Donc, le courant débité par le générateur BF dans le circuit extérieur constitué par le résistor de résistance  $R_o$  et la bobine est un courant variable d'intensité  $i(t)$  et de forme triangulaire. Étant parcourue par un courant d'intensité variable  $i$ , la bobine est le siège d'une f.e.m. d'auto-induction  $e$ . Par conséquent,  $u_{BC}$  aux bornes de la bobine s'écrit :  $u_{BC} = -e + r i$ . En négligeant  $r$  devant  $e$  on aura :  $u_{BC} \simeq -e$ .

La forme de l'oscillogramme de la figure 11 montre que  $u_{BC}$  est une tension carrée :

- Pour  $t \in [nT, nT + \frac{T}{2}]$  avec  $n$  entier,  $u_{BC} = +U_o$  ; Donc  $e = -U_o$
- Pour  $t \in [nT + \frac{T}{2}, (n+1)T]$ ,  $u_{BC} = -U_o$  ; Donc  $e = +U_o$

On peut écrire alors :  $e = \pm U_o$  (1)

La f.e.m. d'auto-induction  $e$  est due aux variations de  $i$ .

Quelle relation y a-t-il alors entre  $e$  et  $i$  ?

Pour établir l'expression de  $i(t)$ , il suffit d'établir celle de  $u_{AB}(t)$ :

- Pour  $t \in [nT, nT + \frac{T}{2}]$ ,  $u_{AB} = a_1 \cdot t + b_1$ . Donc :  $i = \frac{u_{AB}}{R_o} = \frac{a_1}{R_o} t + \frac{b_1}{R_o}$
- Pour  $t \in [nT + \frac{T}{2}, (n+1)T]$ ,  $u_{AB} = a_2 \cdot t + b_2$ . Donc :  $i = \frac{a_2}{R_o} t + \frac{b_2}{R_o}$ .

Or  $a_2 = -a_1$ , il vient :  $i = -\frac{a_1}{R_o} t + \frac{b_2}{R_o}$ . Donc,  $\frac{di}{dt} = \pm \frac{a_1}{R_o}$ . (2)

Les équations (1), (2) et la loi de Lenz donnent :  $\frac{e}{(\frac{di}{dt})} = -U_o \frac{R_o}{a_1}$ .

Ce qui signifie :  $e = -L \frac{di}{dt}$ , où  $L = U_o \frac{R_o}{a_1}$  est une constante positive appelée inductance.

### Définition

L'inductance est une grandeur caractérisant l'aptitude d'une bobine à modérer les variations de tout courant électrique qui y circule. Dans le système international d'unités, l'inductance s'exprime en henry<sup>⊙</sup> (H).

⊙ Nom dédié au physicien américain Joseph Henry (1797-1878)

Dans l'expression  $(-L \frac{di}{dt})$ , le signe (-) traduit la loi de Lenz :

- Quand  $i$  croît,  $L \cdot \frac{di}{dt} > 0$ . Donc,  $e < 0$  : la f.e.m. d'auto-induction s'oppose à l'augmentation de l'intensité du courant.
- Quand  $i$  décroît,  $L \cdot \frac{di}{dt} < 0$ . Donc,  $e > 0$  : la f.e.m. d'auto-induction s'oppose à la diminution de l'intensité du courant.

**Conclusion : Expression de la f.e.m. d'auto-induction**

Toute bobine d'inductance  $L$  parcourue par un courant électrique d'intensité  $i$  variable est le siège d'une force électromotrice  $e$  appelée force électromotrice auto-induite (ou d'auto-induction)  $e = -L \frac{di}{dt}$ .

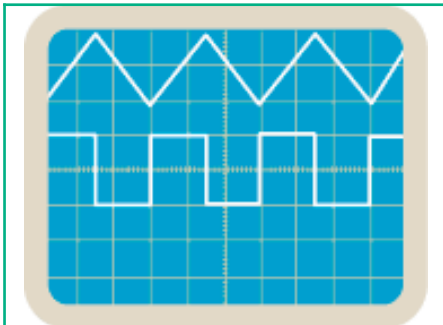
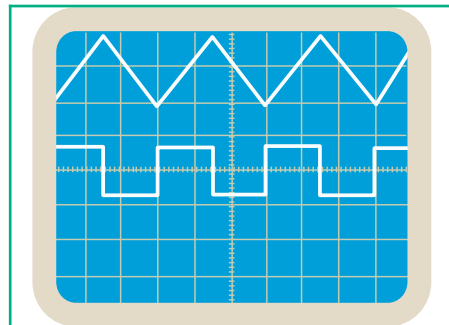
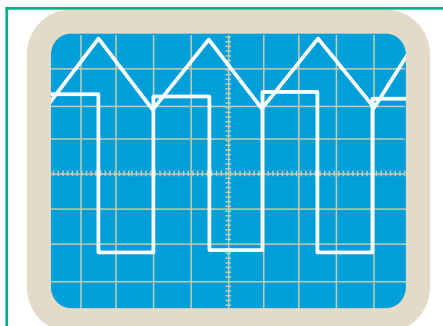
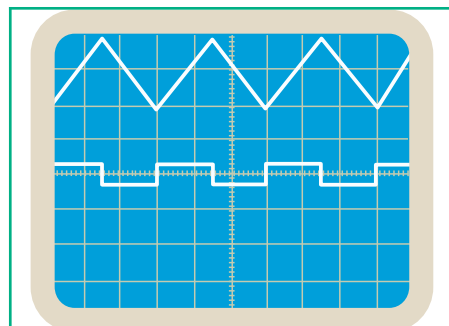
**4.3- FACTEURS DONT DÉPEND L'INDUCTANCE D'UNE BOBINE****Manipulation**

On refait l'expérience du paragraphe 4.2, mais en fixant la fréquence de la tension d'alimentation à une autre valeur et en utilisant respectivement les bobines ( $B_1$ ), ( $B_2$ ), ( $B_3$ ) et ( $B_4$ ):

Bobine	( $B_1$ )	( $B_2$ )	( $B_3$ )	( $B_4$ )
<b>N</b>	500	500	500	250
<b><math>\ell</math> (cm)</b>	20	30	20	20
<b>D (cm)</b>	10	10	15	10

N : nombre total de spires,  
 $\ell$  : longueur de la bobine,  
 D : diamètre moyen de la bobine.

En gardant les mêmes sensibilités de l'oscilloscope, on obtient les oscillogrammes des figures 12.a, 12.b, 12.c et 12.d correspondant respectivement aux bobines ( $B_1$ ), ( $B_2$ ), ( $B_3$ ) et ( $B_4$ ).

Fig.12a : Oscillogrammes obtenus avec ( $B_1$ ).Fig.12b : Oscillogrammes obtenus avec ( $B_2$ ).Fig.12c : Oscillogrammes obtenus avec ( $B_3$ ).Fig.12d : Oscillogrammes obtenus avec ( $B_4$ ).**Questions**

1°) A l'aide des oscillogrammes de la figure 12 :

a- montrer que l'inductance  $L$  de la bobine augmente avec  $N$  tandis qu'elle diminue lorsque  $\ell$  augmente.

b- déterminer l'influence de la section de la bobine sur son inductance.

2°) Préciser parmi les oscillogrammes de la figure 12 ceux qu'il faut comparer avec les oscillogrammes de la figure 11 pour montrer si l'inductance de la bobine dépend de la fréquence du GBF.

## Conclusion

L'inductance  $L$  d'une bobine ne dépend que de ses caractéristiques géométriques, à savoir le nombre total de spires, la longueur et la section moyenne, d'où sa qualification d'inductance propre.

## Remarques

- ♦ Les bobines usuelles ont une inductance nettement inférieure à 1 H.  
Exemple : un solénoïde de 150 spires, de 15 cm de longueur et de 3 cm de diamètre a une inductance  $L = 140 \mu\text{H}$ ,
- ♦ L'introduction d'un barreau de fer doux dans un solénoïde fait augmenter la valeur de son inductance  $L$ . Mais, dans ces conditions, l'expression  $e = -L \frac{di}{dt}$  n'est plus valable.
- ♦ Du fait que la f.e.m. auto-induite est due à l'inductance  $L$  de la bobine, toute bobine d'inductance  $L$  non nulle est qualifiée de bobine inductive. Si en plus, sa résistance est nulle, elle est dite purement inductive.

## 4.4- RELATION ENTRE LA TENSION AUX BORNES D'UNE BOBINE ET L'INTENSITÉ DU COURANT QUI Y CIRULE

### Symbole d'une bobine

La bobine, étant caractérisée par une inductance  $L$  et une résistance interne  $r$  (Fig.13a), on lui attribue comme symbole celui de la figure 13.a. Ce symbole peut être normalisé comme dans la figure 13.b.

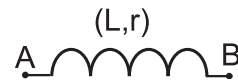


Fig.13a : Symbole d'une bobine

### Modèle équivalent

Le dipôle bobine AB, d'inductance  $L$  et de résistance  $r$  (Fig.14a), siège d'une f.e.m. d'auto-induction  $e$ , est équivalent à l'association en série d'un générateur, de f.e.m.  $e$  et d'un résistor de résistance  $r$ . (Fig.14b)

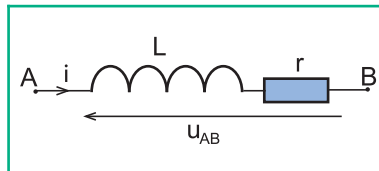


Fig.13b : Modèle équivalent

### Tension aux bornes de la bobine

En choisissant comme sens positif du courant parcourant la bobine le sens orienté de A vers B, la tension  $u_{AB}$  s'écrit :

$$u_{AB} = u_{AC} + u_{CB}$$

Par application de la loi d'Ohm :

$$u_{AB} = -e + r i. \text{ Or, } e = -L \frac{di}{dt}. \text{ Ainsi:}$$

$$u_{AB} = L \frac{di}{dt} + r i$$

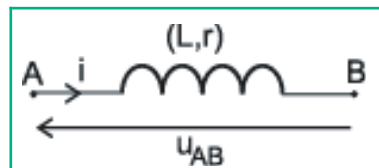


Fig.14a : Tension aux bornes d'une bobine.

### Remarque

Pour une variation très brusque de l'intensité  $i$  du courant électrique (coupure de courant par exemple), le terme  $L \frac{di}{dt}$

l'emporte sur le terme  $r i$ . Par conséquent, la tension aux

bornes de la bobine devient pratiquement égale à  $L \frac{di}{dt}$ .

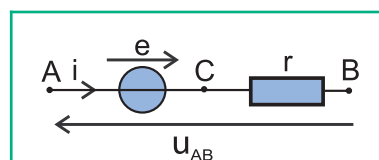


Fig.14b : Modèle équivalent

## 5 ÉNERGIE MAGNÉTIQUE EMMAGASINÉE DANS UNE BOBINE

### Manipulation

On réalise le montage de la figure 15 qui comporte une bobine (B) d'inductance  $L = 10 \text{ mH}$  (bobine de 500 spires par exemple) et de résistance interne  $r$ , un générateur de tension de f.e.m.  $E = 6 \text{ V}$ , une diode  $D$ , un condensateur de capacité  $C = 5 \mu\text{F}$ , un voltmètre numérique et un milliampèremètre.

Initialement, le voltmètre et le milliampèremètre n'indiquent rien. Quand on ferme l'interrupteur  $K$ , le milliampèremètre indique la circulation d'un courant continu d'intensité  $I = 240 \text{ mA}$  tandis que le voltmètre indique toujours une tension nulle aux bornes du condensateur. Après l'ouverture de l'interrupteur  $K$ , on constate que le voltmètre indique une tension  $u_{AB}$  négative.

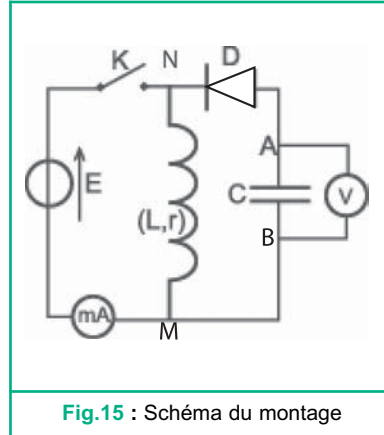


Fig.15 : Schéma du montage

### Questions

- 1°) Lorsque le circuit est fermé, la diode est-elle passante? justifier la réponse.
- 2°) Déterminer la résistance interne  $r$  de la bobine.
- 3°) Interpréter l'apparition de la tension négative  $u_{AB}$  aux bornes du condensateur après l'ouverture de l'interrupteur  $K$  et justifier l'utilisation du voltmètre numérique.
- 4°) Montrer que la bobine emmagasine de l'énergie quand on ferme  $K$ .
- 5°) Préciser l'importance de la diode dans un circuit renfermant une bobine.

### Interprétation

Initialement, les appareils de mesure utilisés dans le montage réalisé (Fig.15) n'indiquent rien parce que le condensateur ne porte aucune charge et le générateur d'alimentation est en circuit ouvert.

En fermant l'interrupteur  $K$ , la diode montée en inverse va empêcher tout courant de circuler dans la maille renfermant le condensateur; celui-ci reste déchargé.

En choisissant le sens allant de  $N$  vers  $M$  à travers la bobine comme sens positif du courant, la tension entre ses bornes

s'écrit :

$$u_{NM} = L \frac{di}{dt} + ri$$

Or, le courant débité par le générateur de tension dans la bobine est continu (d'intensité  $I = 240 \text{ mA}$  dans le cas particulier étudié). Donc,  $\frac{di}{dt} = 0$ , d'où  $u_{NM} = ri$ , ce qui signifie qu'en régime permanent, l'énergie mise en jeu par la bobine est une énergie consommée par effet Joule.

L'apparition d'une tension négative  $u_{AB}$  aux bornes du condensateur après ouverture de K ne peut s'expliquer que par une opération de charge due à la circulation d'un courant induit bref dans le même sens que le courant permanent qui circulait dans la bobine avant l'ouverture de K, ce qui est bien en accord avec la loi de Lenz. En d'autres termes, l'énergie électrique stockée par le condensateur est de l'énergie restituée par la bobine.

Mais, d'où provient celle-ci si la bobine ne fait que consommer de l'énergie par effet Joule, en régime permanent ?

En fait, à la fermeture de l'interrupteur K, l'intensité du courant passe rapidement de la valeur zéro à la valeur constante  $I$ , ce qui produit un phénomène d'auto-induction au niveau de la bobine : La puissance instantanée reçue par la bobine s'écrit :  $p = + u_{NM} \cdot i$ , ce qui donne :

$$p = r \cdot i^2 + Li \frac{di}{dt}$$

La puissance  $r \cdot i^2$ , toujours positive, est la puissance consommée par effet Joule. La puissance  $L \cdot i \cdot \frac{di}{dt}$  est algébrique.

Toutefois, au cours de la fermeture du circuit, elle ne peut être que positive car  $i$  et  $\frac{di}{dt}$  sont

de même signe. Donc, la bobine ne dissipe pas toute l'énergie qu'elle reçoit du générateur par effet Joule, elle en emmagasine une partie sous une forme qualifiée comme étant magnétique.

On montre<sup>⊙</sup> que l'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine d'inductance  $L$  s'écrit :

$$E_L = \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

$$\begin{aligned} \odot p &= r i^2 + Li \frac{di}{dt} = r i^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) \\ &\bullet r i^2 : \text{puissance dissipée par effet Joule} \\ &\bullet \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) : \text{puissance magnétique } p_L \\ \text{Or } p_L &= \frac{dE_L}{dt} \text{ . Donc, } E_L = \frac{1}{2} L \cdot i^2 . \end{aligned}$$

Si  $|i|$  diminue,  $p_L = L \cdot \frac{di}{dt}$  diminue, ce qui signifie que l'énergie magnétique diminue : la bobine restitue à l'extérieur un peu de l'énergie qu'elle a emmagasinée avec l'augmentation de  $|i|$ , elle joue ainsi le rôle de générateur.

C'est exactement ce qui se passe lors de l'ouverture du circuit ou  $i$  passe de la valeur  $I$  à zéro : la bobine restitue toute son énergie magnétique au condensateur qui la stocke à son tour sous forme d'énergie potentielle électrique, car telle qu'elle est branchée, la diode l'empêche de se décharger dans la bobine.

### Conclusion

Tant qu'elle est parcourue par un courant électrique, la bobine inductive est un réservoir d'énergie dite magnétique.

### Remarque

L'énergie magnétique ne peut rester stockée dans une bobine en l'absence de courant. Par contre, l'énergie potentielle électrique reste stockée dans le condensateur même hors circuit. Donc, le condensateur est un réservoir permanent d'énergie, tandis que la bobine en est un réservoir temporaire.

### Exemple de manifestation de l'énergie magnétique

#### L'étincelle de rupture

Etant liée à l'intensité du courant circulant dans la bobine, l'énergie magnétique qui y est emmagasinée se trouve cédée brusquement à l'extérieur lors de l'ouverture du circuit de la

bobine : du fait que la durée de transfert est très courte (de l'ordre de 1ms), dans ce cas où le courant est continu, la f.e.m. d'auto-induction peut faire apparaître une tension très élevée aux bornes de la bobine, suffisante pour créer un champ électrique important entre les contacts de l'interrupteur. Ce champ électrique ionise des molécules de l'air et provoque des étincelles appelées étincelles de rupture.

Ces étincelles de rupture peuvent être dangereuses. Par conséquent, il faut prendre les précautions nécessaires dans tout montage comportant une ou plusieurs bobines, surtout en courant continu. Pour les éviter, on peut insérer dans le montage, des condensateurs par exemple afin d'y récupérer l'énergie magnétique transférée lors de toute rupture de courant (accidentelle ou non). Par contre, l'énergie magnétique transférée par une bobine à l'environnement lors d'une variation brusque de l'intensité du courant est exploitée dans le fonctionnement de plusieurs appareils.

**Exemples :** Allumeur électrique de cuisinières à gaz, dispositif de soudage par arc électrique, dispositif d'amorçage de tube néon...

## 6 APPLICATIONS DE L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Les applications de l'induction électromagnétique sont très nombreuses. Ici, on cite essentiellement les alternateurs qui sont utilisés pour la production du courant électrique alternatif et les transformateurs pour élever ou abaisser une tension alternative.

### 6.1- LES ALTERNATEURS

Un alternateur est un appareil qui transforme de l'énergie mécanique en énergie électrique. La production d'électricité par l'alternateur est liée à la variation du champ magnétique dans lequel baigne le circuit induit. Il existe deux types d'alternateurs: l'alternateur à induit mobile et l'alternateur à induit fixe. Comme celui d'une centrale thermique ou nucléaire, l'alternateur d'une voiture par exemple (Fig.16) est à induit fixe (le stator). L'inducteur est un aimant cylindrique multipolaire (le rotor). La rotation de l'aimant fait apparaître au niveau du circuit induit (bobinage sur la partie fixe) une f.e.m. induite. La fréquence de la tension alternative produite par l'alternateur est liée à la fréquence de rotation de l'inducteur.



Fig.16 : Alternateur d'une voiture

### 6.2- LES TRANSFORMATEURS

Comme on a vu en deuxième année secondaire, le transformateur (Fig.17) est un quadripôle qui permet d'abaisser ou d'augmenter une tension alternative. Son principe de fonctionnement est basé sur le phénomène d'induction électromagnétique. En effet, les variations de l'intensité du courant dans le circuit primaire font apparaître au niveau du circuit secondaire une f.e.m. induite. Ainsi, on comprend pourquoi, les transformateurs ne peuvent fonctionner qu'en courant alternatif ; en courant continu, le primaire créerait un champ magnétique constant au cours du temps. Par conséquent, il ne pourrait rien induire dans le secondaire.



Fig.17 : Transformateur

# LE DIPÔLE RL

On appelle dipôle RL l'association en série d'une bobine d'inductance  $L$ , de résistance  $r$  et d'un résistor de résistance  $R_0$ ,  $R$  étant la résistance totale  $R_0 + r$  du dipôle.

## 1 RÉPONSE D'UN DIPÔLE RL À UN ÉCHELON DE TENSION

### 1.1- ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

#### Manipulation

Avec un générateur de tension idéal de f.e.m.  $E = 6 \text{ V}$ , une bobine d'inductance  $L = 0,1 \text{ H}$  et de résistance  $r = 10 \Omega$ , un résistor de résistance  $R_0 = 40 \Omega$ , une diode  $D$  et un interrupteur  $K$ , on réalise le montage schématisé sur la figure 18. Puis, on relie les points A et B du circuit respectivement aux entrées  $Y_1$  et  $Y_2$  d'un oscilloscope à mémoire, (ou à une interface d'acquisition informatique de données).

En fermant l'interrupteur  $K$ , on obtient sur l'écran de l'oscilloscope les chronogrammes (1) et (2) de la figure 19.

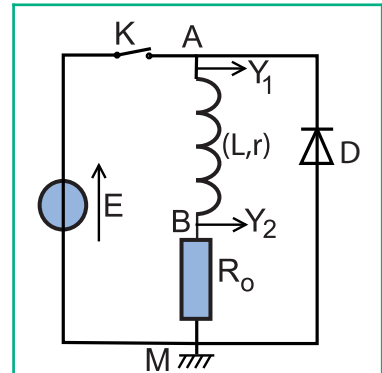


Fig.18 : Schéma du montage

#### Questions

1°) La réponse visualisée du dipôle RL à un échelon de tension représente une intensité d'un courant qu'on demande d'identifier.

2°) Identifier parmi les chronogrammes (1) et (2) celui qui représente l'intensité  $i(t)$  du courant électrique circulant dans la bobine.

3°) Déterminer graphiquement la valeur maximale  $I_0$  de l'intensité du courant qui s'établit dans le dipôle RL et la comparer à la valeur  $\frac{E}{R}$ .

4°) Quelle est la raison pour laquelle le courant continu s'établit dans la bobine avec un certain retard par rapport à l'instant de fermeture du circuit ?

5°) Quelle serait l'allure de  $u_{BM}(t)$  ainsi que sa valeur maximale si la résistance interne de la bobine était nulle ?

6°) Quel est le rôle de la diode  $D$  insérée dans le montage de la figure 18 ?

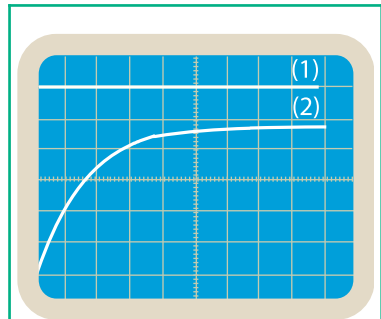


Fig.19 : Oscillogrammes des tensions  $u_{AM}$  et  $u_{BM}$

#### Interprétation

Dès que l'on ferme l'interrupteur  $K$ , il s'établit instantanément aux bornes A et M du dipôle RL une tension  $U_{AM} = E$ , tandis que la tension  $u_{R_0}$  (chronogramme 2) augmente progressivement à partir de zéro jusqu'à atteindre, au bout d'une fraction de seconde, une valeur  $U_0$  inférieure à  $E$ : c'est le régime transitoire. Une fois,  $u_{R_0}$  devient égale à  $U_0$ , elle reste constante : c'est le régime permanent (Fig.20).

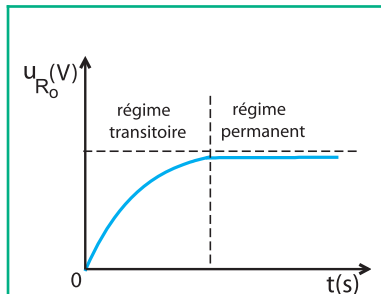


Fig.20 : Evolution de  $u_{R_0}$  au cours du temps



En prenant comme sens positif du courant le sens orienté de B vers M (Fig.18), on a  $u_{BM} = u_{R_0} = R_0 \cdot i$ , ce qui signifie  $i = \frac{u_{R_0}}{R_0}$ .

Donc, la courbe représentant  $u_{BM}(t)$  traduit bien l'évolution de l'intensité  $i$  du courant parcourant la bobine. On déduit alors de  $I_0 = \frac{U_0}{R_0}$  son allure que le courant continu d'intensité ne s'établit pas instantanément dans la bobine.

Le retard (ou le régime transitoire) est dû à la bobine qui s'oppose à la variation de  $i$  de zéro à la valeur  $I_0$ , grâce à la f.e.m. auto-induite qui y naît avec la fermeture du circuit.

Ayant les valeurs de  $E$ ,  $r$  et  $R_0$ , on peut constater que  $I_0 = \frac{E}{R}$ , ce qui signifie qu'en régime permanent, on a aux bornes du dipôle RL :  $u_{AM} = E = rI + R_0 I$ . Or  $R_0 I = u_{R_0}$ , ce qui donne  $u_{AB} = r I$ . Alors, en régime permanent, la bobine n'est plus le siège d'une f.e.m. d'auto-induction ; elle se comporte alors comme un résistor de résistance égale à sa résistance interne  $r$ .

Si  $r = 0$ ,  $u_{AB} = 0$ . Or  $u_{AB} + u_{BM} = E$ , d'où  $u_{R_0} = u_{BM} = E$ .

### Conclusion

La réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension  $E$  est un courant continu d'intensité  $I_0 = \frac{E}{R}$ . Celui-ci ne s'établit pas instantanément à cause de l'inductance  $L$  de la bobine. Autrement dit, la bobine s'oppose à l'établissement du courant électrique dans la portion de circuit où elle se trouve insérée.

## 1.2- ÉTUDE THÉORIQUE

### Mise en équation

En régime transitoire et durant l'établissement du courant, en réponse à l'échelon de tension, le circuit de la figure 18 est équivalent à celui de la figure 21.

La loi des mailles s'écrit :  $u_{AB} + u_{BM} - E = 0$

On obtient ainsi :  $u_{AB} + u_{BM} = E$  (1)

Avec le sens positif choisi pour le courant électrique, la tension aux bornes de la bobine d'inductance  $L$  et de résistance interne

$r$  s'écrit :  $u_{AB} = L \frac{di}{dt} + ri$ .

La tension aux bornes du résistor s'écrit :  $u_{BM} = R_0 \cdot i$

L'équation (1) devient :  $L \frac{di}{dt} + Ri = E$  (2), avec  $R = R_0 + r$

En divisant par  $L$ , on obtient :  $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$ .

La même équation peut s'écrire :  $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{E}{L}$  (3), avec  $\tau = \frac{L}{R}$ .

Cette équation différentielle régit l'évolution dans le temps de l'intensité  $i$  du courant circulant dans le dipôle RL soumis à un échelon de tension  $E$ .

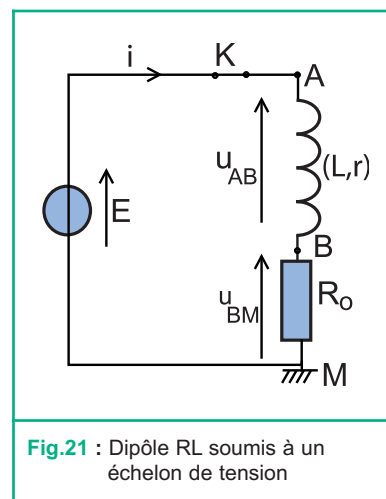


Fig.21 : Dipôle RL soumis à un échelon de tension

## Expression de l'intensité du courant

La forme de l'équation différentielle (3) à coefficients constants et à second membre non nul est semblable à celle de l'équation différentielle  $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}$  (équation (1) de la page 22) régissant l'évolution de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur d'un dipôle **RC** soumis à un échelon de tension **E**.

La solution de l'équation différentielle (3) en  $i(t)$  peut être proposée sous la forme :  $i(t) = Ae^{-\alpha t} + B$  où  $A$ ,  $B$  et  $\alpha$  sont des constantes à déterminer.

A  $t = 0$ , aucun courant ne circule dans le circuit, donc  $i(t = 0) = A + B = 0$  d'où  $A = -B$ . Il vient :  $i(t) = A(e^{-\alpha t} - 1)$ .

Par suite, la dérivée, par rapport au temps de  $i(t)$  s'écrit :

$$\frac{di}{dt} = -\alpha A \cdot e^{-\alpha t}$$

En remplaçant  $i(t)$  et  $\frac{di}{dt}$  par leur expression dans l'équation différentielle (3), on obtient :  $-\frac{A}{\tau} = \frac{E}{L}$ , d'où  $A = -\frac{E}{R}$

Lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $e^{-\alpha t}$  tend vers zéro et l'équation (4)

$$\text{donne: } Ae^{-\alpha t} \left( \frac{1}{\tau} - \alpha \right) - \frac{A}{\tau} = \frac{E}{L} \quad (4)$$

D'autre part, on a :  $Ae^{-\alpha t} \left( \frac{1}{\tau} - \alpha \right) = 0$  quel que soit  $t$ .

Donc,  $\frac{1}{\tau} - \alpha = 0$ , ce qui signifie  $\alpha = \frac{1}{\tau}$ .

D'où,  $i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ , avec  $\tau = \frac{L}{R}$

La courbe représentant  $i(t)$  est celle de la figure 22 (courbe pouvant être tracée à l'ordinateur avec un logiciel approprié).

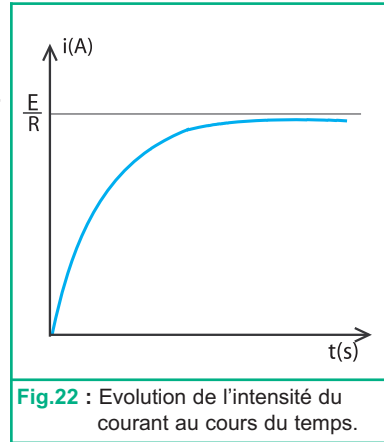


Fig.22 : Evolution de l'intensité du courant au cours du temps.

## Conclusion

La réponse d'un dipôle RL en courant est constituée de deux régimes : un régime transitoire au cours duquel l'intensité augmente en exponentielle à partir de la valeur zéro en tendant vers la valeur  $I_0 = \frac{E}{R}$  et un régime permanent caractérisé par un courant continu d'intensité  $I_0$ .

## Épression de la tension aux bornes de la bobine

La tension aux bornes de la bobine s'écrit :

$$u_{AB} = L \frac{di}{dt} + ri. \text{ Or } i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \text{ on a donc :}$$

$$u_{AB} = L \frac{E}{R\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + r \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + r \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

L'évolution de la tension  $u_{AB}$ , aux bornes de la bobine, au cours du temps est donnée par la figure 23.

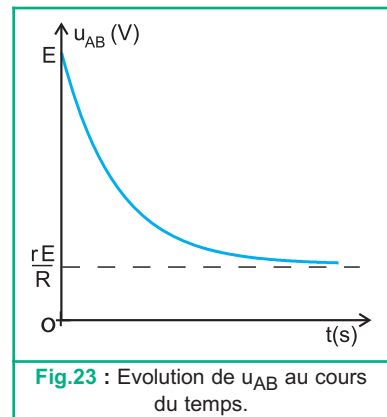


Fig.23 : Evolution de  $u_{AB}$  au cours du temps.

$${}^{\infty}u_{AB}(0) = E$$

$${}^{\infty}\lim_{t \rightarrow \infty} u_{AB} = \frac{r}{R}E$$

### Remarque

Si  $r = 0$ , on aura :  $u_{AB} = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$ . Dans ces conditions  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_{AB} = 0$ .

### Questions

1°) Reprendre le schéma du montage de la figure 18 et y introduire les modifications de branchement indispensables à la visualisation de la tension  $u_{AB}$  aux bornes de la bobine au lieu de celle aux bornes du résistor.

2°) Refaire l'expérience et vérifier que la courbe  $u_{AB}(t)$  enregistrée à l'écran de l'oscilloscope est la même que la courbe théorique de la figure 23.

### Conclusion

Quand on soumet un dipôle RL à un échelon de tension  $E$ , il apparaît instantanément aux bornes de la bobine une tension égale à  $E$  mais qui décroît selon un régime transitoire pour s'annuler si la résistance de la bobine est nulle.

## 2 LA RUPTURE DU COURANT DANS UN DIPÔLE RL

### 2.1- ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

#### Manipulation

On reprend le montage de la figure 18 tel quel. Le régime permanent y étant établi, on ouvre l'interrupteur  $K$ . L'oscilloscope enregistre alors le seul chronogramme de la figure 24.

### Questions

1°) Expliquer l'allure de la courbe de la tension  $u_{R_0}$ .

2°) La rupture du courant dans le circuit est-elle instantanée ? Pourquoi ?

3°) Que se passerait-il au niveau de l'interrupteur  $K$  s'il n'y avait pas de diode ?

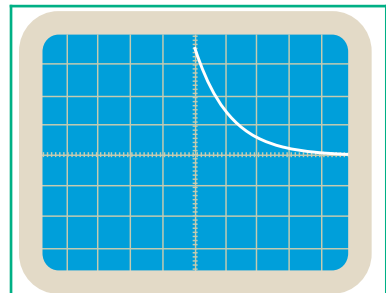


Fig.24 : Oscillogramme de  $u_{R_0}$

#### Interprétation

Lorsque le circuit est fermé, en régime permanent, la tension aux bornes du dipôle RL est  $u_{AM} = E = R I$ ,  $u_{BM} = R_0 I$  et la diode n'est pas passante. Lorsqu'on ouvre  $K$ , le courant ne s'annule pas instantanément à cause de la bobine qui s'oppose à toute variation de l'intensité du courant avec la f.e.m. auto-induite dont elle est le siège. Celle-ci produit dans le circuit formé par la bobine, le résistor et la diode, un courant transitoire qui, d'après la loi de Lenz, va circuler dans le même sens que celui établi avant la rupture.

En l'absence de la diode, il apparaîtra aux bornes du dipôle RL une tension élevée qui provoquera au niveau de l'interrupteur K une étincelle de rupture. Par conséquent, comme il a été signalé précédemment, il faut absolument éviter de réaliser de telles expériences sans la diode (surtout avec une bobine de grande inductance).

**Exemple :** Avec  $L = 1 \text{ H}$ ,  $I = 500 \text{ mA}$ ,

$$e = -L \frac{di}{dt} \simeq -L \frac{\Delta i}{\Delta t} \quad \Delta t \simeq 1 \text{ ms, ce qui donne } e \simeq 500 \text{ V !}$$

### Conclusion

Lors de la rupture du courant dans un circuit comportant une bobine, celle-ci a pour effet d'assurer la continuité du courant électrique par une annulation progressive de son intensité.

## 2.2- ÉTUDE THÉORIQUE

En ouvrant l'interrupteur K, le circuit de la figure 18 devient équivalent à celui de la figure 25 où le résistor, la bobine et la diode forment ensemble un circuit série.

La loi des mailles s'écrit :  $u_{AB} + u_{BM} = 0$  (1)

avec le sens positif choisi pour le courant (Fig.25), on a :

$$u_{AB} = L \frac{di}{dt} + r.i \quad \text{et} \quad u_{BM} = R_o.i$$

La relation (1) devient :  $L \frac{di}{dt} + R.i = 0$  avec  $R = R_o + r$ .

D'où :  $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}.i = 0$  (2), avec  $\tau = \frac{L}{R}$  : équation différentielle

en  $i$  à coefficient constant et à second membre nul. Elle admet une solution de la forme :  $i(t) = A.e^{-\alpha t}$  où les valeurs des coefficients constants  $A$  et  $\alpha$  sont déterminées par les conditions initiales.

A  $t = 0$ ,  $i(0) = I_0$ . Or, juste à l'ouverture du circuit ( $t = 0$ ), on a :

$$I_0 = \frac{E}{R}. \text{ Donc, } A = \frac{E}{R}$$

On remplace  $i(t)$  par son expression dans l'équation différentielle (2) et par identification, on écrit :

$$-\alpha A e^{-\alpha t} + \frac{1}{\tau} A e^{-\alpha t} = 0, \quad \text{d'où} \quad A e^{-\alpha t} \left(-\alpha + \frac{1}{\tau}\right) = 0 \quad \forall t.$$

$$\text{Donc } \alpha = \frac{1}{\tau}. \text{ D'où } i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } R = R_o + r \text{ et } \tau = \frac{L}{R}.$$

Le tracé de la courbe avec un logiciel approprié donne le graphique de la figure 26.

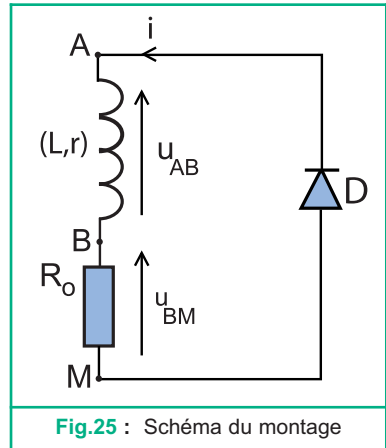


Fig.25 : Schéma du montage

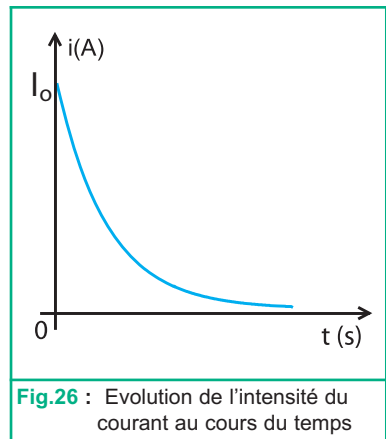


Fig.26 : Evolution de l'intensité du courant au cours du temps

### Questions

1°) Montrer par deux méthodes différentes que, lors de la rupture du courant dans le dipôle RL du circuit schématisé dans la figure 25, la tension aux bornes de la bobine évolue selon la loi :  $u_{AB} = \left(\frac{r}{R} - 1\right) E \cdot e^{-t/\tau}$ .

2°) Vérifier que la courbe d'évolution de  $u_{AB}$  est celle de la figure 27.

3°) Comparer la valeur de  $u_{AB}$  à  $t = 0$  avec la valeur qu'elle avait juste avant l'ouverture du circuit et en déduire que si  $r = 0$ ,  $u_{AB}$  passe de zéro à la valeur  $(-E)$ .

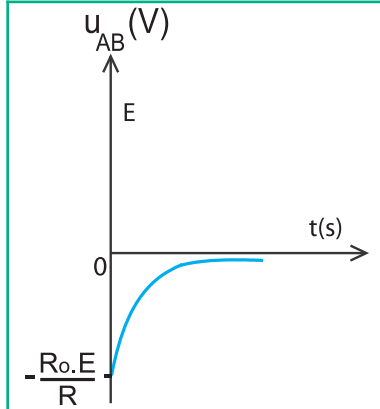


Fig.27 : Evolution de  $u_{AB}$  au cours du temps

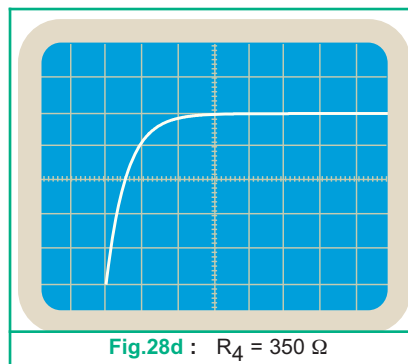
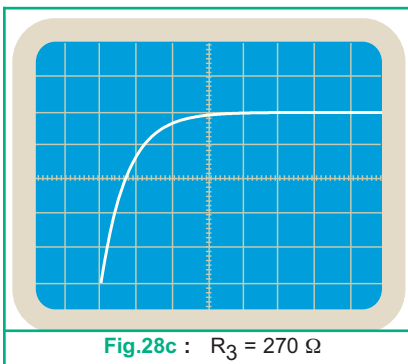
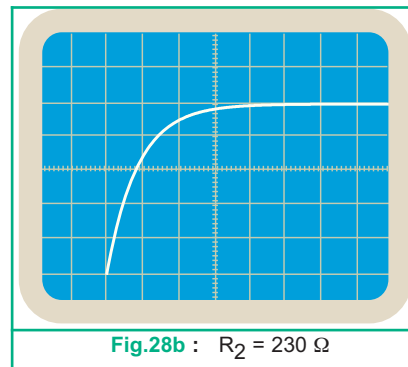
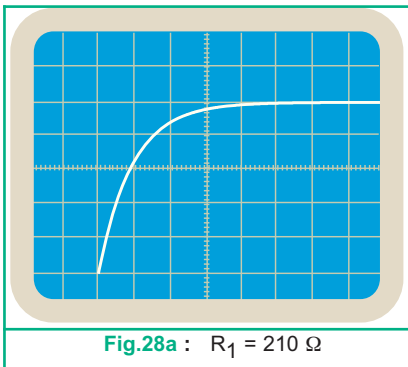
## 3 INFLUENCE DES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES D'UN DIPÔLE RL SUR LE RÉGIME TRANSITOIRE

### 3.1- INFLUENCE DE LA RÉSISTANCE TOTALE R

#### Manipulation

On reprend le montage de la figure 18 afin de visualiser de nouveau la réponse du dipôle RL en courant avec différentes valeurs de R.

En établissant plusieurs fois le régime permanent du dipôle RL avec des valeurs différentes de R et ce en remplaçant à chaque fois le résistor par un autre de résistance  $R_0$  différente de celle du précédent, on obtient la série d'oscillogrammes de la figure 28, visualisés avec  $L = 0,2 \text{ H}$  et respectivement pour  $R_1 = 210 \ \Omega$  ;  $R_2 = 230 \ \Omega$  ,  $R_3 = 270 \ \Omega$  et  $R_4 = 350 \ \Omega$ , les sensibilités étant réglées comme suit : horizontalement :  $1\text{ms/div}$  et verticalement :  $1\text{V/div}$ .



## Questions

1°) Dresser un tableau consignnant les durées  $t$  au bout desquelles  $u_{R_0}$  atteint une valeur arbitraire 4V par exemple.

R (W)	210	230	270	350
t (ms)				

2°) À l'aide des résultats trouvés :

- préciser, qualitativement, l'influence de la valeur de la résistance totale  $R$  sur la durée  $t$  écoulée pour que  $u_{R_0}$  atteigne la valeur 4V.
- montrer que la durée  $t$  est inversement proportionnelle à  $R$ .

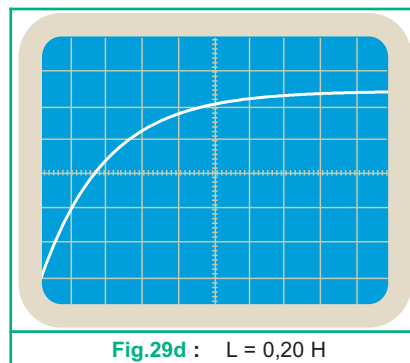
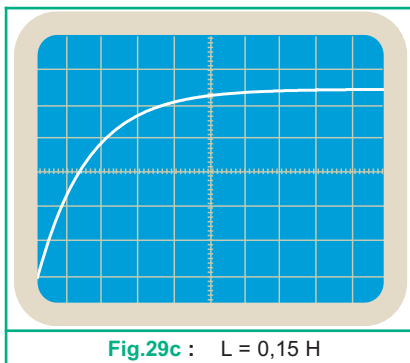
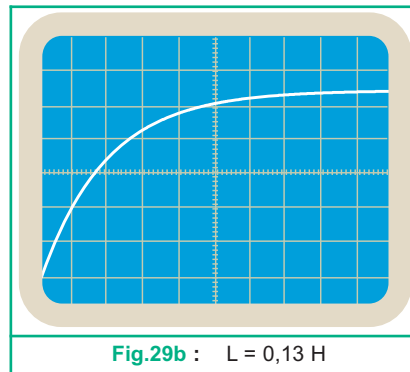
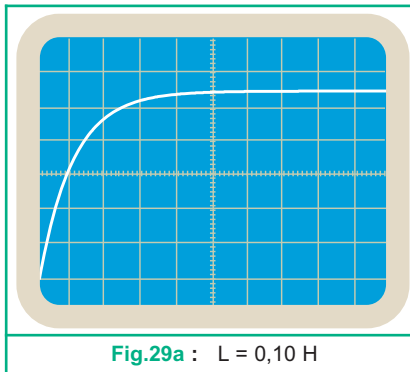
## 3.2- INFLUENCE DE L'INDUCTANCE L

### Manipulation

On refait la même expérience, mais cette fois, avec une bobine d'inductance  $L$  réglable<sup>⊙</sup>. En faisant varier  $L$ , on change éventuellement le résistor de résistance  $R_0$  dans le but de maintenir  $R = R_0 + r$  constante.

On obtient la série d'oscillogrammes de la figure 29, visualisés avec  $R = 210 \Omega$  et respectivement pour :  $L_1 = 0,10 \text{ H}$  ;  $L_2 = 0,13 \text{ H}$ ,  $L_3 = 0,15 \text{ H}$  et  $L_4 = 0,20 \text{ H}$ , les sensibilités étant réglées comme suit : horizontalement : 0.5 ms/div et verticalement: 1 V/div.

⊙ Bobine dépourvue de tout noyau de fer doux.



**Questions**

1°) a- Dresser un tableau consignnant les durées  $t$  au bout desquelles  $u_{R_0}$  atteint la valeur 4 V par exemple.

L (H)	0,10	0,13	0,15	0,20
t (ms)				

b- À l'aide des résultats trouvés :

- préciser, qualitativement, l'influence de la valeur de l'inductance  $L$  de la bobine sur la durée  $t$  au bout de laquelle la tension  $u_{R_0}$  atteint la valeur 4 V.
- montrer que la durée  $t$  est proportionnelle à  $L$ .

**3.3- CONSTANCE DE TEMPS D'UN DIPÔLE RL****Notion de constante de temps**

On vient de montrer que toute valeur de l'intensité  $i$  du courant établi dans le circuit RL est atteinte au bout d'une durée  $t$  :

- proportionnelle à  $L$ , lorsque la résistance totale  $R$  n'est pas modifiée.
- inversement proportionnelle à  $R$ , lorsque l'inductance  $L$  n'est pas modifiée.

Donc, la durée d'établissement du courant dans le circuit est proportionnelle au quotient  $\frac{L}{R}$ .

De ce fait, le quotient  $\frac{L}{R}$  est appelé constante de temps du dipôle RL ; on la note  $\tau$ .

**Remarque**

On sait que la résistance  $R$  a la dimension du quotient d'une tension par une intensité de courant et que  $L$  a celle de  $\frac{U \cdot t}{I}$ .

Donc le quotient  $\frac{L}{R}$  a la dimension d'un temps, ce qui justifie encore son appellation de constante de temps.

$$\tau = \frac{L}{R} : \text{constante de temps}$$

**Définition**

La constante de temps  $\tau$  est une grandeur caractéristique du dipôle RL, elle renseigne sur le retard avec lequel s'établit le régime permanent ou la rupture du courant dans le dipôle.  $\tau$  ayant la dimension d'un temps, elle s'exprime en seconde.

### Détermination de la constante de temps

Les méthodes possibles pour déterminer la constante de temps sont les mêmes que celles utilisées dans le cas du dipôle RC.

#### ► Par calcul direct

Connaissant les valeurs de L et de R, on peut calculer directement la valeur de la constante de temps  $\tau = \frac{L}{R}$ .

#### ► Détermination graphique (1<sup>ère</sup> méthode)

Sur la courbe de  $i(t)$  représentant l'établissement du régime permanent, on trace la tangente au point d'abscisse  $t = 0$ . L'abscisse du point d'intersection de la tangente avec l'asymptote  $I_o = \frac{E}{R}$  est  $\tau$ . (Fig.30)

#### Justification :

L'équation de la tangente à la courbe  $i = f(t)$  à  $t = 0$  est  $i = k t$ ,  $k$  étant son coefficient directeur dont la valeur est donnée par

$$k = \frac{di}{dt}(t = 0) = \frac{I_o}{\tau}$$

Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe  $i = f(t)$  à  $t = 0$  a pour équation :  $i(t) = \frac{I_o}{\tau} t$

L'intersection de la tangente avec l'asymptote correspond donc

$$\text{à } i(t) = \frac{I_o}{\tau} t = I_o, \text{ d'où } t = \tau.$$

#### Remarque

La même méthode de détermination graphique de  $\tau$  s'applique à la courbe  $i(t)$  relative à la rupture du courant. En effet, la tangente à l'origine des temps coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse  $\tau$  (Fig.31).

#### ► Détermination graphique (2<sup>ème</sup> méthode)

En remplaçant  $t$  par  $\tau$  dans l'expression de  $i(t)$  représentant l'établissement du régime permanent, on obtient :

$$i(\tau) = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) = 0,63 \frac{E}{R}$$

Ainsi, par lecture graphique de l'abscisse du point de la courbe  $i(t)$  d'ordonnée  $0,63 \frac{E}{R}$ , on obtient la valeur de  $\tau$  (Fig.32).

Dans le cas de la rupture du courant dans le dipôle RL et en remplaçant  $t$  par  $\tau$  dans l'expression de  $i(t)$ , on obtient :

$$i(\tau) = \frac{E}{R} e^{-1} = 0,37 \frac{E}{R}$$

$\tau$  est alors l'abscisse du point de la courbe représentant  $i(t)$  d'ordonnée  $0,37 \frac{E}{R}$  (Fig.33).

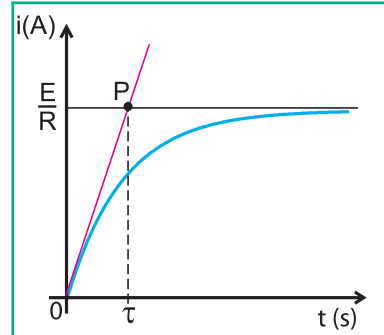


Fig.30 : Détermination de la constante de temps.

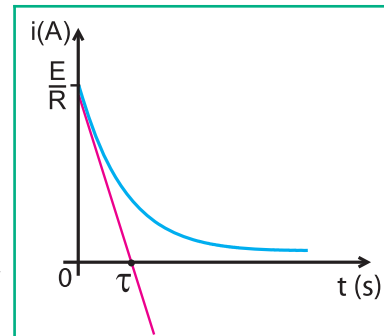


Fig.31 : Détermination de la constante de temps.

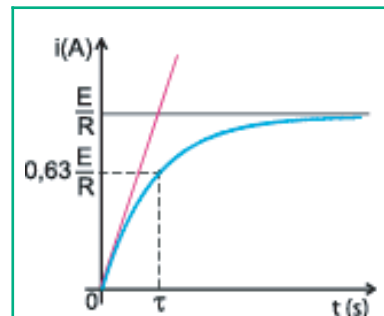


Fig.32 : Autre méthode de détermination graphique  $\tau$

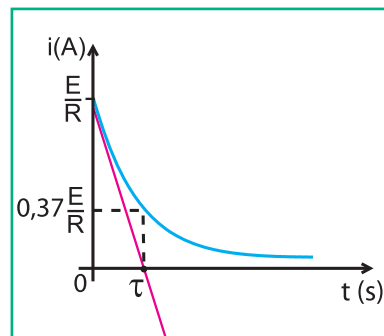


Fig.33 : Autre méthode de détermination graphique  $\tau$



# L'essentiel

- Une bobine est un dipôle électrocinétique constitué généralement par un enroulement cylindrique dans le même sens, de fil conducteur recouvert d'une gaine isolante.
- Toute variation de champ magnétique à proximité d'une bobine en circuit fermé produit un courant électrique appelé courant induit.
- Loi de Lenz : Le courant induit a un sens tel qu'il s'oppose par ses effets à la cause qui lui donne naissance.
- Tout courant induit est dû à une f.e.m. délocalisée appelée f.e.m. d'induction.
- Toute bobine parcourue par un courant variable d'intensité  $i$  est le siège d'une f.e.m.

d'auto-induction :

$$e = -L \frac{di}{dt}, \text{ où } L \text{ est l'inductance de la bobine.}$$

- L'auto-induction traduit l'opposition d'une bobine à toute variation du courant électrique.
- Pour une bobine d'inductance  $L$ , de résistance interne  $r$ , parcourue de sa borne A à sa borne B par un courant variable d'intensité  $i$ , la tension à ses bornes s'écrit :

$$u_{AB} = L \frac{di}{dt} + ri$$

- L'énergie magnétique emmagasinée dans une bobine parcourue par un courant d'intensité  $i$  est :

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2$$

- L'inductance d'une bobine est une grandeur caractérisant sa faculté d'emmagasiner de l'énergie magnétique.
- Etant liée à l'intensité du courant, l'énergie magnétique stockée par une bobine est transférée à l'extérieur du circuit avec la rupture du courant.
- Un dipôle RL soumis à un échelon de tension de valeur  $E$  est parcouru par un courant continu qui ne s'établit pas brusquement, mais à la suite d'un régime transitoire, selon

la loi :

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \text{ où } \tau = \frac{L}{R} \text{ est la constante de temps du dipôle RL.}$$

- Lors de la rupture du courant dans un circuit comportant une bobine, l'intensité  $i$  du courant ne s'annule pas brusquement, mais elle diminue de manière continue selon la loi :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

# Exercices

## Exercice résolu

### ÉNONCÉ

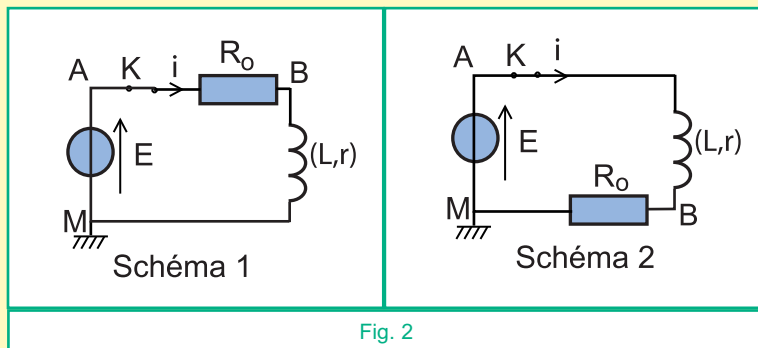
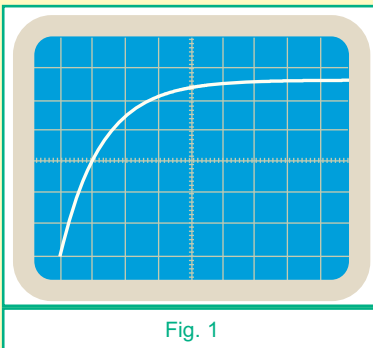
Un circuit série comporte un générateur maintenant entre ses bornes une tension constante  $E$  de 6 V, un interrupteur  $K$ , une bobine d'inductance  $L$  et de résistance interne  $r$  et un résistor de résistance  $R_0 = 140 \Omega$ .

Afin d'étudier l'évolution de l'intensité du courant susceptible de circuler dans le circuit, on utilise un oscilloscope à mémoire.

En fermant l'interrupteur  $K$ , on obtient l'oscillogramme de la figure 1, les sensibilités horizontale et verticale étant réglées respectivement à 2 ms/div et 1 V/div.

1°) - Préciser parmi les schémas (1) et (2) de la figure 2, celui du montage qui a servi à l'enregistrement de l'oscillogramme de la figure 1.

- Y ajouter les connexions faites avec l'oscilloscope.



2°) Expliquer qualitativement l'allure de l'oscillogramme de la figure 1.

3°) a- Montrer que la tension  $u$  aux bornes du résistor est régie par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{R_0}{L} E, \text{ où } \tau = \frac{L}{R} \text{ avec } R = R_0 + r.$$

b- Sachant que cette équation admet une solution de la forme :  $u = Ae^{-\alpha t} + B$ , déterminer les constantes  $A, B$  et  $\alpha$ .

4°) Déterminer graphiquement les valeurs de  $\tau$ ,  $r$  et  $L$ .

5°) Dédire de l'expression de  $u$ , celle de l'intensité  $i$  du courant parcourant le dipôle RL.

## SOLUTION

1°) Avec un oscilloscope, on ne peut visualiser directement que les tensions électriques. Pour visualiser l'évolution temporelle de l'intensité  $i$  d'un courant, il faut brancher l'oscilloscope aux bornes du résistor de résistance  $R_o$  où  $u = R_o \cdot i$ . Pour ce faire, le résistor doit avoir une borne reliée à la masse. Donc, le schéma du montage avec lequel est visualisée la tension  $u$  est le schéma 2 en reliant le point B à l'une des entrées de l'oscilloscope (Fig.3).

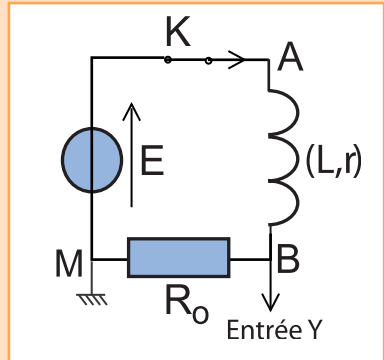


Fig.3

2°) La tension  $u$  est liée à l'intensité  $i$  du courant débité par le générateur dans le circuit par la relation  $u = R_o \cdot i$ . Or,  $i$  ne peut augmenter que progressivement à cause de la bobine qui s'oppose à sa variation, ce qui explique l'allure de la courbe représentant l'évolution de  $u$  au cours du temps.

3°) a- Pour le circuit série réalisé, la loi des mailles s'écrit :

$$u_{AB} + u_{BM} + u_{MA} = 0$$

ce qui signifie  $u_{BM} + u_{AB} = u_{AM}$ .

Avec le sens positif choisi pour le courant (Fig.3), on a :

$$u + ri + L \frac{di}{dt} = E \text{ où } u = u_{BM}.$$

$$\text{Or, } u = R_o i, \text{ ce qui signifie } i = \frac{u}{R_o}. \text{ D'où } u + \frac{r}{R_o} u + \frac{L}{R_o} \frac{du}{dt} = E.$$

$$u \left( 1 + \frac{r}{R_o} \right) + \frac{L}{R_o} \frac{du}{dt} = E$$

$$1 + \frac{r}{R_o} = \frac{R}{R_o} \text{ car } R = R_o + r, \text{ d'où : } \frac{du}{dt} + \frac{R}{L} u = \frac{R_o}{L} E.$$

$$\text{Finalement, on a : } \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{R_o}{L} E \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

$$\mathbf{b - } u = Ae^{-\alpha t} + B,$$

$$\text{à } t = 0, u = A + B = 0. \text{ Donc, } B = -A.$$

$$\text{D'où } u = B(1 - e^{-\alpha t}).$$

$$\frac{du}{dt} = \alpha B e^{-\alpha t}.$$

L'équation différentielle établie précédemment s'écrit donc :

$$\alpha B e^{-\alpha t} + \frac{B}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) = \frac{R_o}{L} E$$

$$B \left( \alpha - \frac{1}{\tau} \right) e^{-\alpha t} + \frac{B}{\tau} = \frac{R_o}{L} E$$

Lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $e^{-\alpha t}$  tend vers zéro, ce qui donne :

$\frac{B}{\tau} = \frac{R_o}{L}E$ , d'où  $B = \frac{R_o}{R}E$  et l'équation différentielle devient :

$B(\alpha - \frac{1}{\tau})e^{-\alpha t} = 0$ . Cette équation est valable quel que soit  $t$ .

Donc,  $(\alpha - \frac{1}{\tau}) = 0$ , ce qui signifie  $\alpha = \frac{1}{\tau}$ .

Finalement, on a :  $u = \frac{R_o}{R}E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

4°) On a  $U_o = \frac{R_o}{R}E$ , ce qui équivaut  $\frac{R_o + r}{R_o} = \frac{E}{U_o}$ , d'où  $r = (\frac{E}{U_o} - 1)R_o$ .

Donc, pour déterminer graphiquement  $r$ , il suffit d'avoir la valeur de la tension  $U_o$ . Celle-ci est l'ordonnée du point d'intersection de l'asymptote horizontale à la courbe avec l'axe des ordonnées, graphiquement  $U_o = 5,6$  V.

AN :  $r = 10 \Omega$

$u(\tau) = U_o(1 - \frac{1}{e}) = 0,632 U_o = 3,45$  V.

En portant  $u = 3.54$  V sur l'axe des tensions,

la projection sur l'axe des temps donne :  $\tau = 2$  ms

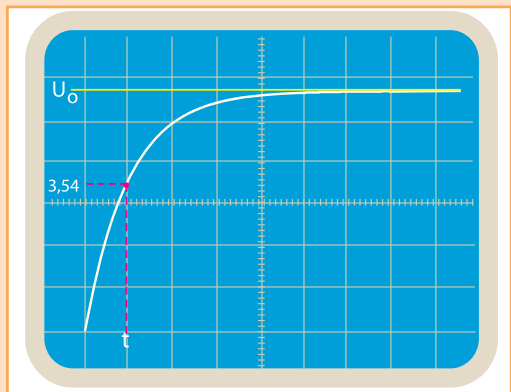
$\tau = \frac{L}{R}$  ce qui signifie  $L = \tau R$ .

AN :  $L = 300$  mH

5°)  $u = R_o i$  ce qui signifie  $i = \frac{u}{R_o}$ .

Or,  $u = \frac{R_o}{R} E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ .

D'où,  $i = I_o(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  avec  $I_o = \frac{E}{R} = 0,04$  A.



# Exercices à résoudre

## Tests rapides des acquis

### 1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

- 1°) Une bobine placée dans un champ magnétique variable est le siège d'une f.e.m. induite.
- 2°) Toute variation du courant électrique dans un circuit donne naissance à une f.e.m. induite.
- 3°) L'introduction d'un noyau de fer doux dans une bobine fait diminuer son inductance  $L$ .
- 4°) Pour abaisser la valeur d'une tension continue, on peut utiliser un transformateur.
- 5°) La constante de temps d'un dipôle RL caractérise la durée du régime transitoire.

- 6°) Pour augmenter la durée du régime transitoire dans un circuit RL, on fait augmenter la résistance totale du circuit.
- 7°) Lors de l'établissement du courant électrique dans un circuit RL, la tension aux bornes de la bobine diminue et tend vers une limite.
- 8°) Lors de l'ouverture de l'interrupteur d'un circuit RL, l'intensité du courant électrique ne subit pas une discontinuité.

### 2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la (ou les) proposition(s) juste(s).

■ I- Une bobine inductive est un dipôle électrocinétique qui :

a- s'oppose aux variations de la tension à ses bornes.

b- s'oppose aux variations de l'intensité du courant qui y circule.

c- est équivalent, en courant continu, à un résistor de résistance égale à sa résistance interne.

■ II- La tension  $u_{AB}$  aux bornes d'une bobine parcourue par un courant de B vers A s'écrit :

■ III- L'inductance  $L$  d'une bobine dépend de :

$$\text{a- } u_{AB} = L \cdot i + r \cdot i \quad \text{b- } u_{AB} = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i$$

$$\text{c- } u_{AB} = -L \cdot \frac{di}{dt} - r \cdot i \quad \text{d- } u_{AB} = -\frac{dL}{dt} \cdot i - r \cdot i$$

a- la tension appliquée à ses bornes.

b- ses caractéristiques géométriques.

c- l'intensité du courant qui y circule.

■ IV- La réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension  $E$ , dans le cas où la bobine est purement inductive, est caractérisée par l'apparition d'une tension aux bornes de la bobine qui :

a- augmente sans cesse.

b- varie en tendant vers zéro.

c- prend instantanément la valeur  $E$ .

d- tend vers une valeur constante inférieure à  $E$ .

■ V- La réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension  $E$ , dans le cas où la bobine est caractérisée par la circulation d'un courant d'intensité  $i$  qui :

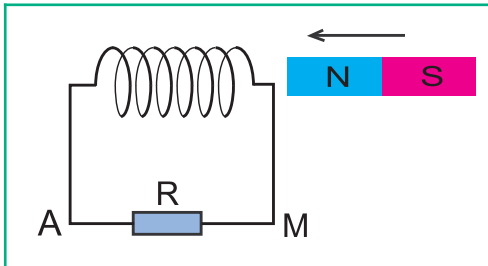
a- augmente de manière continue en tendant vers la valeur  $\frac{E}{R}$ .

b- diminue de manière continue en tendant vers zéro.

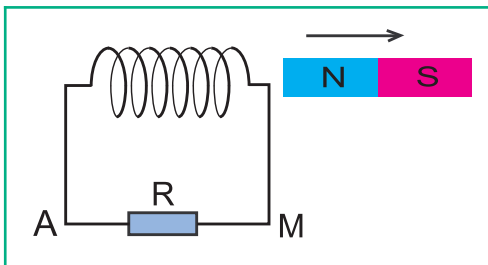
c- prend directement la valeur  $\frac{E}{R}$ .

## Exercices d'application

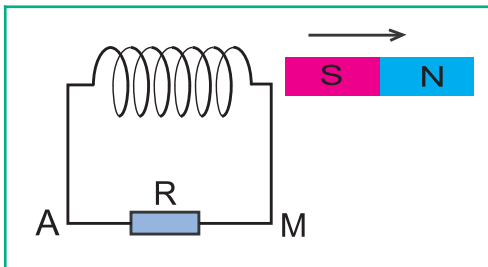
**3** Indiquer pour chaque schéma de la figure ci-dessous, le sens du courant induit produit par le déplacement de l'aimant suivant l'axe de la bobine ainsi que le nom de la face de la bobine en regard avec l'aimant.



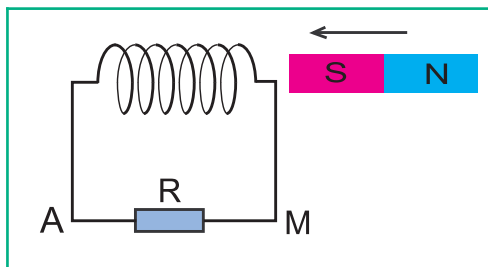
**Fig.1** : L'aimant s'approche de la bobine avec son pôle nord en avant.



**Fig.2** : L'aimant s'éloigne de la bobine avec son pôle nord en avant.

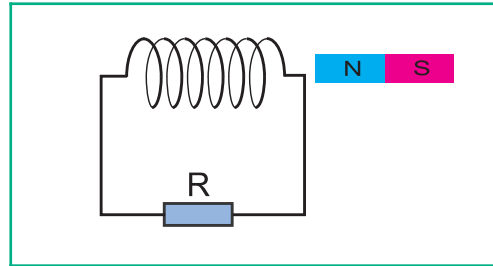


**Fig.3** : L'aimant s'éloigne de la bobine avec son pôle sud en avant.



**Fig.4** : L'aimant s'approche de la bobine avec son pôle sud en avant.

**4** Une bobine fermée sur un résistor de résistance  $R$  est placée dans le champ magnétique d'un aimant comme il est indiqué dans la figure ci-dessous.



1°) On approche l'aimant de la bobine par son pôle nord.

a- Représenter le vecteur champ magnétique induit.

b- En déduire le sens du courant induit.

2°) On retourne l'aimant de telle sorte que le pôle en regard de la bobine soit le pôle sud, puis on l'éloigne de la bobine.

a- Représenter, au centre de la bobine, le vecteur champ magnétique inducteur et le vecteur champ magnétique induit.

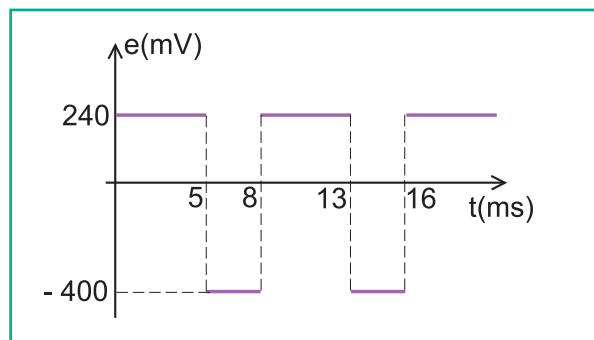
b- En déduire le sens du courant induit.

**5** La f.e.m. d'auto-induction  $e$  créée par une bobine d'inductance  $L = 40$  mH varie au cours du temps selon la loi représentée graphiquement ci-dessous.

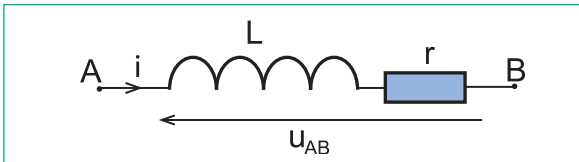
1°) Exprimer le taux de variation  $\frac{di}{dt}$  en fonction de  $e$  et  $L$ .

2°) Calculer  $\frac{di}{dt}$  dans chacun des intervalles de temps  $[0, 5 \text{ ms}]$  et  $[5 \text{ ms}, 8 \text{ ms}]$ .

3°) Représenter graphiquement  $i$  en fonction de  $t$  sachant qu'à l'instant  $t = 5 \text{ ms}$ ,  $i = 0$ .



- 6** A l'instant  $t = 0$ , on ferme un circuit électrique renfermant une bobine d'inductance  $L = 470 \text{ mH}$  et de résistance  $r = 10 \Omega$ . Celle-ci se trouve parcourue de sa borne A vers sa borne B par un courant d'intensité  $i(t) = 0,006 t^2$ .
- 1°) Exprimer la tension  $u_{AB}$  en fonction de  $L$ ,  $r$ , et  $t$ .
  - 2°) Calculer la valeur de  $u_{AB}$ , 10 s après la fermeture du circuit.



- 7** On relie une bobine AB d'inductance  $L = 0,1 \text{ H}$  et de résistance interne négligeable à un générateur de courant variable (Fig.1).

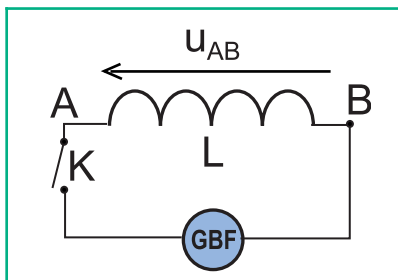


Fig.1

L'évolution au cours du temps, de l'intensité du courant  $i$  est illustrée par la courbe de la figure 2. Lors de la fermeture du circuit, un phénomène d'auto-induction prend naissance dans la bobine.

- 1°) Donner l'expression de la tension  $u_{AB}(t)$ , au cours des deux phases, pour  $t$  variant de 0 à 50 ms.
- 2°) Tracer la courbe représentant  $u_{AB}(t)$ , sachant que la base de temps est réglée sur 10 ms/div et que la sensibilité verticale est 0,5 V/div.

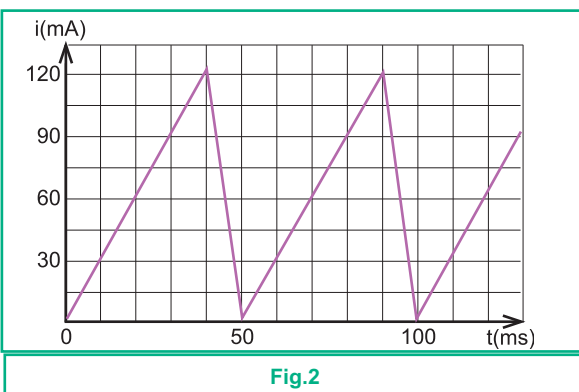
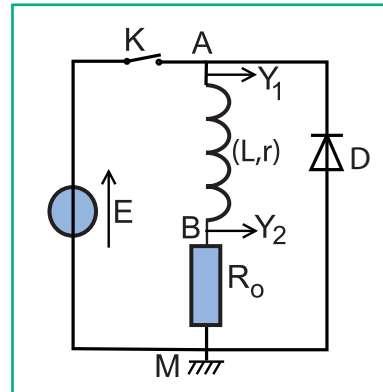


Fig.2

- 8** On réalise le montage de la figure ci-dessous.



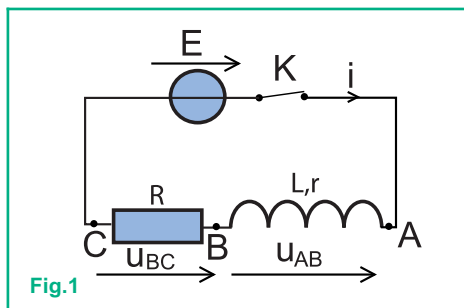
- 1°) On ferme l'interrupteur K, expliquer le phénomène qui se produit au niveau du dipôle RL avec  $R = R_o + r$ .
- 2°) Donner l'expression de l'intensité  $I_o$  du courant électrique qui s'établit en régime permanent.
- 3°) Etablir l'équation différentielle, vérifiée par  $i(t)$ , lors de la fermeture de l'interrupteur K.
- 4°) Vérifier que  $i(t) = A(1 - e^{-\alpha t})$  est une solution de l'équation différentielle en  $i$ .
- 5°) Identifier  $A$  et  $\alpha$  en prenant l'instant origine, l'instant de fermeture du circuit.
- 6°) Définir la constante de temps pour le régime transitoire et l'exprimer en fonction de  $\alpha$ .

- 9** Un dipôle RL constitué d'une bobine d'inductance  $L$ , de résistance interne  $r$  nulle et d'un résistor de résistance  $R$  est branché aux bornes d'un générateur délivrant une tension continue  $U = 12 \text{ V}$ .

- 1°) Réaliser le schéma du montage.
- 2°) Préciser le branchement de l'oscilloscope permettant de suivre l'établissement du courant électrique dans le circuit.
- 3°) Donner l'allure de la courbe d'évolution de  $i(t)$  lors de la fermeture du circuit.
- 4°) Calculer :
  - a- la valeur de l'intensité du courant en régime permanent.
  - b- la valeur de la constante de temps  $\tau$  du dipôle RL sachant que  $L = 100 \text{ mH}$  et  $R = 120 \Omega$ .

## Exercices de synthèse

**10** Un circuit électrique comporte, placés en série, un générateur de tension de f.e.m.  $E = 6 \text{ V}$ , un interrupteur  $K$ , une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r = 10 \Omega$  et un conducteur ohmique de résistance  $R = 200 \Omega$ . Un dispositif informatisé d'acquisition de données permet de visualiser sur l'écran d'un ordinateur, l'évolution des tensions  $u_{AB}$  et  $u_{BC}$  en fonction du temps. Le schéma du circuit ci-dessous précise l'orientation du courant et les tensions étudiées (Fig.1).



A  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$  et on procède à l'acquisition. On obtient les deux courbes de la figure 2, notées courbe 1 et courbe 2.

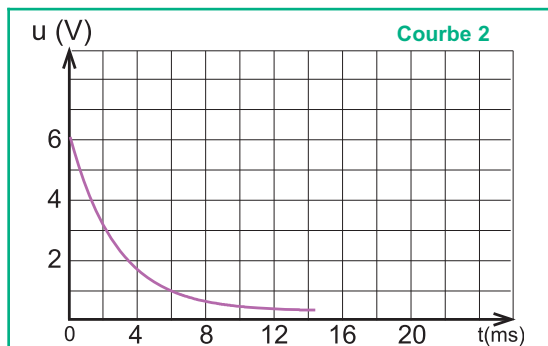
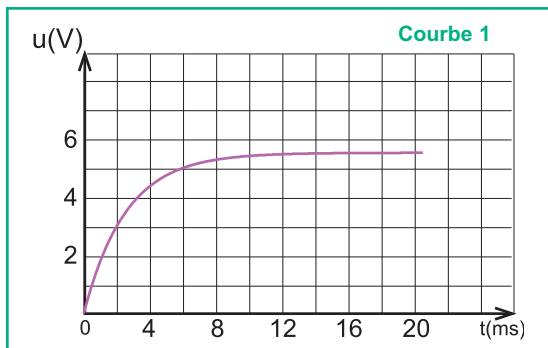


Fig.2

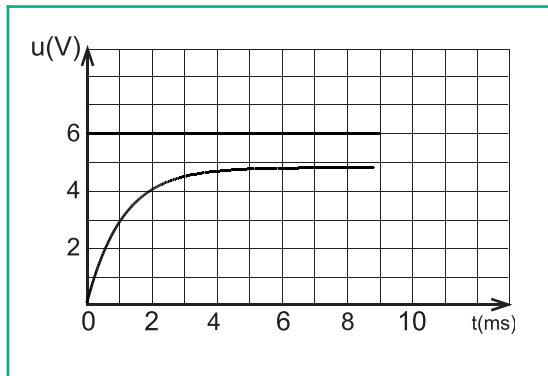
- 1°) Donner l'expression de  $u_{AB}$  en fonction de  $i$  et  $\frac{di}{dt}$ .
- 2°) Donner l'expression de  $u_{BC}$  en fonction de  $i$ .
- 3°) Associer les courbes 1 et 2 aux tensions  $u_{AB}$  et  $u_{BC}$ . Justifier la réponse.
- 4°) Appliquer la loi des mailles pour déterminer l'expression  $I_0$  de l'intensité du courant qui traverse le circuit lorsque le régime permanent est établi. Calculer la valeur de  $I_0$ .
- 5°) Exploiter l'une des courbes pour retrouver cette valeur de  $I_0$ .
- 6°) Exploiter l'une des deux courbes pour déterminer la constante de temps  $\tau$  du montage. Expliciter la méthode utilisée.
- 7°) Rappeler l'expression de la constante de temps  $\tau$  en fonction des grandeurs caractéristiques du circuit. Montrer que cette expression est homogène à un temps.
- 8°) À partir de la valeur de  $\tau$  mesurée, calculer l'inductance  $L$  de la bobine.
- 9°) A défaut de dispositif informatisé d'acquisition de données, quel type d'appareil peut-on utiliser pour visualiser le phénomène étudié ?

**11** Un dipôle  $AB$  est constitué par l'association en série, d'une bobine d'inductance  $L$ , de résistance  $r$  et d'un résistor de résistance  $r' = 50 \Omega$ . Le dipôle  $AB$  est alimenté par un générateur de tension idéal de force électromotrice  $E = 6 \text{ V}$ . A l'aide d'un oscilloscope à mémoire, on visualise simultanément les tensions aux bornes du générateur et aux bornes du résistor  $r'$ . On obtient simultanément les oscillogrammes de la figure ci-après.

- 1°) Schématiser le montage électrique et préciser le branchement de l'oscilloscope.
- 2°) Donner la valeur de la tension aux bornes de la bobine en fonction de  $L, r$  et  $i$ .
- 3°) A l'aide des oscillogrammes obtenus :
  - a- déterminer l'intensité  $I_0$  du courant électrique qui s'établit dans le circuit en régime permanent.
  - b- calculer la valeur de la résistance  $r$  de la bobine.

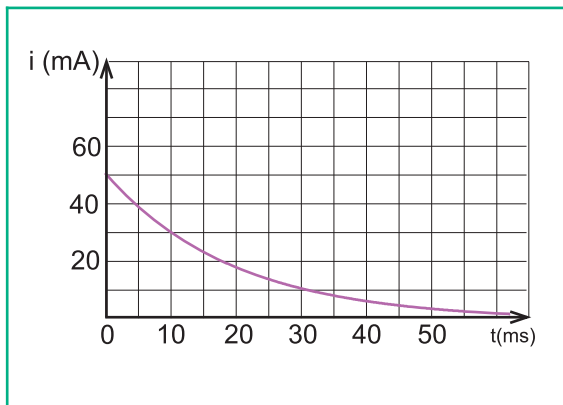


- 4°) Déterminer graphiquement la constante de temps du dipôle RL
- 5°) En déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.
- 6°) Calculer la valeur de l'énergie emmagasinée dans la bobine en régime permanent.



**12** Une bobine de résistance  $r$  très faible et d'inductance  $L$  est branchée en série avec un résistor de résistance  $R_0$ . Lors de la rupture du courant dans le circuit, on visualise la courbe de décroissance de l'intensité du courant électrique, donné par la figure ci-dessous.

- 1°) Déterminer la valeur de l'intensité  $i$  du courant électrique à l'instant initial.
- 2°) Déterminer de deux façons différentes la constante de temps  $\tau$  du dipôle RL.
- 3°) En déduire la valeur de l'inductance  $L$  de la bobine sachant que  $R_0 = 50 \Omega$ .
- 4°) Calculer la valeur de la f.e.m. d'auto-induction  $e$  à  $t = 0$ .



**13** Un générateur de force électromotrice  $E = 6 \text{ V}$  et de résistance interne  $r = 2 \Omega$  alimente un circuit constitué d'une bobine AB d'inductance  $L = 1,8 \text{ H}$  et de résistance interne  $R = 8 \Omega$ , aux bornes de laquelle on a placé un petit moteur en série avec une diode au silicium D (Fig.1).

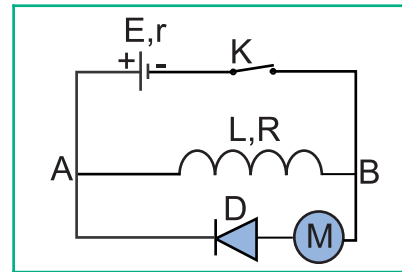


Fig.1

1°) Lorsqu'on ferme l'interrupteur K, indiquer le sens du courant qui s'établit dans le circuit. Montrer que son intensité maximale prend la valeur  $I = 0,6 \text{ A}$ .

Pourquoi le moteur ne fonctionne-t-il pas ?

2°) Lorsqu'on ouvre l'interrupteur K, on constate que le moteur se met à tourner pendant quelques secondes. Quel est le sens du courant qui le parcourt ? D'où provient l'énergie électrique qui l'a fait fonctionner ? Quel est le phénomène physique qui est mis en évidence ?

3°) Pendant son fonctionnement, le moteur est capable de soulever un corps de masse  $m = 20 \text{ g}$  à une hauteur  $h = 18,5 \text{ cm}$  par l'intermédiaire d'une poulie qu'il entraîne (Fig.2).

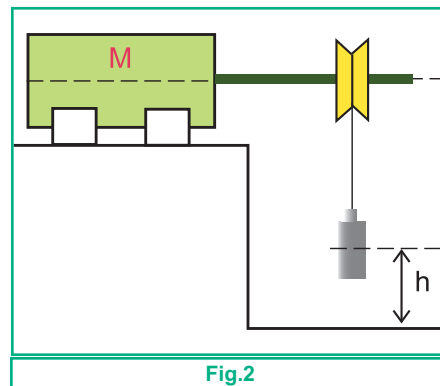


Fig.2

Calculer le travail mécanique fourni par le moteur ; le comparer à l'énergie magnétique emmagasinée par la bobine. En déduire le rendement de l'opération.

On donne  $g = 9,8 \text{ N.kg}^{-1}$

## Étude de texte

### La cuisson par induction

**14** Les plaques de cuisson par induction (ou plaques à induction) ont un principe de fonctionnement nettement différent de celui des plaques de cuisson classiques. La première caractéristique frappante de ces plaques à induction réside dans le fait qu'en fonctionnement, elles sont froides ou très peu chaudes ! A l'inverse des plaques classiques, ce ne sont pas les plaques qui chauffent mais la casserole, elle-même.

Ce type de plaque fonctionne grâce au phénomène d'induction électromagnétique.

En effet, il y a apparition d'un courant électrique dans un conducteur lorsque ce dernier est placé dans un champ magnétique variable.

C'est exactement ce qui se passe lorsqu'on approche la casserole de la plaque, le champ magnétique variable créé par le générateur placé au dessous de la plaque engendre un courant électrique induit dans la paroi de la casserole. Celle-ci joue le rôle de noyau pour la bobine source de champ magnétique variable, ce qui fait augmenter, l'intensité du courant induit. La circulation du courant induit chauffe la casserole par effet Joule.

Une bonne partie de l'énergie thermique de la casserole est transférée à son contenu, et c'est ainsi que les aliments vont être cuits.



Plaque de cuisson à induction

#### Questions

- 1°) Préciser l'inducteur et l'induit dans le dispositif de la plaque de cuisson par induction.
- 2°) Décrire, brièvement, le principe de fonctionnement d'une plaque de cuisson par induction.
- 3°) Quelle est la source d'énergie d'une plaque à induction ?
- 4°) Justifier, l'augmentation de la température des aliments placés dans une casserole et sur une plaque cuisson par induction.

# En savoir plus

## Les pouvoirs de l'induction électromagnétique

De tous les moyens de cuisson, le plus singulier est la plaque à induction, où la chaleur est créée directement dans le métal de la casserole. Ce prodige est le résultat de l'induction électromagnétique, une des plus efficaces façons de transmettre de l'énergie sans contact. Si on place un morceau de cuivre près d'un aimant, que se passe-t-il ? Rien ! En revanche, si on déplace le morceau de cuivre par rapport au champ magnétique, un courant électrique apparaît dans le cuivre qui s'échauffe. Cet effet, découvert par Foucault et Faraday, est source de multiples applications comme les plaques de cuisson à induction et les ralentisseurs électromagnétiques.

Dans un conducteur comme le cuivre, les électrons délocalisés sont libres de se mouvoir, et leur mouvement d'ensemble, sous l'effet d'une force, engendre le courant électrique. Nous savons qu'un aimant crée un champ magnétique qui exerce une force sur les charges en mouvement, force perpendiculaire au mouvement des charges, qui tend à incurver leurs trajectoires. Quand nous déplaçons le morceau de cuivre, les électrons subissent cette force et sont animés d'un mouvement que l'on désigne par "courant de Foucault". L'intensité du courant est proportionnelle à la vitesse de déplacement du matériau et à la valeur du vecteur champ magnétique. Les courants de Foucault ont des parcours compliqués au sein de la matière où aucun fil ne les guide. On sait toutefois qu'ils forment des lacets et des boucles, d'où leur nom de "courants tourbillonnaires".

Ces courants de Foucault se manifestent chaque fois qu'un matériau conducteur est en mouvement au sein d'un champ magnétique : ils sont induits par déplacement. Plusieurs dispositifs industriels utilisent cette induction pour transformer l'énergie mécanique en énergie électrique, puis éventuellement en énergie thermique. Lorsqu'on fait tourner un disque de cuivre dans l'entrefer d'un aimant, un tel disque est parcouru de courants de Foucault. Ces courants induits échauffent la matière qu'ils traversent car les électrons qui les composent rencontrent sans cesse les autres charges électriques présentes dans le matériau et leur transfèrent une partie de leur énergie par chaleur. Cette énergie provient de la seule source d'énergie présente, l'opérateur actionnant le disque. Il va de même dans les ralentisseurs pour camions, un type de frein magnétique qui équipe aujourd'hui la majorité des poids lourds. Leur avantage est d'être sans contact, donc sans usure ! Dans ces dispositifs, des disques solidaires de l'arbre de transmission tournent entre des électroaimants alimentés par une batterie. Quand on désire freiner le véhicule, on alimente les électroaimants en courant. Plus la vitesse du véhicule est grande, plus la vitesse de rotation des disques entre les électroaimants est grande et plus le freinage est efficace. Les ralentisseurs sont donc d'autant plus efficaces que le véhicule roule vite, ce qui, en descente, est idéal. En revanche, leur efficacité s'amointrit aux faibles vitesses jusqu'à s'annuler à l'arrêt. C'est pourquoi, pour les faibles allures, on leur adjoint des freins mécaniques.

*D'après "Revue pour la science"*

## Objectifs

- ◆ Réaliser un montage permettant de suivre les oscillations électriques libres d'un circuit RLC série.
- ◆ Reconnaître le régime pseudopériodique et le régime apériodique.
- ◆ Reconnaître le facteur responsable de l'amortissement.
- ◆ Reconnaître les grandeurs oscillantes d'un circuit RLC série.
- ◆ Etablir l'équation différentielle des oscillations libres d'un circuit RLC série.
- ◆ Interpréter la diminution de l'amplitude des oscillations libres d'un circuit RLC série par le transfert d'énergie de l'oscillateur vers le milieu extérieur.
- ◆ Ecrire l'expression d'une grandeur oscillante en régime libre non amorti.
- ◆ Définir la pulsation propre  $\omega_0$  et la période propre  $T_0$  d'un oscillateur RLC non amorti.
- ◆ Exprimer  $T_0$  en fonction de L et de C.
- ◆ Déterminer la période, l'amplitude et la phase initiale d'une grandeur oscillante sinusoïdale d'un circuit RLC série non amorti.
- ◆ Démontrer la conservation de l'énergie totale d'un oscillateur LC.
- ◆ Interpréter le cas particulier des oscillations libres non amorties.

## Prérequis

SAVOIR	SAVOIR FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Définir un phénomène périodique.</li> <li>◆ Définir la période T et la fréquence N d'un phénomène périodique.</li> <li>◆ Ecrire la relation <math>N = \frac{1}{T}</math>.</li> <li>◆ Ecrire la relation <math>i = \frac{dq}{dt}</math>.</li> <li>◆ Ecrire l'expression de la tension :           <ul style="list-style-type: none"> <li>- aux bornes d'un condensateur <math>u = \frac{q}{C}</math></li> <li>- aux bornes d'une bobine <math>u = L \frac{di}{dt} + ri</math></li> </ul> </li> <li>◆ Exprimer l'énergie potentielle électrique <math>E_C</math> emmagasinée par un condensateur.</li> <li>◆ Exprimer l'énergie magnétique <math>E_L</math> emmagasinée par une bobine.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Reconnaître un phénomène périodique.</li> <li>◆ Distinguer entre période et fréquence d'un phénomène périodique.</li> <li>◆ Utiliser la relation <math>i = \frac{dq}{dt}</math>.</li> <li>◆ Expliquer la charge et la décharge d'un condensateur.</li> <li>◆ Expliquer le phénomène d'auto-induction.</li> <li>◆ Distinguer entre transfert et transformation d'énergie.</li> <li>◆ Appliquer la loi des mailles.</li> </ul>

# OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES

# 3



*Le quartz impose sa fréquence propre aux oscillations ; une montre électronique y gagne en précision.*

- ◆ Que désigne-t-on par les expressions “oscillations électriques”, “oscillateur électrique”, “circuit oscillant”...?
- ◆ Est-ce que le courant alternatif est un phénomène oscillatoire ?

# OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES AMORTIES

Dans les chapitres précédents, en plus de la mise en évidence expérimentale des propriétés des condensateurs et des bobines, on a étudié entre autres la décharge d'un condensateur. Que se passera-t-il si l'on décharge le condensateur dans une bobine sachant que celle-ci emmagasine aussi de l'énergie?

## 1 PRODUCTION D'OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES

### Manipulation

Avec un générateur de tension idéal de f.e.m.  $E = 5 \text{ V}$ , un condensateur de capacité  $C = 0,5 \mu\text{F}$ , un résistor de résistance  $R_0$  réglable, une bobine d'inductance  $L = 1 \text{ H}$  et de résistance  $r = 12,5 \Omega$  et un commutateur  $K$ , on réalise le montage de la figure 1.

On fixe  $R_0$  à  $100 \Omega$ , et on réalise les branchements avec les réglages indispensables à la visualisation de la tension  $u_C = u_{BM}$  aux bornes du condensateur sur la voie  $Y_1$  et la tension  $u_{R_0} = u_{AM}$  aux bornes du résistor sur la voie  $Y_2$  d'un oscilloscope à mémoire (Fig.2).

On charge le condensateur en plaçant le commutateur  $K$  sur la position 1. En basculant le commutateur  $K$  sur la position 2, les chronogrammes ① et ② de la figure 2 apparaissent sur l'écran de l'oscilloscope.

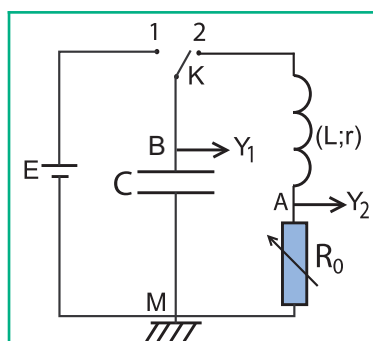


Fig.1 : Montage de charge et de décharge d'un condensateur dans une bobine

### Questions

1°) Décrire la forme du chronogramme visualisé lorsque le commutateur  $K$  est en position 1.

2°) Montrer que le chronogramme ① de la figure 2 correspond à la variation de la tension  $u_C$  et qu'il traduit l'évolution, au cours du temps, de la charge  $q$  du condensateur.

3°) Montrer que le chronogramme ② de la figure 2 traduit l'évolution au cours du temps de l'intensité  $i$  du courant électrique qui s'établit dans le circuit RLC série.

4°) • Tels quels, les chronogrammes ① et ② traduisent des oscillations de la charge  $q$  et de l'intensité du courant  $i$  au cours du temps. Préciser la signification de cette affirmation.

• De telles oscillations électriques sont dites amorties, pourquoi ?

5°) Comparer les intervalles de temps  $T$  séparant les maximums ou les minimums successifs de  $u_C$  et de  $u_{R_0}$ .

6°) • En comparant les maximums de  $u_C(t)$  ou de  $u_{R_0}(t)$ , montrer que les oscillations sont amorties.

• De telles oscillations, ne pouvant pas être qualifiées comme étant périodiques, sont dites pseudopériodiques, pourquoi ?

7°) Interpréter les oscillations de  $q(t)$  et de  $i(t)$  dans le circuit RLC série.

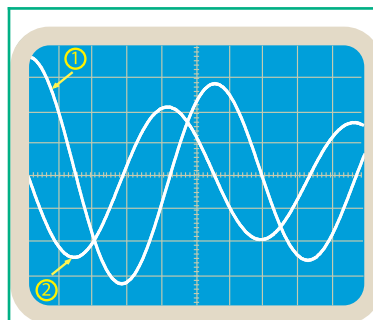


Fig. 2 : Oscillogrammes ① et ②

## Interprétation

En plaçant le commutateur K dans la position 1, le condensateur se charge, la tension à ses bornes devient égale à E, donc le chronogramme ① correspond à  $u_C(t)$ .

Compte tenu des relations de proportionnalité  $q = C.u_C$  et  $u_{R_0} = R_0.i$ , les chronogrammes ① et ② traduisent l'évolution au cours du temps respectivement de la charge q du condensateur et de l'intensité i du courant qui s'établit dans le circuit. La symétrie de ces chronogrammes par rapport à l'axe des temps montre que la charge q du condensateur et l'intensité i du courant électrique varient et changent de signe à des intervalles de temps successifs et égaux à  $T/2$  ; c'est-à-dire que q et i prennent au cours du temps des valeurs alternativement positives et négatives. On dit alors que q et i oscillent au cours du temps.

Les oscillations de q résultent d'une décharge oscillante du condensateur; celles de l'intensité i matérialisent une circulation du courant alternativement dans un sens et dans l'autre: On dit qu'un tel courant alternatif est un phénomène oscillatoire. Ces oscillations s'expliquent comme suit :

❖ À  $t_0 = 0$ , juste en plaçant le commutateur K dans la position 2,  $u_{C_0} = E$  et la charge du condensateur est  $Q_0 = CE$ , c'est-à-dire à cet instant, les armatures A et B du condensateur portent respectivement les charges  $Q_0 = CE$  et  $-Q_0 = -CE$ .

L'attraction mutuelle de ces charges provoque un déplacement d'ensemble d'électrons de B vers A, ce qui fait naître, à travers le dipôle RL, un courant d'intensité i circulant dans le sens négatif (Fig.3). Mais, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'un dipôle RC, la valeur absolue de l'intensité i ne passe pas instantanément de 0 à sa valeur maximale  $I_m$ , et ce à cause de la f.e.m. auto-induite de la bobine.

❖ Entre  $t_0 = 0$  et  $t_1 = T/4$  (Fig.4a) :

l'opposition de la force électromotrice auto-induite à la variation de l'intensité du courant ralentit le déplacement d'ensemble des électrons, ce qui explique l'augmentation progressive et non brusque de la valeur absolue de i.

❖ Entre  $t_1 = T/4$  et  $t_2 = T/2$  (Fig.4.b)

À  $t_1 = T/4$ , bien que i soit maximale en valeur absolue, le courant n'a plus de raison d'être car le condensateur est complètement déchargé, c'est-à-dire il n'y a plus de d.d.p. entre ses armatures A et B. Pourtant, i ne va pas s'annuler à l'instant même, et ce toujours à cause de la f.e.m. auto-induite  $e = -L \frac{di}{dt}$  qui va contraindre le courant à circuler encore dans le même sens, ce qui fait apparaître simultanément et progressivement sur l'armature A du condensateur une charge  $q < 0$  et sur l'armature B une charge  $-q > 0$ .

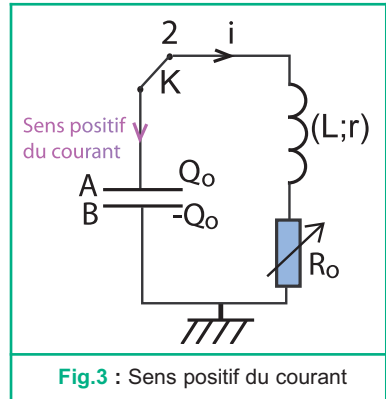


Fig.3 : Sens positif du courant

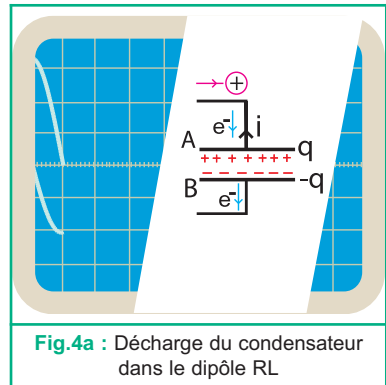


Fig.4a : Décharge du condensateur dans le dipôle RL

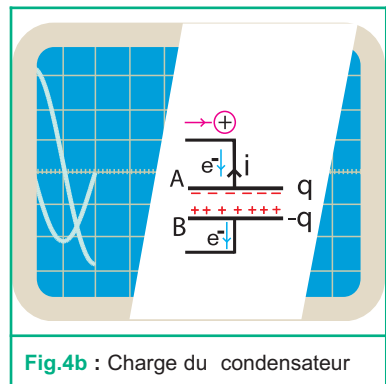


Fig.4b : Charge du condensateur

À  $t_2 = T/2$ , le courant finit par s'annuler pour être régénéré tout de suite, mais dans le sens positif grâce aux charges  $Q_1 < 0$  et  $-Q_1 > 0$ , maximales en valeur absolue et accumulées respectivement sur les armatures A et B du condensateur.

❖ Entre  $t_2 = T/2$  et  $t_4 = T$  : l'évolution s'explique de la même manière qu'entre  $t_0 = 0$  et  $t_2 = T/2$ .

A l'instant  $t_4 = T$ , deux charges  $Q_2$  et  $-Q_2$ , maximales en valeur absolue, se trouvent stockées respectivement au niveau des armatures A et B comme à  $t_0 = 0$ , c'est-à-dire la charge  $Q_2$  est positive.

❖ Entre les instants  $T$  et  $2T$  : Tout se passe et s'explique comme entre les instants  $0$  et  $T$  pour "voir" s'accumuler respectivement sur les armatures A et B les charges  $Q_3$  et  $-Q_3$  (avec  $Q_3 < 0$ ) à l'instant  $3T/2$  et  $Q_4$  et  $-Q_4$  (avec  $Q_4 > 0$ ) à l'instant  $2T$  et ainsi de suite.

Il reste quand même à expliquer pourquoi  $Q_0 > |Q_1| > Q_2 > |Q_3|$ , ce qui revient à expliquer la diminution de l'amplitude des oscillations de  $i$  (Fig 5).

En fait, la résistance totale  $R$  du circuit (résistance  $r$  de la bobine +  $R_0$ ) s'oppose incessamment à la circulation du courant. Par conséquent, elle fait atténuer progressivement la valeur de l'intensité du courant jusqu'à l'annuler au bout de quelques oscillations. De telles oscillations sont dites amorties. De plus, ces oscillations sont dites libres du fait qu'elles se produisent dans le circuit RLC série bien que celui-ci ne soit fermé sur aucun générateur.

Bien que les extrêmes de  $q$  ou de  $i$  soient atteints à des intervalles de temps successifs égaux, de telles oscillations ne peuvent être périodiques à cause de la diminution de l'amplitude, elles sont dites pseudopériodiques.

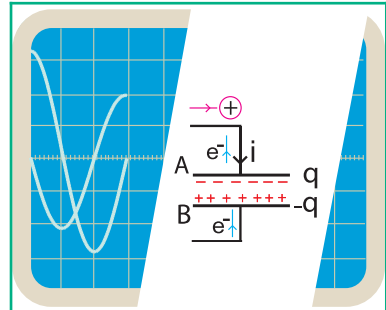


Fig.4c : Décharge du condensateur dans le dipôle RL

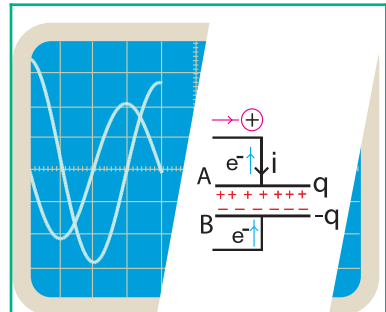


Fig.4d : Charge du condensateur

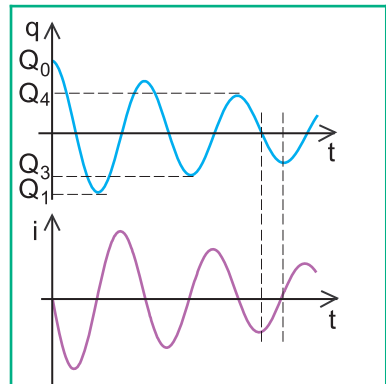


Fig.5 : L'amplitude des oscillations diminue.

## Conclusion

Un circuit constitué d'un dipôle RL série fermé sur un condensateur initialement chargé peut être le siège d'oscillations électriques amorties. De telles oscillations qui s'effectuent d'elles mêmes sans intervention de l'extérieur sont dites libres.

Les oscillations libres amorties sont des oscillations pseudopériodiques de pseudo-période  $T$ .

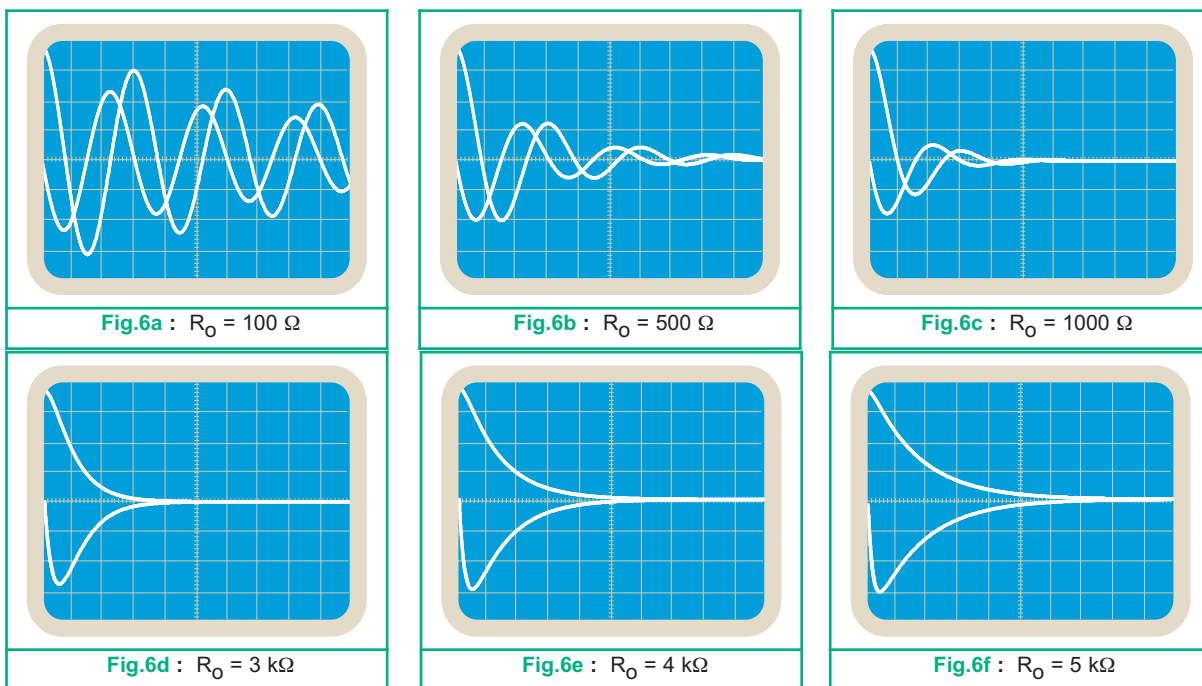


## 2

## INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT

## Manipulation

On reprend le montage de la figure 1 et on refait l'expérience avec des valeurs différentes de  $R_0$ . En suivant l'évolution des oscillogrammes  $u_C(t)$  et  $u_{R_0}(t)$ , on retient ceux de la figure 6 obtenus avec des valeurs de  $R_0$  allant de  $100 \Omega$  et  $5 \text{ k}\Omega$ .



## Questions

À l'aide des oscillogrammes de la figure 6 :

- 1°) Dégager l'influence de la valeur de la résistance sur l'amortissement des oscillations et sur la pseudopériode.
- 2°) Montrer que le circuit RLC série ne peut osciller librement que dans des conditions bien déterminées que l'on précisera.
- 3°) Comparer les oscillogrammes des figures 6.d, 6.e et 6.f entre eux. En déduire l'influence de  $R_0$  sur la durée de retour du circuit RLC à son état d'équilibre stable.

## Analyse et Interprétation des résultats

L'analyse des chronogrammes  $u_C(t)$  et  $u_{R_0}(t)$  obtenus avec différentes valeurs de  $R_0$  montre que :

- lorsque  $R_0$  augmente les oscillations deviennent de plus en plus amorties (le nombre totale des oscillations diminue) alors que la pseudopériode  $T$  augmente légèrement (Fig.6a, 6b, 6c).
- pour des valeurs élevées de  $R_0$ , la difficulté avec laquelle le courant circule dans le circuit RLC série ne lui permet plus d'atteindre une intensité maximale suffisante pour pouvoir recharger le condensateur avant de s'annuler. Par conséquent, le circuit RLC série ne peut plus osciller ; il s'agit d'un nouveau régime qui consiste au retour du circuit à son état d'équilibre, c'est-à-dire en une simple décharge du condensateur ; celle-ci demande une durée aussi longue que la résistance  $R_0$  est plus grande : un tel régime non oscillatoire est dit apériodique (Fig.6d, 6e, 6f).

## Remarques

1- Le régime apériodique obtenu avec la valeur élevée la plus petite de la résistance totale  $R$  du circuit RLC série est connu sous le nom du régime critique mais expérimentalement, il est difficile de le mettre en évidence.

2- Du fait que lorsque la résistance totale  $R$  du circuit diminue, les oscillations libres du circuit RLC série deviennent de moins en moins amorties, on peut admettre qu'à la limite, lorsque l'amortissement est suffisamment très faible pour pouvoir le supposer nul (absence du résistor dans le circuit et bobine inductive de très petite résistance interne  $r$ ), le régime pseudopériodique devient périodique (Fig.7) : l'amplitude des oscillations ne diminue pratiquement plus. Le circuit RLC continue à osciller indéfiniment (l'étude de ce régime fera l'objet de la deuxième partie du présent chapitre).

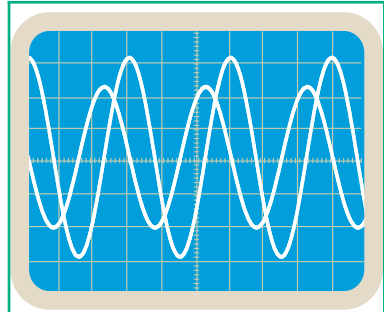


Fig.7 : Régime périodique

## Conclusion

Un circuit RLC série fermé, avec le condensateur initialement chargé, ne peut osciller librement que lorsque l'amortissement est faible.

Plus la résistance du circuit est grande, plus la pseudopériode est grande et plus le retour de l'oscillateur à son état d'équilibre est rapide. Avec des valeurs élevées de  $R$ , le régime n'est plus oscillatoire, il est apériodique.

## 3 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE RÉGISSANT LA CHARGE $q$ DU CONDENSATEUR DANS UN CIRCUIT RLC SÉRIE

L'application de la loi des mailles au circuit de la figure 8 permet d'écrire :

$$u_C + u_b + u_{R_0} = 0, \text{ ce qui signifie } \frac{q}{C} + (r + L \frac{di}{dt}) + R_0 i = 0.$$

$$\text{D'où : } L \frac{di}{dt} + (r + R_0) i + \frac{q}{C} = 0. \quad (1)$$

Or,  $i = \frac{dq}{dt}$ . Donc, (1) s'écrit :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + (r + R_0) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ ou bien } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r + R_0}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

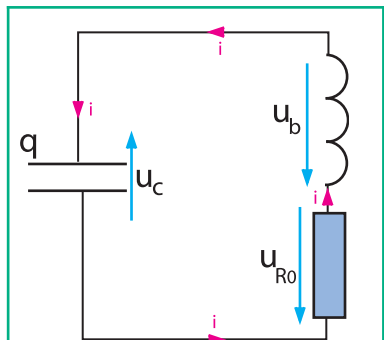


Fig.8 : Schéma du circuit RLC série

## 4 ÉNERGIE TOTALE D'UN OSCILLATEUR RLC SÉRIE

### Manipulation

On reprend le montage de la figure 1 et on remplace l'oscilloscope par une interface d'acquisition numérique de données (console VTT par exemple). On fixe  $R_0$  à la valeur  $100 \Omega$  et on règle les paramètres d'acquisition de l'interface pour que, après avoir chargé le condensateur, la fermeture du circuit RLC série déclenche l'acquisition des mesures. Sur l'écran de l'ordinateur, s'affichent les deux courbes de tension  $u_C(t)$  et  $u_{R_0}(t)$  qu'on enregistre en vue de les exploiter plus loin. Ces deux courbes sont reproduites sur la figure 9.

En réalisant de nouveau la même expérience avec  $R_0 = 500 \Omega$ , on obtient les deux courbes reproduites sur la figure 10.

A l'aide d'un logiciel, on calcule :

- l'énergie électrique  $E_C = \frac{1}{2} C u_C^2$
- l'énergie magnétique  $E_L = \frac{1}{2} \frac{L}{R_0^2} u_{R_0}^2$
- l'énergie totale du circuit  $E = E_C + E_L$ .

On obtient dans un même système d'axes, les chronogrammes des énergies  $E_C$ ,  $E_L$  et  $E$  obtenus respectivement avec les valeurs  $100 \Omega$  et  $500 \Omega$  de  $R_0$  (Fig. 11a et 11b).

### Questions

A l'aide des chronogrammes des figures 11a et 11b :

1°) Montrer que les zéros et les maxima de l'énergie électrostatique  $E_C$  emmagasinée dans le condensateur ou de l'énergie magnétique  $E_L$  emmagasinée dans la bobine sont atteints à des intervalles de temps successifs égaux à la moitié de la pseudopériode  $T$ .

2°) Vérifier qu'au cours des oscillations, l'énergie totale  $E$  du circuit est égale à la somme de l'énergie  $E_C$  emmagasinée dans le condensateur et de l'énergie  $E_L$  stockée par la bobine.

3°) Montrer les transformations mutuelles de  $E_C$  et  $E_L$  au cours des oscillations.

4°) Préciser l'influence sur la vitesse de diminution de l'énergie totale du circuit RLC série.

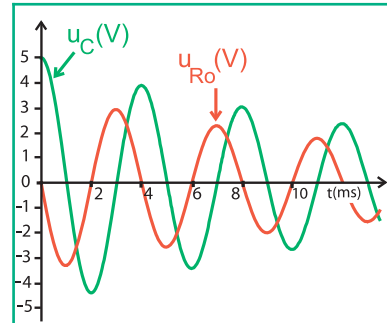


Fig.9 : Evolution temporelle de  $u_C$  et  $u_{R_0}$  dans le cas où  $R_0 = 100 \Omega$

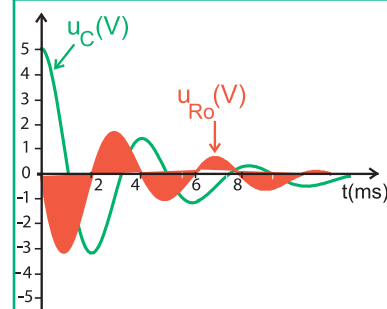


Fig.10 : Evolution temporelle de  $u_C$  et  $u_{R_0}$  dans le cas où  $R_0 = 500 \Omega$

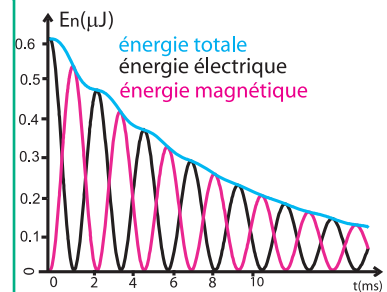


Fig.11a : Evolution temporelle des énergies dans le cas où  $R_0 = 100 \Omega$

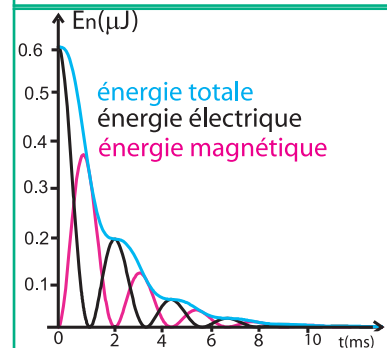


Fig.11b : Evolution temporelle des énergies dans le cas où  $R_0 = 500 \Omega$

## Interprétation

### ◆ Non conservation de l'énergie totale d'un circuit RLC série

L'énergie totale  $E$  du système oscillant (circuit RLC série) à un instant donné est la somme de l'énergie électrique  $E_C$  emmagasinée dans le condensateur et de l'énergie magnétique  $E_L$  emmagasinée dans la bobine. Pour étudier son évolution au cours du temps, il est commode de déterminer sa variation<sup>⊙</sup> par rapport au temps qui s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{q^2}{2C} + \frac{L}{2} i^2 \right) = \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = i \left( L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \right)$$

Or l'équation différentielle peut s'écrire :  $L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0$ ,

ce qui donne  $L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = - Ri$ , d'où  $\frac{dE}{dt} = - Ri^2$ .

⊙  $\frac{dE}{dt}$  n'est autre que la puissance instantanée  $p$  d'un système donné:  $p = \frac{dE}{dt}$ .

L'énergie totale emmagasinée dans le circuit RLC série diminue au cours du temps, elle est transformée progressivement en énergie thermique par effet Joule.

Cette dissipation d'énergie est d'autant plus rapide que la résistance est plus grande. En conséquence, on dit qu'un circuit RLC série en régime libre est un système non conservatif.

### ◆ Transformations mutuelles des énergies électrique et magnétique

Au cours de la décharge du condensateur qui se produit entre  $t_0 = nT$  et  $t_1 = nT + T/4$ , l'énergie  $E_C$  qui y est stockée diminue car  $|q|$  diminue, tandis que l'énergie  $E_L$  emmagasinée par la bobine augmente car  $|i|$  augmente.

D'après la loi de conservation de l'énergie, cela ne s'explique que par une transformation d'énergie électrostatique  $E_C$  en énergie magnétique  $E_L$ .

Entre  $t_2 = nT + T/4$  et  $t_3 = nT + T/2$ , l'énergie électrostatique  $E_C$  augmente tandis que l'énergie magnétique  $E_L$  diminue parce que  $|q|$  augmente et  $|i|$  diminue, ce qui s'explique par une transformation de l'énergie magnétique en énergie électrostatique et ainsi de suite.

Donc, il y a au cours des oscillations pseudopériodique des transformations mutuelles d'énergie électrostatique et d'énergie magnétique. Mais, à cause de la résistance  $R$  du circuit, les transformations mutuelles ne sont pas intégrales. En fait, à chaque transfert d'énergie du condensateur à la bobine et inversement, une partie est transférée par chaleur au milieu extérieur jusqu'à dissipation totale. Par conséquent, le nombre de ces transformations mutuelles devient limité, ce qui explique l'amortissement des oscillations libres du circuit RLC série et leur cessation quand l'énergie totale  $E$  est transformée complètement en énergie thermique.

# LES OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES LIBRES NON AMORTIES

L'étude de l'influence de la résistance  $R$  d'un circuit RLC série sur l'amortissement de ses oscillations nous a amené à admettre, précédemment, que si la résistance  $R$  est nulle, les oscillations seront périodiques. C'est ce que l'on se propose de montrer dans ce qui suit mais uniquement, par une étude théorique. En fait, l'oscillateur LC non amorti est un cas idéal parce qu'il est impossible de le réaliser dans la pratique.

## 1 NATURE DES OSCILLATIONS LIBRES NON AMORTIES

### 1.1- ÉVOLUTION DE LA CHARGE DU CONDENSATEUR

En fermant un condensateur de capacité  $C$ , initialement chargé, sur une bobine supposée purement inductive, on a le circuit schématisé dans la figure 12.

Pour ce circuit, la loi des mailles s'écrit :

$$u_C + u_L = 0, \text{ ce qui signifie } \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0.$$

$$\text{Or } i = \frac{dq}{dt}, \text{ d'où } \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} :$$

On constate bien que l'équation différentielle établie est exactement celle des oscillations libres amorties, mais sans le terme  $\frac{R}{L} \frac{dq}{dt}$ . On admet que la solution générale d'une telle équation différentielle est de la forme :  $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ .

$\omega_0$  : pulsation des oscillations de la charge  $q$ , exprimée en radians par seconde.

$Q_m$  : amplitude des oscillations de la charge  $q$ , exprimée en coulombs (C).

$\varphi$  : phase initiale de la charge  $q$ , exprimée en radians (rad).

$\varphi(t) = \omega t + \varphi$  : phase à l'instant  $t$ , exprimée en radians (rad).

### Vérification de la solution de l'équation différentielle

En remplaçant la grandeur charge par son expression

$q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$  dans l'équation différentielle

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0, \text{ il vient : } \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{d^2Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)}{dt^2} = -\omega_0^2 q$$

$$\text{Donc, l'équation différentielle devient : } -\omega_0^2 q + \frac{1}{LC}q = 0,$$

$$\text{d'où } q \left( \frac{1}{LC} - \omega_0^2 \right) = 0 \text{ quel que soit } q.$$

$$\text{Donc, } \frac{1}{LC} - \omega_0^2 = 0, \text{ ce qui donne : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

### Conclusion

La charge  $q$  du condensateur d'un circuit LC (circuit RLC série non amorti) oscille sinusoïdalement au cours du temps avec la pulsation  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Ne dépendant que des grandeurs  $L$  et  $C$  caractéristiques du circuit, la pulsation des oscillations libres non amorties est qualifiée de pulsation propre de l'oscillateur.

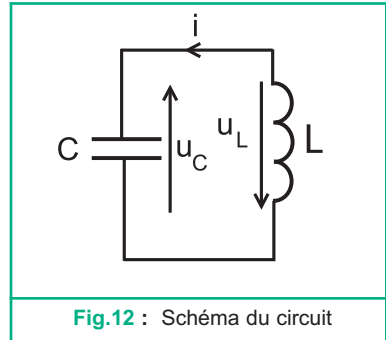
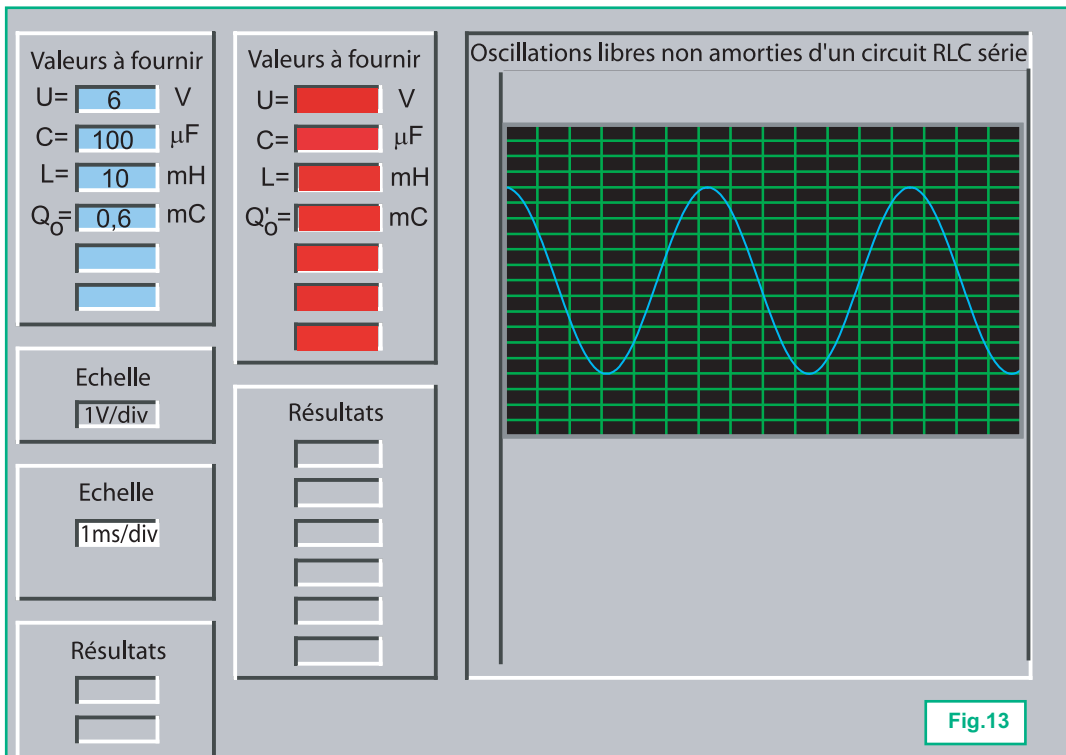


Fig.12 : Schéma du circuit

## Simulation des oscillations

Avec un logiciel approprié, on obtient la solution de l'équation différentielle  $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$ , avec  $L = 10$  mH,  $C = 100$   $\mu$ F et  $Q_m = 6 \cdot 10^{-4}$  C comme charge initiale du condensateur par exemple. L'oscillogramme de la figure 13 représente les oscillations de la charge  $q(t)$ .



## 1.2- PÉRIODE ET FRÉQUENCE DES OSCILLATIONS

La pulsation  $\omega_0$  étant propre à l'oscillateur, la période des oscillations  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  est appelée période propre.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

De même, la fréquence des oscillations  $N_0 = \frac{1}{T_0}$  est appelée fréquence propre des oscillations.

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

### Questions

1°) A l'aide du chronogramme de la figure 13, calculer la période  $T_0$  des oscillations libres non amorties de la charge  $q$ . En déduire la valeur de la fréquence propre  $N_0$  de l'oscillateur.

2°) Vérifier avec les valeurs de  $L$  et de  $C$  utilisées pour simuler les oscillations de  $q(t)$  que la période propre de l'oscillateur RLC série non amortie s'exprime :  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ .

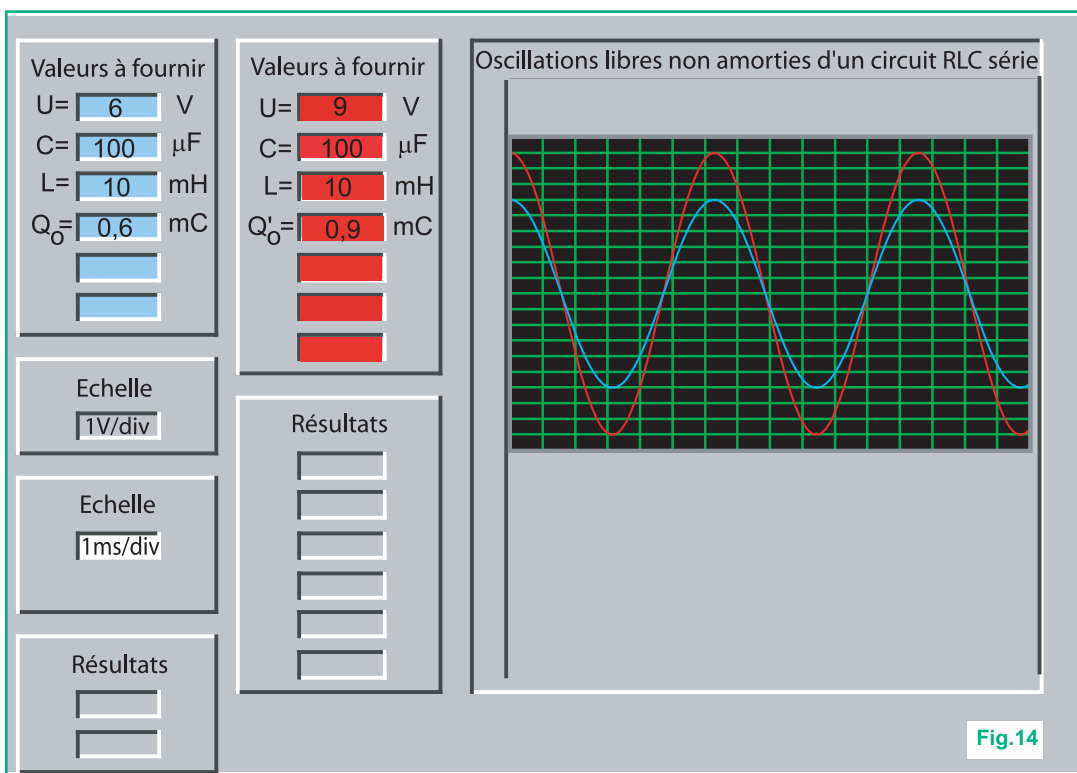
**Remarque**

Compte tenu du fait que les ordres de grandeur des capacités et des inductances sont les mêmes que ceux de  $L = 10 \text{ mH}$  et  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$  utilisées pour réaliser la simulation précédente, la valeur obtenue pour  $T_0$  (réponse à la question n°1 ci-dessus :  $T_0 = 6,28 \text{ ms}$ ) montre que l'oscillateur RLC série non amorti a une période propre très inférieure à la seconde.

**1.3- AMPLITUDE ET PHASE INITIALE DES OSCILLATIONS**

On vient de voir que dans l'expression de  $q(t)$ ,  $\omega_0$  ne dépend que de  $L$  et de  $C$ . Qu'en est-il quant à la valeur de l'amplitude des oscillations de la charge  $q$  ainsi qu'à la valeur de sa phase initiale ?

En réalisant une deuxième simulation des oscillations de  $q$  avec les mêmes choix des valeurs de  $L$  et de  $C$ , mais en remplaçant la valeur  $Q_m = 6 \cdot 10^{-4} \text{ C}$  par la valeur  $Q'_m = 9 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ , on obtient, en plus du premier chronogramme de la figure 13, un deuxième chronogramme dans le même système d'axes (Fig.14).



En relevant sur les chronogrammes de la figure 14, les valeurs des deux amplitudes des oscillations de  $q$ , on constate qu'elles sont égales respectivement aux valeurs  $Q_m$  et  $Q'_m$  de la charge initiale du condensateur. En ce qui concerne la phase initiale, si l'on choisit comme origine des temps l'instant de fermeture du circuit LC, on a  $q(0) = Q_0$ .

Or, à  $t = 0$ ,  $q = Q_m \sin \varphi$ , d'où  $Q_m \sin \varphi = Q_0$ , ce qui donne  $\sin \varphi = 1$ . Donc,  $\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

En choisissant un autre instant comme origine des temps, il est clair que l'on aboutit avec le même raisonnement à une autre valeur de  $\varphi$  différente de  $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ .

**Conclusion**

L'amplitude et la phase initiale des oscillations libres d'un circuit RLC série non amorti ne dépendent que des conditions initiales.

Toutefois, la valeur de l'amplitude est tributaire de la valeur de la charge initiale du condensateur, tandis que la valeur de la phase initiale est fonction du choix arbitraire de l'origine des temps.

**Questions**

1°) Sachant que  $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \pi/2)$ , montrer que l'intensité  $i$  du courant électrique circulant dans le circuit RLC non amorti peut s'écrire sous la forme :

$$i(t) = \omega_0 Q_m \cos(\omega_0 t + \pi/2).$$

2°) En déduire que  $i$  est une autre grandeur oscillante non amortie du circuit RLC série qui s'écrit sous la forme :  $i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \phi_i)$  tout en précisant l'expression de l'amplitude  $I_m$  et la valeur de la phase initiale  $\phi_i$ .

## 2 ÉNERGIE TOTALE D'UN OSCILLATEUR LC

### 2.1- CONSERVATION DE L'ÉNERGIE TOTALE

$$E = E_C + E_L = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} L i^2.$$

$$\text{Avec } q = Q_m \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}), \quad i = \frac{dq}{dt} = Q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}).$$

$$\text{Donc, } E = \frac{1}{2C} (Q_m \cos \omega_0 t)^2 + \frac{1}{2} L (-Q_m \omega_0 \sin \omega_0 t)^2.$$

$$E = \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t).$$

$$\text{Or, } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \text{ il vient : } E = \frac{Q_m^2}{2C} [(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))]$$

On sait que  $(\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t = 1)$  quel que soit  $t$ .

$$\text{Donc, } E = \frac{1}{2C} Q_m^2 = \frac{1}{2} L I_m^2$$

$E$  reste constante au cours du temps : on dit que l'énergie totale de l'oscillateur LC se conserve.

**Questions**

1°) Comparer l'énergie totale  $E$  du circuit RLC série en oscillations libres non amorti avec l'énergie qui lui est transférée initialement ; ce résultat est-il prévisible? Pourquoi?

2°) Montrer que l'énergie totale de l'oscillateur peut s'écrire sous la forme :  $E = \frac{1}{2} L I_m^2$  sachant que  $I_m = \omega_0 Q_m$  et  $LC \omega_0^2 = 1$ .

3°) Montrer autrement, par l'étude de l'évolution de  $\frac{dE}{dt}$ , que  $E$  est constante et vérifier que le résultat trouvé est un cas particulier du résultat  $\frac{dE}{dt} = -Ri^2$  établi lors de l'étude des oscillations libres amorties du même oscillateur.



## Conclusion

L'oscillateur RLC série en oscillation libre non amorti est un système conservatif. Son énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude de la grandeur oscillante  $q(t)$  ou  $i(t)$ .

$$E = \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{1}{2} L_m i_m^2 = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2$$

## 2.2- ÉVOLUTION DES ÉNERGIES ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE

Pour étudier l'évolution, au cours du temps, des énergies électrostatique  $E_C$  et magnétique  $E_L$ , il suffit de s'appuyer sur les courbes (1) et (2) représentant respectivement la charge  $q$  du condensateur et l'intensité  $i$  du courant circulant à travers la bobine, dans le cas où  $q = Q_m$  à  $t = 0$  ( Fig.15).

♦ A  $t = 0$ , la charge est maximale et l'intensité du courant est nulle, ce qui signifie que l'énergie totale:  $E = E_{C_{\max}} = \frac{Q_m^2}{2C}$ .

Donc, l'énergie du circuit LC est purement électrostatique.

♦ Pendant l'intervalle de temps  $] 0, T_0/4 [$ , la charge  $q$  diminue et l'intensité  $i$  négative augmente en valeur absolue. Donc, la décharge du condensateur dans la bobine s'accompagne d'une transformation de l'énergie électrostatique en énergie magnétique.

♦ A  $t = T_0/4$ , la charge  $q$  s'annule, donc l'énergie électrostatique est nulle, et l'intensité  $i$  du courant est maximale en valeur absolue. Donc, l'énergie magnétique est maximale.

Par conséquent, l'énergie du circuit LC est purement magnétique :  $E = E_{L_{\max}} = \frac{1}{2} L_m i_m^2$ .

♦ Pendant l'intervalle de temps  $] T_0/4, T_0/2 [$ , bien que la charge  $q$  soit négative, sa valeur absolue augmente alors que celle de l'intensité  $i$  diminue. En fait, grâce à l'énergie magnétique qu'elle a stockée entre 0 et  $T_0/4$ , la bobine joue le rôle de générateur en chargeant progressivement le condensateur, ce qui se traduit par une transformation de l'énergie magnétique en énergie électrostatique.

♦ A  $t = T_0/2$ , l'intensité  $i$  du courant s'annule et la charge  $q$  est maximale en valeur absolue. Ainsi, comme à  $t = 0$ , à l'instant  $t = T_0/2$ , l'énergie totale est purement électrostatique.

♦ Pendant la deuxième demi-période, c'est-à-dire entre  $T_0/2$  et  $T_0$ , tout se passe comme pendant la première demi-période mais avec une augmentation de la charge  $q$  de  $-Q_m$  à  $+Q_m$  et une circulation du courant dans le sens positif.

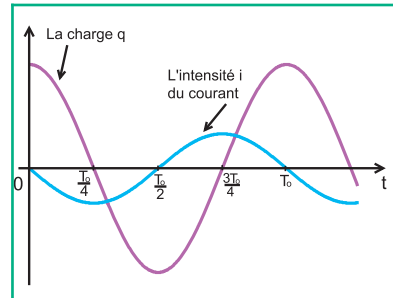


Fig.15 : Évolution temporelle de  $q$  et  $i$ .

♦ Pendant l'intervalle de temps  $]T_0/2, 3T_0/4[$ , l'énergie électrostatique se transforme en énergie magnétique, tandis qu'entre  $3T_0/4$  et  $T_0$ , l'énergie magnétique se transforme en énergie électrostatique. Ainsi, il s'avère que comme en régime libre amorti, il y a transformation mutuelle d'énergie magnétique et d'énergie électrostatique, mais sans aucune perte : si, pendant un quart de période  $T_0$ , l'énergie électrostatique se transforme en énergie magnétique, c'est l'énergie magnétique qui se transforme en énergie électrostatique pendant le quart de période suivant, et ainsi de suite.

Effectivement, pour  $C = 0,47\mu\text{F}$  et  $L = 0,1\text{ H}$ , l'enregistrement graphique de l'énergie électrostatique  $E_C$  et de l'énergie magnétique  $E_L$  avec un logiciel approprié donne les chronogrammes de la figure 16 lorsque le condensateur de l'oscillateur est chargé initialement sous la tension  $U_0 = 5\text{ V}$ .

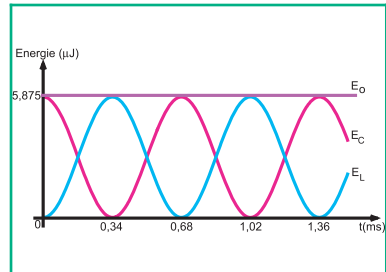


Fig.16 : Chronogrammes des énergies

### Questions

1°) Interpréter énergétiquement les oscillations libres non amorties d'un circuit RLC série de résistance  $R$  nulle.

2°) A l'aide des graphiques de la figure 16 :

a- Montrer que les énergies électrostatique  $E_C$  et magnétique  $E_L$  varient périodiquement au cours du temps.

b- Calculer les périodes de  $E_C$  et de  $E_L$ , les comparer entre elles et avec la période propre  $T_0$  de l'oscillateur LC.

c- Relever la valeur de l'énergie totale  $E$  de l'oscillateur et la comparer à l'énergie  $E_0$  qui y est emmagasinée initialement.

3°) Montrer théoriquement que :  $E_C = \frac{Q_m^2}{4C}(1 + \cos 2\omega_0 t)$  et que  $E_L = \frac{1}{4} L I_m^2 (1 - \cos 2\omega_0 t)$

sachant que dans les conditions d'enregistrement,  $q = Q_m \cos \omega_0 t$  et vérifier que l'énergie totale de l'oscillateur est constante et égale à l'énergie qui lui est transférée initialement.

### Conclusion

Les oscillations libres d'un circuit RLC série non amorti sont dues aux transformations mutuelles et intégrales de ses énergies électrostatique et magnétique : l'énergie totale du système est transférée continuellement de manière intégrale du condensateur à la bobine et inversement.

# L'essentiel

- L'évolution de la charge du condensateur d'un circuit RLC série est régie en régime libre

par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

- Un circuit RLC série auquel on a transféré initialement de l'énergie peut être le siège d'oscillations électriques libres amorties, c'est le régime pseudo-périodique.
- Les oscillations libres d'un circuit RLC série sont d'autant plus amorties et leur pseudopériode est d'autant plus grande que la résistance R du circuit est plus grande. Pour des valeurs suffisamment élevées de la résistance R, c'est le régime aperiodique.
- Si la résistance d'un circuit RLC série est nulle, les oscillations libres ne sont plus amorties, elles sont sinusoïdales, c'est le régime périodique.
- La période propre d'un oscillateur RLC est :  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$
- La pseudo-période des oscillations libres amorties d'un circuit RLC série est légèrement supérieure à  $T_0$ .
- Les oscillations libres d'un circuit RLC série sont dues aux transformations mutuelles de ses énergies électrostatique et magnétique.
- En régime libre, l'énergie totale d'un circuit RLC série ne se conserve que si sa résistance totale est nulle.

# Exercices

## Exercice résolu

### ÉNONCÉ

Dans une séance de travaux pratiques, on dispose du matériel suivant :

- un générateur de tension de f.e.m.  $E = 5 \text{ V}$ ,
- un condensateur de capacité  $C = 1 \mu\text{F}$ ,
- une bobine d'inductance  $L = 10 \text{ mH}$  et de résistance interne  $r$ ,
- un résistor de résistance  $R = 90 \Omega$ ,
- un oscilloscope à mémoire.
- un interrupteur et des fils de connexion.

A l'aide de ce matériel, on réalise le montage de la figure 1.

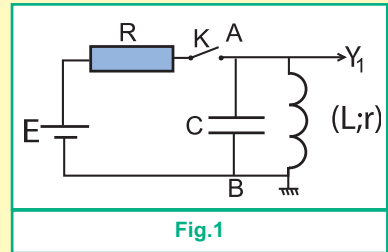


Fig.1

1°) La résistance  $r$  de la bobine est supposée nulle.

a) L'interrupteur  $K$  étant fermé :

- montrer que la tension aux bornes de la bobine est nulle, en déduire la valeur de la charge du condensateur,
- calculer l'intensité  $I_0$  du courant parcourant la bobine.

b) En ouvrant l'interrupteur  $K$  à l'instant  $t = 0$  :

- décrire qualitativement ce qui se passe dans le circuit,
- établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension  $u$  aux bornes du condensateur,
- sachant que cette équation différentielle admet comme solution  $u = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  que l'on calculera, déterminer les valeurs de  $U_m$  et de  $\varphi$  ; écrire les expressions de la charge  $q(t)$  du condensateur et de l'intensité  $i(t)$  du courant circulant dans la bobine.

c) D'où provient l'énergie de l'oscillateur réalisé? La calculer.

2°) Avec les réglages adéquats sur l'oscilloscope et en mettant son dispositif de balayage en marche juste avant l'ouverture de l'interrupteur  $K$ , on obtient l'oscillogramme de la figure 2. S'y appuyer pour :

a- montrer par deux méthodes différentes que la résistance interne  $r$  de la bobine n'est pas nulle ;

b- calculer  $r$  ;

c- calculer la pseudo-période  $T$  des oscillations de la charge  $q$  du condensateur et la comparer à la période propre  $T_0$  ;

d- évaluer algébriquement la variation qui a affecté l'énergie totale de l'oscillateur entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  indiqués sur la figure 2.

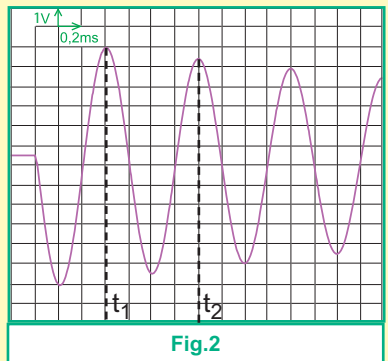


Fig.2

**SOLUTION**

1°) a- La tension instantanée  $u_1 = u_{AB}$  aux bornes d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$  parcourue par un courant d'intensité  $i$  est :  $u_1 = r i + L \frac{di}{dt}$ . (1)

Lorsque le régime permanent est établi dans le circuit,  $i(t)$  devient

indépendant du temps, d'où  $\frac{di}{dt} = 0$ .

Donc, l'équation (1) devient :  $u_1 = r.i$ .

Or, la résistance  $r$  est supposée nulle. Donc,  $u_1 = 0 \text{ V}$ .

- En choisissant comme sens positif du courant le sens orienté de B vers A à travers le condensateur (Fig.1) et comme charge  $q$  du condensateur celle portée par son

armature qui est du côté de B, on a  $u_{AB} = -\frac{q}{C}$ . Or,  $u_{AB} = u_1 = 0$ .

Donc la charge  $q$  est nulle.

- On sait qu'en régime permanent, le condensateur joue le rôle d'un interrupteur ouvert. Donc, tout le courant d'intensité  $I_0$  débité par le générateur circule dans la bobine.

D'après la loi de Pouillet,  $I_0 = \frac{E}{R}$ .

A.N :  $I_0 = 55,5 \text{ mA}$ .

b- Lorsque l'on ouvre l'interrupteur  $K$ , à cause du phénomène d'auto-induction, la bobine s'oppose à l'annulation du courant. Celui-ci continue à circuler, d'après la loi de Lenz, dans le même sens. Ainsi, le condensateur va se charger et à son tour, il se déchargera dans la bobine dès que le courant s'annule et ainsi de suite :

le circuit LC série est le siège d'oscillations libres non amorties.

- La loi des mailles s'écrit :  $u_C + u_L = 0$  (Fig.2).

En posant  $u_C = u$ , on a :  $u - L \frac{di}{dt} = 0$

Or,  $i = \frac{dq}{dt}$  et  $q = -C.u$ . Donc,  $i = -C \frac{du}{dt}$ . D'où :  $u + LC \frac{d^2u}{dt^2} = 0$ ,

ce qui signifie :  $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC}u = 0$

- On a :  $u(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

A  $t = 0$ ,  $u = U_m \sin \varphi = 0$ , d'où  $\sin \varphi = 0$ . Donc,  $\varphi = 0$  ou bien  $\varphi = \pi \text{ rad}$ .

On a :  $i = -C \frac{du}{dt}$ . Donc,  $i = -C U_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . A  $t = 0$ , on a :  $i = -C U_m \omega_0 \cos \varphi = I_0 > 0$ .

Donc,  $\cos \varphi < 0$ . D'où,  $\varphi = \pi \text{ rad}$ .

$\cos \varphi = -\frac{I_0}{U_m C \omega_0} = -1$ , ce qui signifie :  $U_m = \frac{I_0}{C \omega_0}$ .

A.N :  $U_m \simeq 5,55 \text{ V}$ .

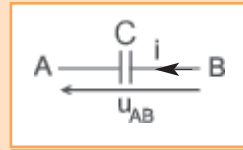


Fig.1

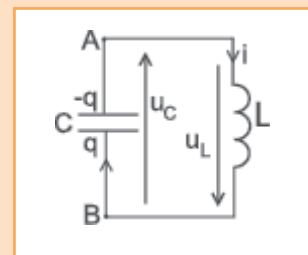


Fig.2

Finalement, on a :  $u(t) = 5,55 \sin(10^4 t + \pi)$

$q = -C.u$ , d'où  $q = 5,55 \cdot 10^{-6} \sin(10^4 t)$

$i = -CU_m \omega_o \cos(\omega_o t + \varphi) = CU_m \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi - \frac{\pi}{2})$ . Or,  $CU_m \omega_o = I_o$ . Donc,  $I_m = I_o = 55,5 \text{ mA}$ .

D'où :  $i = 55,5 \sin(10^4 t + \frac{\pi}{2})$  en mA avec t en seconde.

**c -**  $E = E_L + E_C$

La résistance du circuit RLC série étant supposée nulle, l'énergie totale se conserve : elle reste égale à l'énergie transférée initialement à l'oscillateur, c'est l'énergie magnétique  $E_L = \frac{1}{2} L I_o^2$  emmagasinée par la bobine durant tout le régime permanent de la question 1°a).

$$E = \frac{1}{2} L I_o^2$$

A.N :  $E = 1,54 \cdot 10^{-5} \text{ J}$

**2°) a - Première méthode :** Pour tout instant  $t > 0$ , la diminution de l'amplitude des oscillations libres durant le régime transitoire est due à la résistance du circuit qui est la résistance r de la bobine. Donc, r est non nulle.

**Deuxième méthode :** Durant le régime permanent, obtenu pour  $t < 0$ , la tension aux bornes du condensateur est :  $u = 0,5 \text{ V}$ . Or, la tension  $u_{AB}$  aux bornes de la bobine est égale à u d'où  $u_{AB} = 0,5 \text{ V} \neq 0$ . Donc,  $r = \frac{u_{AB}}{I_o}$  est non nulle.

**b -** On a :  $r = \frac{u}{I_o}$ . Or,  $I_o = \frac{E}{r+R}$ , d'où  $r = \frac{u}{E}(R+r)$ . Donc,  $r = \frac{u.R}{E-u}$ .

A.N :  $r = 10 \Omega$ .

**c -** D'après l'oscillogramme,  $T = t_2 - t_1$  qui correspond à peu près à 3.15 div sur l'axe des temps.

Or, une division représente 0,2 ms. Donc,  $T = 0,63 \text{ ms}$ .

$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 0,628 \text{ ms}$ , d'où **T est légèrement supérieure à  $T_o$** .

**d -** Aux instants  $t_1$  et  $t_2$ , u est maximale. Donc, l'énergie du circuit RLC série est purement électrostatique.

A l'instant  $t_1$ , on a :  $E_1 = \frac{1}{2} C U_{m1}^2$  et à l'instant  $t_2$ , on a :  $E_2 = \frac{1}{2} C U_{m2}^2$ .

D'après l'oscillogramme, on a :  $U_{m1} = 5,5 \text{ V}$  et  $U_{m2} = 5 \text{ V}$ .

Donc,  $E_2 - E_1 = \frac{1}{2} C (U_{m2}^2 - U_{m1}^2)$ .

A.N :  $E_2 - E_1 = - 2,625 \cdot 10^{-6} \text{ J}$ .

# Exercices à résoudre

## Tests rapides des acquis

### 1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

- 1-La décharge d'un condensateur dans une bobine est identique à sa décharge dans un résistor.  
 2-La pseudo-période des oscillations d'un circuit RLC série est légèrement inférieure à sa période propre.  
 3-Un oscillateur RLC série transfère son énergie à l'extérieur d'autant plus rapidement que sa résistance est plus grande.  
 4- Dans un régime pseudo-périodique, le nombre d'oscillations augmente lorsque la pseudo-période augmente.  
 5- Les oscillations libres d'un circuit RLC amorti sont dues à des transformations intégrales des énergies électrostatique et magnétique.

### 2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la (ou les) proposition(s) juste(s).

- I- L'amortissement des oscillations libres d'un circuit RLC série est dû à :
- a- la capacité du condensateur ;
  - b- l'inductance de la bobine ;
  - c- la résistance du résistor ;
  - d- sa résistance totale.
- II- La décharge d'un condensateur dans une bobine purement inductive fait naître des oscillations ;
- a-périodiques ;
  - b-sinusoïdales amorties ;
  - c-pseudo-périodiques non amorties ;
- III- La période propre  $T_0$  d'un oscillateur RLC série s'exprime :
- a -  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{C}}$  ;
  - b -  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{1}{LC}}$  ;
  - c -  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ .
- IV- Un circuit RLC série ne peut entrer en régime d'oscillations libres :
- a-sans lui transférer initialement de l'énergie ;
  - b-sans lui transférer sans cesse de l'énergie ;
  - c-sans qu'il transfère lui-même de l'énergie à l'extérieur ;
  - d-sans les transformations mutuelles d'énergie électrique et d'énergie magnétique.

## Exercices d'application

- 3 On se propose d'étudier le comportement d'un circuit RLC constitué par une association en série d'une bobine de résistance  $r$  et d'inductance  $L$  et d'un condensateur de capacité  $C = 15 \mu\text{F}$ .  
 On prend une pile plate du commerce de f.é.m.

$E = 4.5 \text{ V}$  et un résistor de résistance  $R = 1 \text{ k}\Omega$ , puis on réalise le montage de la figure 1. Un dispositif informatisé d'acquisition de données permet de visualiser à travers son entrée Y la tension  $u$  aux bornes du condensateur en fonction du temps.

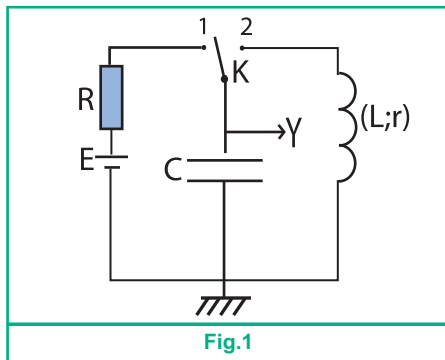


Fig.1

On place le commutateur en position 1 jusqu'à ce que le condensateur soit chargé, puis on le bascule en position 2 à un instant que l'on prendra comme origine des temps : la fermeture du commutateur en position 2 déclenche l'acquisition des mesures. La courbe de la figure 2 s'affiche sur l'écran de l'ordinateur.

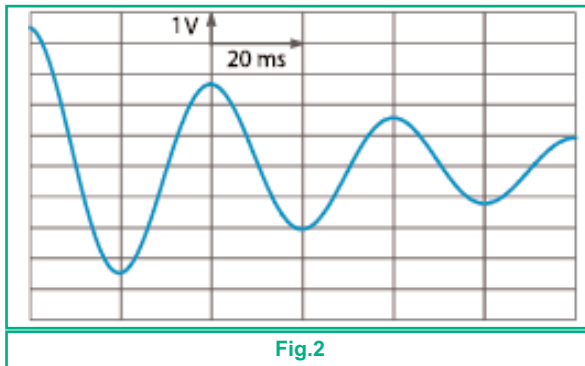
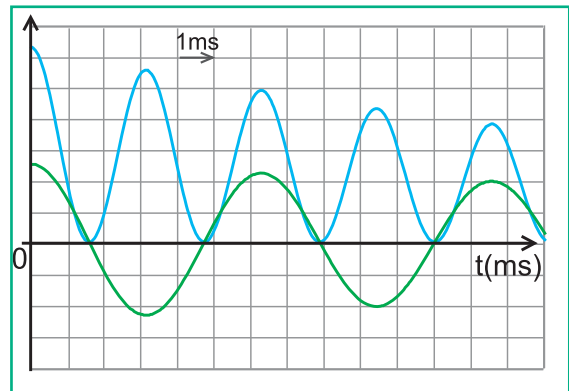


Fig.2

- 1°) De quel phénomène le circuit est-il le siège?
- 2°) Calculer l'énergie du condensateur en début d'acquisition, à l'instant  $t=0$  et au bout de deux oscillations. Quelles sont les transformations d'énergie qui ont lieu dans ce circuit pendant une pseudopériode ?
- 3°) Etablir l'équation différentielle que vérifierait la tension  $u_C$  dans le cas où la résistance interne de la bobine est nulle.
- 4°) Dédire de la question précédente, les expressions littérales de la pulsation propre et de la période propre du circuit. Sachant que, dans les conditions choisies pour l'acquisition, la pseudopériode peut être confondue avec la période propre, calculer la valeur de l'inductance  $L$  de la bobine.

**4** Un circuit RLC série est constitué d'une bobine d'inductance  $L = 1$  H, de résistance

$R$  et d'un condensateur de capacité  $C = 1 \mu\text{F}$ . Le condensateur est initialement chargé. À  $t = 0$ , on décharge le condensateur dans la bobine et on enregistre l'évolution de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur ainsi que celle de l'énergie électrique  $E_C$  qui y est emmagasinée (Fig. ci-dessous). Les échelles des ordonnées ne sont pas indiquées sur le graphique de cette figure.



- 1°) Montrer graphiquement que la résistance  $R$  de la bobine n'est pas nulle.
- 2°) Déterminer graphiquement la pseudo-période  $T$  de  $u_C(t)$ .
- 3°) Comparer la valeur mesurée  $T$  à la valeur de la période propre  $T_0$  du circuit.
- 4°) Quelle est la pseudo-période  $T_E$  de l'énergie  $E_C$ ?
- 5°) Comparer  $T_E$  et  $T$ .

**5** On réalise un montage formé par une association en série:

- d'un condensateur de capacité  $C = 0.47 \mu\text{F}$ , initialement chargé sous une tension de  $5$  V ,
- d'une bobine d'inductance  $L = 44$  mH et de résistance nulle,
- d'un interrupteur.

1°) a-Établir l'équation différentielle que vérifie la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur après la fermeture du circuit. En déduire l'expression de la période propre  $T_0$  du circuit.

b-Exprimer  $u_C$  en fonction du temps.

c-En déduire l'expression de la charge  $q$  du condensateur.

2°) On remplace le condensateur par un autre de capacité  $C' = 4 C$  et la bobine par une autre d'inductance  $L' = L/2$ .

Exprimer la nouvelle période  $T'_0$  en fonction de  $T_0$ .



**6** L'équation différentielle associée à la décharge d'un condensateur de capacité  $C$  et portant initialement la charge  $Q_0 = 4 \cdot 10^{-4}$  C, dans une bobine d'inductance  $L$ , s'écrit :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad (1)$$

1°) Donner l'expression de l'énergie totale du circuit  $L, C$ .

2°) Retrouver l'équation différentielle (1) en utilisant le fait que l'énergie totale se conserve.

3°) vérifier que  $q = Q_m \sin(\omega_0 t + \phi)$  est solution de l'équation (1).

4°) Donner, en fonction de  $L$  et  $C$ , l'expression de la période propre de l'oscillateur électrique. La calculer.

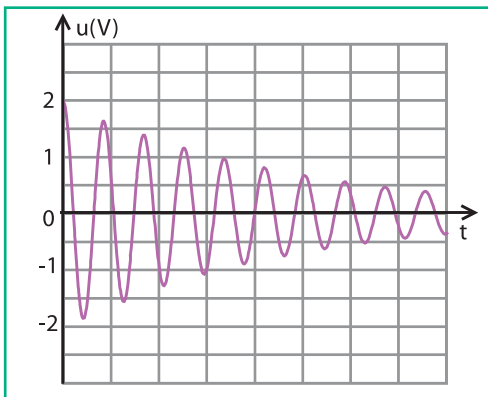
5°) Le circuit a été fermé à un instant pris comme origine des temps .

Déterminer numériquement les constantes figurant dans l'expression de la charge  $q$ .

**On donne :**  $C = 30 \mu\text{F}$  et  $L = 0,1$  H.

**7** Le graphe ci-après représente l'évolution au cours du temps de la tension  $u$  aux bornes d'un condensateur de capacité  $C = 1,16 \mu\text{F}$  qui a été chargé puis connecté à une bobine d'inductance  $L = 0,35$  H et de résistance interne  $r$ . On numérotera les maxima de tension visibles à partir de 1.

La pseudopériode des oscillations a pour valeur  $T = 4,4$  ms.



1°) Comparer la pseudopériode  $T$  à la période propre  $T_0$  de l'oscillateur.

2°) Exprimer puis calculer l'énergie électrique du condensateur aux instants  $t_1$  et  $t_7$  correspondant au maxima 1 à 7.

3°) a- Donner la valeur de l'énergie magnétique de la bobine et de l'énergie totale du circuit aux mêmes instants.

b- Conclure quant à l'évolution de l'énergie totale de l'oscillateur au cours du temps.

## Exercices de synthèse

**8** On considère le circuit électrique comportant un générateur de tension idéal de f.e.m.  $E = 6$  V, un condensateur de capacité  $C = 20 \mu\text{F}$ , une bobine d'inductance  $L = 0,8$  H et de résistance nulle, deux résistors de même résistance  $R = 20 \Omega$  et deux interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$  (Fig.1).

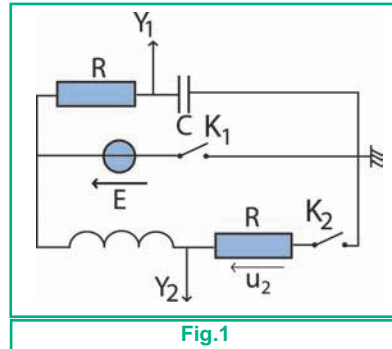


Fig.1

### A- Première partie

Dans cette expérience, on ferme  $K_1$  (en maintenant  $K_2$  ouvert). Le dipôle RC est alors soumis à un échelon de tension de valeur  $E$ .

1°) Quel est le nom du phénomène observé sur la voie 1 à la fermeture de  $K_1$ ?

2°) Reproduire la partie de circuit concerné et indiquer sur le schéma, juste après la fermeture de l'interrupteur  $K_1$ , le sens du courant, le signe des charges de chacune des armatures du condensateur. Indiquer la flèche-tension  $u_1$  aux bornes du condensateur.

3°) sur la voie  $Y_1$  d'un oscilloscope à mémoire, on obtient la courbe de la figure 2. Déterminer graphiquement, la constante de temps  $\tau$  du dipôle RC en explicitant la méthode utilisée. Sachant que  $R = 20 \Omega$ , en déduire la valeur de la capacité  $C$ .

4°) L'étude théorique du dipôle RC conduit à l'équation différentielle :  $\tau \frac{du_1}{dt} + u_1 = E$

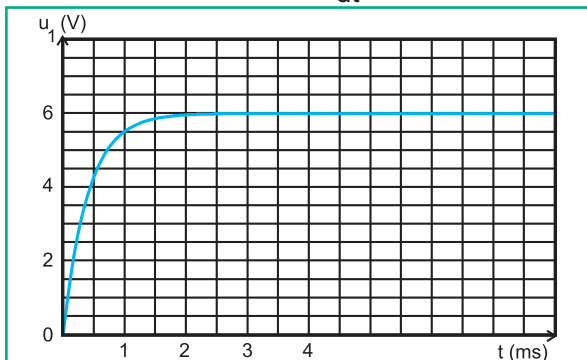


Fig.2

a- Retrouver cette équation différentielle en appliquant la loi des mailles.

b- Compte tenu des conditions initiales, la solution de cette équation est de la forme :

$$u_1 = E \cdot [1 - \exp(-t/\tau)].$$

Calculer la valeur de  $u_1$  pour  $t = 5\tau$ . Conclure.

### B- Deuxième partie

Une fois la première expérience réalisée, on ouvre  $K_1$  puis on ferme  $K_2$ . Le circuit est alors le siège d'oscillations électriques. À l'aide d'un dispositif d'acquisition de données, on visualise la tension  $u_1$  aux bornes du condensateur sur la voie 1 et la tension  $u_2$  aux bornes du résistor sur la voie 2 du même oscilloscope. On obtient les courbes 1 et 2 de la figure 3.

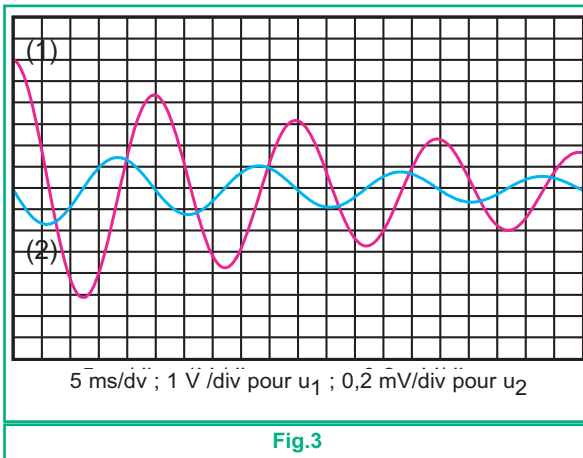


Fig.3

1°) Attribuer à chaque courbe la tension correspondante en justifiant brièvement la réponse pour une courbe seulement.

2°) Etablir l'équation différentielle à laquelle obéissent les oscillations de  $u_2(t)$ .

3°) Déterminer graphiquement la valeur de la pseudopériode  $T$  des oscillations. Comparer les valeurs de  $T$  et de la période propre  $T_0$  de l'oscillateur.

4°) On réalise à présent la deuxième expérience en modifiant un seul des paramètres  $R$  ou  $L$ .

Deux cas sont proposés : dans l'un, on a augmenté la valeur de  $L$  ; dans l'autre, on a augmenté la valeur de  $R$ . On obtient les courbes des figures 4 et 5.

Attribuer à chaque cas proposé la figure qui lui correspond et justifier la réponse.

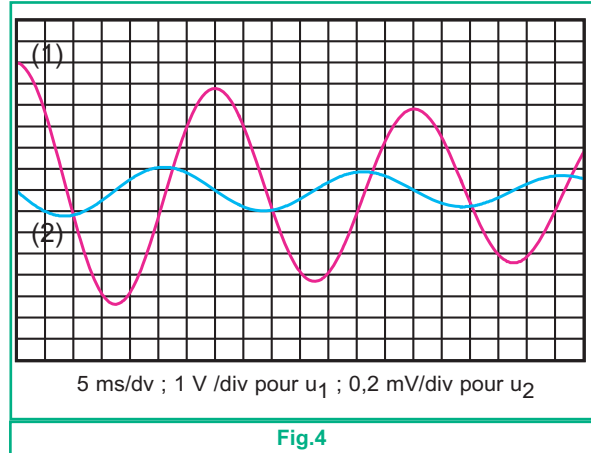


Fig.4

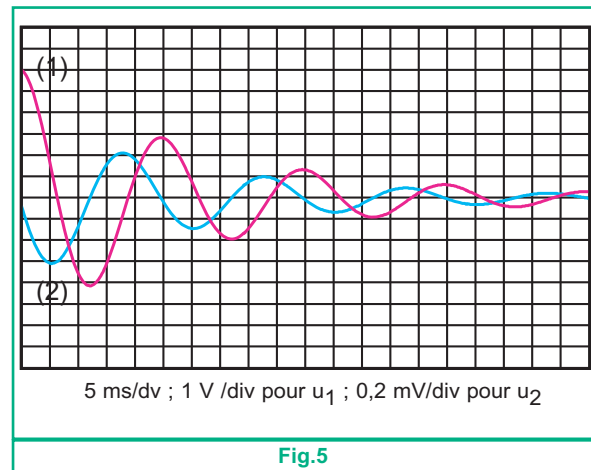


Fig.5

9 Un condensateur de capacité  $C = 10 \mu\text{F}$  est chargé avec un générateur maintenant entre ses bornes une tension  $U_0 = 3 \text{ V}$ .

1°) Calculer la charge du condensateur et l'énergie qu'il a emmagasiné.

2°) Ce condensateur chargé est déconnecté du générateur puis relié, à  $t = 0$ , aux bornes d'une bobine d'inductance  $L = 0,1 \text{ H}$ . La résistance totale du circuit est pratiquement nulle.

a- Faire un schéma du montage. Dessiner qualitativement ce que l'on observerait sur l'écran d'un oscilloscope branché aux bornes du condensateur.

b- Donner une interprétation énergétique du phénomène.

c- Établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la tension instantanée  $u_C$  aux bornes du condensateur.

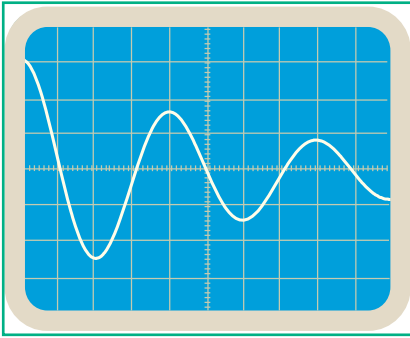
d- Quelle relation doit lier la période propre  $T_0$ ,  $C$  et  $L$  pour que la solution de cette équation différentielle soit  $u_C(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \phi)$  ?

e- Déterminer les valeurs de la tension maximale  $U_m$  et de la phase initiale  $\phi$ .

f- Exprimer, en fonction de  $T_0$ , les instants pour lesquels l'intensité du courant électrique est maximale.

3°) En réalité la bobine possède en plus de l'inductance une résistance  $r$  non nulle.

La tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur est enregistrée avec un oscilloscope à mémoire. La courbe obtenue avec la sensibilité horizontale  $10 \text{ ms.div}^{-1}$  est reproduite sur la figure ci-dessous.



a- Comparer la pseudopériode  $T$  et  $T_0$ .

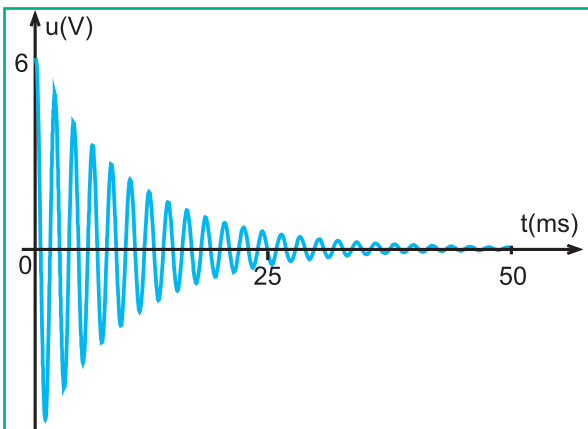
b- Pourquoi a-t-on besoin d'un oscilloscope à mémoire ?

c- Calculer l'énergie thermique dissipée par la résistance  $r$  de la bobine au bout de l'oscillation produite entre  $t_0 = 0$  et  $t_1 = T$ .

**10** Au cours d'une séance de travaux pratiques, on veut vérifier l'exactitude de la valeur  $L = 0,2 \text{ H}$  de l'inductance d'une bobine, indiquée par le fabricant.

Pour cela, on étudie la décharge d'un condensateur de capacité  $C = 0,5 \mu\text{F}$ , initialement chargé sous la tension  $E = 6 \text{ V}$ , à travers la bobine.

A l'aide d'un dispositif informatisé d'acquisition de données, on visualise sur l'écran d'un ordinateur, la courbe d'évolution de la tension  $u$  aux bornes du condensateur en fonction du temps. (Fig. ci-après)



1°) Pourquoi qualifie-t-on un tel régime d'évolution temporelle de  $u$  comme étant un régime pseudo-périodique et non périodique ?

2°) a- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u$ .

b- On pose cette équation différentielle sous la forme suivante :  $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$

\* Expliciter  $\tau$  et donner sa dimension ainsi que sa signification physique.

\* Déterminer à partir de la courbe, une valeur approchée de  $\tau$ . En déduire la valeur de  $L$ .

On donne  $R = 20 \Omega$ .

c- Comparer la valeur de l'inductance trouvée expérimentalement  $L_{\text{exp}}$  avec la valeur  $L = 0,2 \text{ H}$  portée sur le support de la bobine en calculant

l'écart relatif  $\frac{L_{\text{exp}} - L}{L}$ .

En déduire si l'indication  $L = 0,2 \text{ H}$  est correcte.

**11** A l'aide d'un générateur de tension, d'un condensateur, de deux résistors et d'une bobine inductive, on réalise le montage de la figure 1.

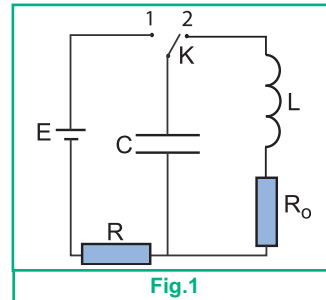


Fig.1

1°) On réalise la charge du condensateur de capacité  $C = 50 \mu\text{F}$  par le générateur de tension de f.e.m.  $E = 6 \text{ V}$ .

A l'instant  $t = 0$ , on place le commutateur  $K$  en position 1. L'évolution au cours du temps de la tension  $u_R$  aux bornes du résistor de résistance  $R = 30 \text{ k}\Omega$  et celle de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur sont représentées sur la figure 2.

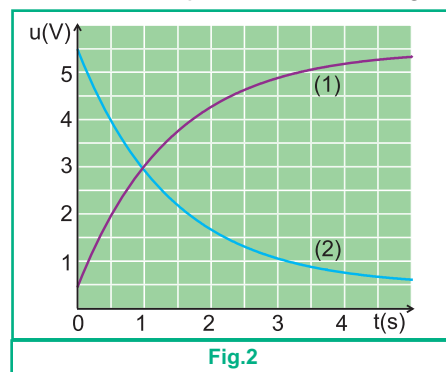


Fig.2

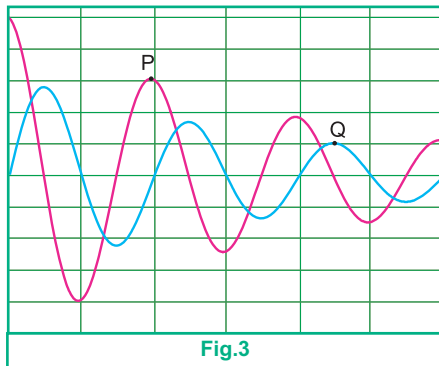
a- Quelle est, des courbes 1 et 2, celle qui illustre l'évolution de  $u_C$  ? Justifier la réponse.

b- Quelle serait la charge  $q$  du condensateur à la fin du processus de charge ?

c- Sachant que la constante de temps  $\tau$  du circuit est la durée au bout de laquelle le condensateur a acquis 63% de sa charge maximale, déterminer graphiquement la valeur de  $\tau$ .

d- Déterminer la valeur de l'intensité  $i$  du courant de charge à l'instant  $t = \tau$ .

2°) On suppose maintenant que le condensateur a acquis sa charge maximale. On place l'interrupteur  $K$  en position 2. On observe, à l'aide d'un oscilloscope, la tension  $u_C$  sur l'entrée  $Y_1$  et la tension  $u_{R_0}$  aux bornes du résistor de résistance  $R_0 = 5 \Omega$  sur l'entrée  $Y_2$  (Fig.3)



Les réglages de l'oscilloscope sont :

- sensibilité horizontale : 5 ms/div
- sensibilité verticale :

1V/div pour  $Y_1$  et 250 mV/div pour  $Y_2$ .

a- Rappeler les expressions de l'énergie électrostatique  $E_C$  et de l'énergie magnétique  $E_L$ . Calculer ces énergies aux instants correspondant aux points P et Q (Fig.3).

b- Comparer les énergies totales du circuit RLC série aux instants correspondant aux points P et Q.

## Étude de texte

### Capteur d'humidité

**12** La mesure du taux (ou pourcentage) d'humidité relative de l'air (%HR) est appelée l'hygrométrie. Pour pouvoir y accéder, on fait recours à des capteurs de type "résistif" (reposant sur la variation d'une résistance avec l'humidité) ou "capacitif" (- sur la variation de la capacité avec l'humidité) : les premiers capteurs, souvent à base d'oxydes métalliques, sont peu précis et affectés par la condensation. Les seconds, dits "humidistances" possèdent souvent les qualités requises.

Un humidistat comporte un condensateur plan dont la capacité de très faible valeur  $C$  de l'ordre de 120 pF varie en fonction de l'humidité du diélectrique. En fait, le diélectrique est un film de polymère (polyamide par exemple) dont la permittivité varie avec son humidité (Fig.1).

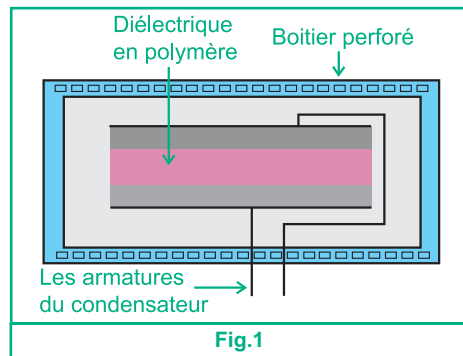


Fig.1

Cette variation d'humidité entraîne une variation de la fréquence propre du circuit RLC série dans lequel le condensateur est inséré.(Fig.2)

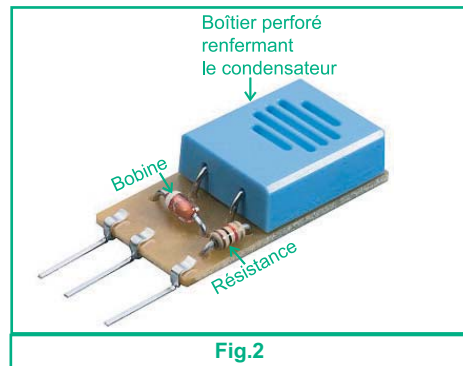


Fig.2

Ces capteurs d'humidité sont conçus pour fonctionner entre  $-10^\circ \text{C}$  et  $+40^\circ \text{C}$ , dans une gamme de mesure de 10 à 100 % d'humidité, avec une précision de quelques % et un temps de réponse de l'ordre de 30 s.

### Questions

1°) La permittivité du diélectrique utilisé est dite hygroscopique, pourquoi ?

2°) Expliquer comment la variation du taux d'humidité relative de l'air entraîne une variation de la fréquence propre des oscillations.

3°) Sachant que la valeur de  $C$  est à 40% HR et que la fréquence propre des oscillations au lieu de l'expérience est  $N_0 = 31850 \text{ Hz}$ , déterminer le taux d'humidité relative de l'air en ce lieu.

On donne  $L = 200 \text{ mH}$  et on suppose que la fréquence des oscillations est pratiquement égale à la fréquence propre de l'oscillateur.

# Fiche technique

## Visualisation d'un régime transitoire avec un oscilloscope analogique

Pour la mise en évidence expérimentale des régimes pseudopériodique et apériodique d'un oscillateur RLC série comme lors de l'étude expérimentale de la réponse d'un dipôle RC ou RL à un échelon de tension, on a eu besoin d'un oscilloscope à mémoire qui ne peut être que numérique. Mais, dans le cas échéant, c'est-à-dire à défaut d'un oscilloscope de ce type, peut-on se débrouiller avec un oscilloscope analogique ?

Oui, il suffit de penser à profiter de la durée  $\theta_p = 0,1s$  de persistance des impressions lumineuses sur la rétine de l'oeil et en cherchant un moyen permettant de visualiser le régime transitoire, que ce soit le régime pseudopériodique, le régime apériodique ou autre, de manière répétitive toutes les durées  $\theta$  inférieures à la durée  $\theta_p$  de persistance des impressions lumineuses. Pour cette fin, il est pratique et assez commode, pour charger par exemple le condensateur du circuit RLC série du montage de la figure 1 de la page 80, d'utiliser au lieu d'un générateur de tension idéal de f.e.m.  $E = 5 V$ , un générateur de tension en créneaux évoluant au cours du temps selon le chronogramme de la figure 1, entre  $-U_0 = -5V$  et  $+U_0 = +5V$ . Puis, on réalise le montage de la figure 2. Après avoir mis l'oscilloscope analogique en marche et avoir fait les réglages nécessaires, on observe à priori l'oscillogramme stable de la figure 3 à condition que la demi période  $\frac{T_e}{2}$  de la tension  $u$  en créneaux soit à la fois inférieure à la durée  $\theta_p$  de persistance des impressions lumineuses à l'oeil et très supérieure à la pseudopériode  $T$  des oscillations libres et par suite très supérieure à la période propre  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  de l'oscillateur.

Donc, pour obtenir un oscillogramme net et stable comme celui de la figure 3, il faut bien étudier le choix des valeurs de  $L$  et de  $C$  :

$$\infty T_0 \ll T_e. \text{ D'où, } LC \ll T_e^2$$

$$\infty T_e < \theta_p. \text{ D'où, } T_e^2 < \theta_p^2$$

Il faut donc :  $LC \ll \theta_p^2 = 10^{-2} s^2$ .

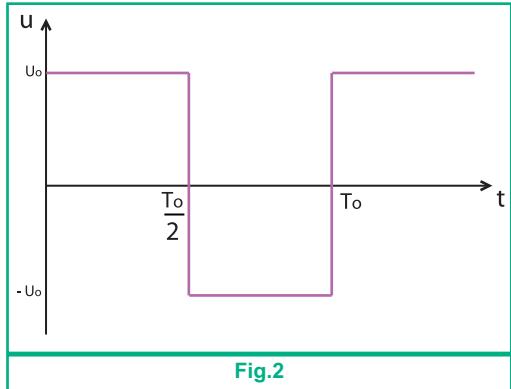


Fig.2

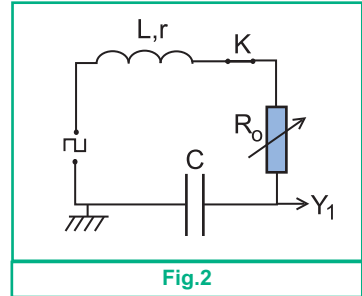


Fig.2

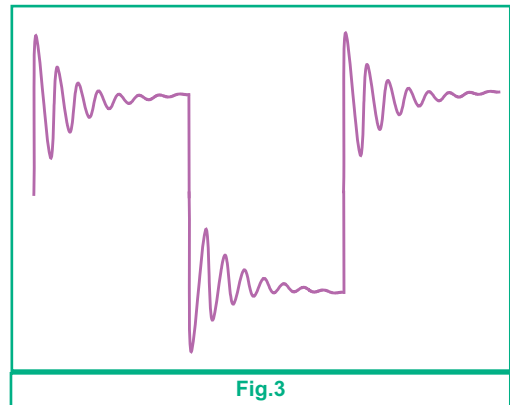


Fig.3

### Remarque

Dans le cas de la réponse d'un dipôle RC ou RL à un échelon de tension, il faut veiller à ce que la demi période de la tension en crénaux soit dix fois plus grande que la constante de temps du dipôle.

Enfin, en agissant sur la base des temps de l'oscilloscope, on arrive à visualiser l'oscillogramme représentant une seule décharge oscillante, c'est-à-dire la réponse à un seul échelon de tension (Fig.4)

De plus, l'oscilloscope lui-même peut être un facteur de perturbation des mesures. En fait, l'entrée  $Y_1$  ou  $Y_2$  d'un oscilloscope est équivalente à un résistor de résistance  $R_{osc} = 1 \text{ M}\Omega$  monté en parallèle avec un condensateur de capacité  $C_{osc}$  allant de 16 à 47 pF. Donc, il faut en tenir compte pour réussir l'expérience.

Par conséquent, le schéma du montage réalisé devient équivalent à celui de la figure 5.

Par application de la loi des mailles, on écrit :

$$u_C + (R_o + r) i + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$\text{où } i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{dq}{dt} + \frac{dq_{osc}}{dt} + \frac{u_C}{R_{osc}}$$

Or,  $q = Cu_C$  et  $q_{osc} = C_{osc} \cdot u_C$ , il vient alors :

$$i = C' \frac{du_C}{dt} + C_{osc} u_C \text{ avec } C' = C + C_{osc}$$

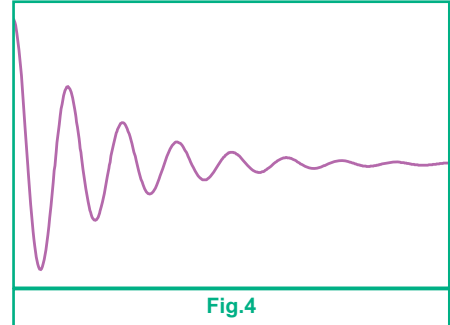


Fig.4

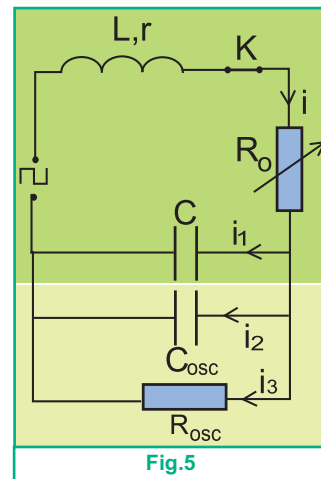


Fig.5

On peut facilement disposer d'un condensateur de capacité  $C \gg 50 \text{ pF}$ .

Donc, on peut négliger  $C_{osc}$  devant  $C$ , d'où  $C' \simeq C$  et  $i \simeq C \frac{du_C}{dt} + C_{osc} u_C$  (2).

$$(1) \text{ et } (2) \text{ donnent : } LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + [(R_o + r) C + \frac{L}{R_{osc}}] \frac{du_C}{dt} + (1 + \frac{R_o + r}{R_{osc}}) u_C = u$$

Pour que cette équation ne diffère pas de :  $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R_o + r) C \frac{du_C}{dt} + u_C = u$ , il faut :

•  $1 + \frac{R}{R_{osc}} \simeq 1$ , c'est-à-dire  $\frac{R}{R_{osc}} \ll 1$ , ce qui est facilement vérifié car

$R_{osc} = 1 \text{ M}\Omega$  est très élevée.

•  $(R_o + r)C + \frac{L}{R_{osc}} \simeq (R_o + r)C$ . Donc  $\frac{L}{R_{osc}} \ll (R_o + r)C$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{R_{osc} C} \ll \frac{R_o + r}{L}$ ,

ce qui signifie :  $\frac{L}{(R_o + r)C} \ll R_{osc} = 10^6$ .

Pour que la condition  $(R_o + r) \ll R_{osc}$  reste satisfaite, on ne peut augmenter  $R_o$ .  
Donc, pour satisfaire cette dernière condition, il faut choisir une très petite inductance  $L$  et  
une grande capacité  $C$ , mais sans perdre de vue la condition:  $LC \ll 10^{-2} \text{ s}^2$ .

Exemples :

∞ Avec  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 100 \text{ } \mu\text{F}$  et  $R_o$  telle que  $(R_o + r) = 20 \text{ } \Omega$ , on a :

$$LC = 10^{-6} \ll 10^{-2} \text{ et } \frac{L}{(R_o + r)C} = 5 \text{ } \Omega \ll 10^6 \text{ } \Omega : \text{ c'est un très bon choix.}$$

∞ Avec  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1 \text{ } \mu\text{F}$  et  $(R_o + r) = 20 \text{ } \Omega$ , on a toujours :

$$LC = 10^{-6} \ll 10^{-2} \text{ et } \frac{L}{(R_o + r)C} = 5 \cdot 10^4 \text{ } \Omega, \text{ qui n'est pas négligeable devant la}$$

valeur  $10^6 \text{ } \Omega$  de  $R_{osc}$  : c'est un mauvais choix.

## Objectifs

- ◆ Distinguer, en régime forcé, le résonateur de l'excitateur.
- ◆ Visualiser simultanément à l'oscilloscope la tension excitatrice  $u(t)$  et l'intensité du courant  $i(t)$ .
- ◆ Mesurer l'amplitude et la fréquence d'une grandeur oscillante en régime forcé sinusoïdal.
- ◆ Déterminer le déphasage entre la tension excitatrice  $u(t)$  et l'intensité du courant  $i(t)$ .
- ◆ Mettre en évidence, expérimentalement, le phénomène de résonance d'intensité.
- ◆ Établir l'expression de l'intensité maximale  $I_m$  du courant oscillant en fonction de la fréquence des excitations.
- ◆ Interpréter théoriquement le phénomène de résonance.
- ◆ Calculer la puissance moyenne absorbée par un oscillateur électrique.
- ◆ Expliquer l'importance du facteur de puissance dans les transformations de l'énergie électrique.

## Prérequis

### SAVOIR

- ◆ Définir un oscillateur.
- ◆ Caractériser une grandeur oscillante sinusoïdale par sa période, son amplitude et sa phase initiale.
- ◆ Écrire les relations :  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et  $N = \frac{1}{T}$ .
- ◆ Définir les valeurs maximale  $I_m$  et efficace  $I$  de l'intensité du courant alternatif.
- ◆ Définir les valeurs maximale  $U_m$  et efficace  $U$  d'une tension alternative.
- ◆ Écrire les relations :

$$I_m = I\sqrt{2} \text{ et } U_m = U\sqrt{2}.$$

- ◆ Écrire les relations:

$$E_c = \frac{q^2}{2C} \text{ et } E_L = \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

### SAVOIR FAIRE

- ◆ Reconnaître un oscillateur.
- ◆ Visualiser à l'oscilloscope :
  - une tension électrique,
  - une intensité de courant.
- ◆ Déterminer, graphiquement, la période et l'amplitude d'une grandeur électrique oscillante.
- ◆ Calculer la période propre d'un oscillateur RLC série.
- ◆ Établir l'équation différentielle régissant les oscillations libres d'un circuit RLC série par application de la loi des mailles.
- ◆ Calculer l'énergie totale d'un oscillateur RLC série.



# OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES FORCÉES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

# 4



La guitare électrique est munie d'une caisse creuse à laquelle sont adjoints des microphones électromagnétiques. Grâce à la résonance électrique, le son amplifié prime sur la résonance naturelle de la caisse.

- ◆ En quoi consiste la recherche manuelle ou automatique d'une chaîne radio ou d'un canal de télévision?
- ◆ Que veut-on dire par "résonance électrique" dont les applications sont très nombreuses ?

# OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES FORCÉES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

On a vu dans le chapitre précédent que si un circuit RLC série peut effectuer des oscillations libres, celles-ci cessent plus au moins rapidement à cause de l'amortissement dû à sa résistance.

Quel sera l'effet de l'application d'une tension sinusoïdale aux bornes d'un tel oscillateur, une simple compensation de l'amortissement ou plus !

## 1 RÉPONSE D'UN CIRCUIT RLC SÉRIE À UNE TENSION SINUSOÏDALE

### 1.1- PRODUCTION D'OSCILLATIONS FORCÉES

#### Manipulation

♦ On réalise le montage de la figure 1 : il s'agit d'un circuit RLC série fermé sur un générateur "basse fréquence" délivrant une tension sinusoïdale  $u(t)$  de fréquence  $N$  réglable :

$$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t, \quad U_m \text{ étant maintenue constante.}$$

Le circuit RLC série est constitué d'un résistor de résistance  $R_0$  réglable, d'un condensateur de capacité  $C = 0,47 \mu\text{F}$  et d'une bobine d'inductance  $L = 0,2 \text{ H}$  et de résistance interne  $r = 12,5 \Omega$  (Fig.1).

♦ Pour suivre, simultanément, l'évolution de la tension  $u$  délivrée par le GBF entre ses bornes et l'intensité du courant  $i$  débité dans le circuit, on relie à un oscilloscope bicourbe, le point M à la masse, le point A à la voie  $Y_1$  et le point B à la voie  $Y_2$ .

♦ On fixe  $N$  à la valeur  $400 \text{ Hz}$ ,  $U_m$  à  $2 \text{ V}$  et  $R_0$  à  $50 \Omega$  par exemple. Lorsque l'interrupteur  $K$  est ouvert, on observe sur l'écran de l'oscilloscope uniquement l'oscillogramme (1) de la figure 2. En fermant le circuit, on observe, sur l'écran de l'oscilloscope, les oscillogrammes stables (1) et (2) de la figure 2 avec une sensibilité horizontale de  $1 \text{ ms/div}$ .

♦ La fréquence étant toujours égale à  $400 \text{ Hz}$ , on réalise une série de mesures de  $U_{R_{0m}}$  pour différentes valeurs de l'amplitude  $U_m$  de la tension d'entrée  $U_m$ .

Les résultats de mesures ont permis d'obtenir le tracé de la figure 3.

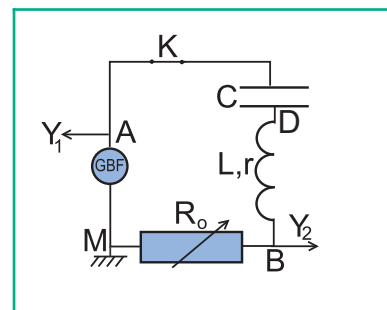


Fig.1 : Circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale

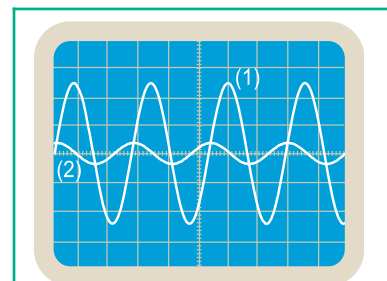


Fig.2 : Oscillogrammes de  $u$  et de  $u_{R_0}$ .

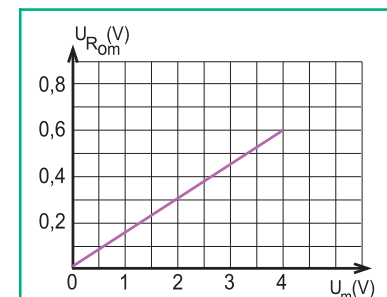


Fig.3 : Tracé de  $U_m = f(U_{R_{0m}})$

### Questions

- 1°) Comparer la forme de l'oscillogramme représentant  $i(t)$  à celle de  $u(t)$ .
- 2°) Mesurer la fréquence  $N$  de  $i(t)$  et la comparer à celle de  $u(t)$ .
- 3°) Comparer la fréquence  $N$  à la fréquence propre  $N_0$  de l'oscillateur.
- 4°) a- A l'aide de la courbe de la figure 3, montrer que :  $U_m = kU_{R_{0m}}$ , où  $k$  est une constante que l'on calculera.  
b- Montrer que la tension maximale  $U_m$  peut s'écrire sous la forme :  
 $U_m = Z I_m$  où  $Z$  une constante dont on déterminera la dimension.

### Commentaire

L'analyse des oscillogrammes de la figure 2 montre que, comme celle de  $u(t)$ , la courbe représentant  $i(t)$  varie sinusoïdalement au cours du temps.

De plus, il y a constamment le même décalage horaire entre les deux oscillogrammes. Par conséquent, l'intensité  $i(t)$  varie avec la même fréquence que la tension  $u(t)$  imposée par le GBF et non avec la fréquence propre du circuit RLC série : les oscillations imposées par le GBF ne sont plus libres, elles sont forcées. Ainsi, le GBF a joué le rôle d'excitateur.

La forme linéaire de la courbe représentant  $U_{R_{0m}}$  en fonction de  $U_m$  montre que le quotient  $\frac{U_m}{I_m}$  est une constante qui ne dépend que des caractéristiques de l'oscillateur. On l'appelle impédance du circuit et on la note  $Z$ .

### Interprétation théorique

Pour le circuit utilisé précédemment, la loi des mailles s'écrit :

$$u_{BM} + u_{DB} + u_{AD} + (-u_{AM}) = 0, \text{ d'où } u_{AM} = u_{BM} + u_{DB} + u_{AD}.$$

$$\text{Donc, } u_{AM} = R_0 \cdot i + r \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C},$$

$$\text{soit } u_{AM} = R_0 \cdot i + r \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}.$$

$$\text{Or, } q = \int i \cdot dt. \text{ Donc, } u_{AM} = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt, \text{ où } R = R_0 + r \text{ et } \omega = 2\pi N.$$

Une telle équation différentielle à second membre non nul admet comme solution particulière celle du régime permanent :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

**Remarque :** La solution générale faisant apparaître de plus le régime transitoire qui ne dure qu'une très petite fraction de seconde est hors programme.

### Conclusion

La réponse d'un circuit RLC série à une tension sinusoïdale est un courant alternatif sinusoïdal y oscillant :

- à la fréquence  $N$  de la tension excitatrice,
- avec une amplitude  $I_m = U_m / Z$ , où  $Z$  est une grandeur physique ayant la dimension d'une résistance appelée impédance du circuit RLC série.

## 1.2- DÉPHASAGE

### Définition

On appelle déphasage entre deux fonctions sinusoïdales de phases initiales  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  la différence de phase  $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$  ou  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

### Exemples

♦ Les chronogrammes (1) et (2) de chacune des figures (4a) et (4b) représentent deux tensions  $u_1$  et  $u_2$  synchrones (de même période et simultanées) et de phases initiales  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Dans le premier cas (Fig.4a),  $u_1$  et  $u_2$  sont dites en phase ou en concordance de phase tandis que dans le deuxième cas (Fig.4b),  $u_1$  et  $u_2$  sont dites en opposition de phase.

### Questions

1°) Justifier qualitativement les appellations : concordance de phase et opposition de phase.

2°) a-Montrer que la concordance de phase signifie :

$$\Delta\varphi = 2k\pi \text{ rad, avec } k \text{ entier relatif.}$$

b-Montrer que l'opposition de phase signifie que :

$$\Delta\varphi = (\pi + 2k\pi) \text{ rad, avec } k \text{ entier relatif.}$$

3°) Dans les cas de la figure 5 où le décalage horaire  $\Delta t$  entre  $u_1$  et  $u_2$  est égale à  $T/4$ , on dit que  $u_2$  et  $u_1$  évoluent au cours du temps en quadrature de phase. Plus précisément,  $u_2$  est en quadrature retard sur  $u_1$  dans le cas de la figure 5a, tandis qu'elle est en quadrature avance sur  $u_1$  dans le cas de la figure 5b.

Expliquer cette différence par le calcul de  $\Delta\varphi$  dans les deux cas.

4°) Dédire des exemples traités précédemment que la valeur absolue du déphasage  $|\Delta\varphi|$  entre deux fonctions sinusoïdales isochrones est liée à leur décalage horaire  $\Delta t$  par la relation :

$$|\Delta\varphi| = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

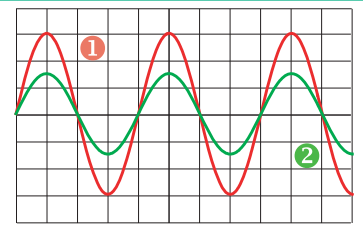


Fig.4a : Tensions  $u_1$  et  $u_2$  en concordance de phase

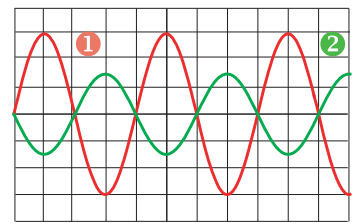


Fig.4b : Tensions  $u_1$  et  $u_2$  en opposition de phase

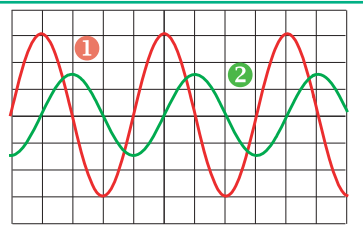


Fig.5a : Tension  $u_2$  en quadrature retard sur  $u_1$

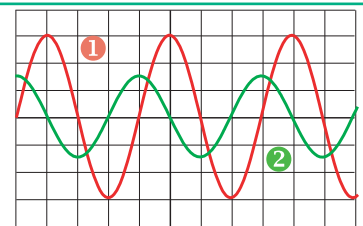


Fig.5b : Tension  $u_2$  en quadrature avance sur  $u_1$

### Conclusion

A tout décalage horaire  $\Delta t$  entre deux fonctions sinusoïdales  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  isochrones (de même période  $T$ ), représentées dans le même système d'axes, est associé un déphasage  $\Delta\varphi$  tel que :

$$|\Delta\varphi| = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

- Si  $\Delta t = 0$ ,  $\Delta\varphi = 0$  : les deux fonctions sont en concordance de phase.

- Si  $\Delta t = T/2$ ,  $\Delta\varphi = \pm\pi$  rad : les deux fonctions sont en opposition de phase.

- Si  $\Delta t = T/4$ ,  $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$  rad : les deux fonctions sont en quadrature de phase.

Si le déphasage  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  est positif,  $y_2(t)$  est en avance de phase par rapport à  $y_1(t)$  et inversement.

## 2

## INFLUENCE DE LA FRÉQUENCE D'EXCITATION SUR LA RÉPONSE D'UN CIRCUIT RLC SÉRIE

## Manipulation

♦ On reprend le montage de la figure 1 où le générateur BF délivre une tension  $u(t) = U_m \sin 2\pi Nt$  avec  $U_m = 2 \text{ V}$ .

En faisant varier la fréquence  $N$  des excitations, on constate qu'à chaque fois, la tension  $u_{R_0}(t)$  conserve la même forme sinusoïdale mais avec changement de sa valeur maximale  $U_{R_{0m}}$  et de son décalage horaire  $\Delta t$  par rapport à  $u(t)$ .

♦ Dans une deuxième étape, on réalise une série de mesures de l'intensité maximale  $I_m$  et du décalage horaire  $\Delta t$  entre  $u(t)$  et  $i(t)$  en fonction de la fréquence  $N$  du GBF.

Les résultats des mesures ont permis d'obtenir :

- le tracé de la figure 6a représentant l'évolution de l'amplitude  $I_m$  de l'intensité  $i$  en fonction de  $N$ .
- le tracé de la figure 6b représentant l'évolution de la phase initiale  $\varphi$  de l'intensité  $i$  en fonction de  $N$ .

## Remarque

Il est pratique aussi de suivre à l'aide d'un ampèremètre l'évolution de l'intensité efficace  $I$  en fonction de la fréquence  $N$ .

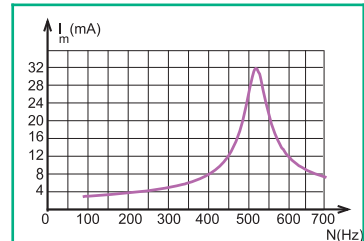


Fig.6a : Evolution de  $I_m$  en fonction de  $N$

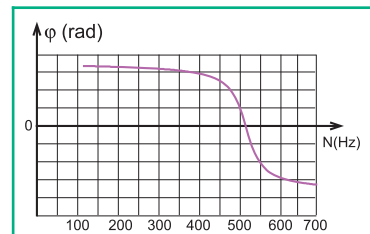


Fig.6b : Evolution de la phase initiale  $\varphi$  en fonction de  $N$

## Questions

1°) Montrer que, dans les conditions de l'expérience réalisée, la valeur de la phase initiale  $\varphi$  est égale à la valeur du déphasage entre  $i$  et  $u$ .

2°) Décrire la forme particulière de la courbe représentant  $I_m$  en fonction de  $N$ .

3°) a- Déterminer graphiquement la valeur de la fréquence  $N$  pour laquelle l'intensité maximale  $I_m$  du courant oscillant est à sa valeur la plus élevée  $I_{m_0}$  et la comparer à celle de la fréquence propre  $N_0$  de l'oscillateur.

b- Relever  $I_{m_0}$  et la valeur correspondante  $\varphi_0$  de  $\varphi$ .

c- Calculer l'impédance  $Z$  qu'a le circuit RLC dans ce cas particulier et la comparer à sa résistance totale ( $R_0 + r$ ).

## Conclusion

En régime forcé sinusoïdal, l'intensité maximale  $I_m$  et la phase initiale  $\varphi$  du courant oscillant dans un circuit RLC série dépendent de la fréquence  $N$  de la tension excitatrice et des grandeurs  $R$ ,  $L$  et  $C$  caractéristiques de l'oscillateur.

La réponse d'un circuit RLC série à une tension sinusoïdale de fréquence  $N$  égale à la fréquence propre  $N_0$  du circuit est un courant oscillant en phase avec la tension excitatrice et avec l'intensité maximale la plus élevée : c'est la résonance d'intensité.

A la résonance d'intensité, le circuit RLC série se comporte comme un résistor de résistance  $R$ .

## Interprétation théorique

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Pour déterminer l'amplitude  $I_m$  et la phase initiale  $\varphi$  de  $i(t)$ , il est commode de recourir à la construction de Fresnel dont le principe est expliqué dans la fiche technique de fin de chapitre

### Valeur maximale $I_m$ et phase initiale $\varphi$ de l'intensité $i$ du courant

$$\text{On a : } Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = U_m \sin \omega t, \text{ avec } R = R_o + r$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\int i \cdot dt = \frac{I_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) + \text{cte}$$

Etant une fonction sinusoïdale,  $U_m \sin \omega t$  ne peut être qu'une somme de fonctions sinusoïdales. Donc,  $\text{cte} = 0$ .

Il vient alors :

$$R I_m \sin(\omega t + \varphi) + L \omega I_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + \frac{I_m}{C \omega} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) = U_m \sin(\omega t).$$

A chaque terme de cette dernière équation on associe un vecteur tournant.

- $R I_m \sin(\omega t + \varphi), i \rightarrow \vec{OA}_1 [R I_m, \varphi]$
- $L \omega I_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}), i \rightarrow \vec{OA}_2 [L \omega I_m, \varphi + \frac{\pi}{2}]$
- $\frac{I_m}{C \omega} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}), i \rightarrow \vec{OA}_3 [\frac{I_m}{C \omega}, \varphi - \frac{\pi}{2}]$
- $U_m \sin \omega t, i \rightarrow \vec{OA} [U_m, 0]$  tel que :  $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3$

Les vecteurs de Fresnel  $\vec{OA}_2$  et  $\vec{OA}_3$  étant de sens contraires,

il en résulte trois constructions possibles :

- $\|\vec{OA}_2\| > \|\vec{OA}_3\|$ , cas correspondant à  $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ ,

c'est-à-dire  $N > N_o$  (Fig. 7a),

- $\|\vec{OA}_2\| < \|\vec{OA}_3\|$ , cas correspondant à  $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ ,

c'est-à-dire  $N < N_o$  (Fig. 7b),

- $\|\vec{OA}_2\| = \|\vec{OA}_3\|$ , cas correspondant à  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ ,

c'est-à-dire  $N = N_o$  (Fig. 7c).

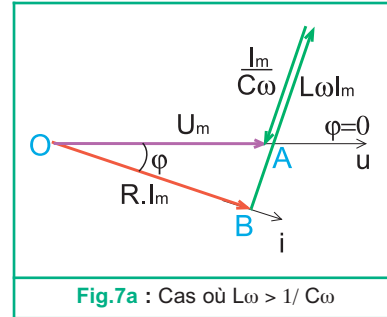


Fig.7a : Cas où  $L\omega > 1/C\omega$

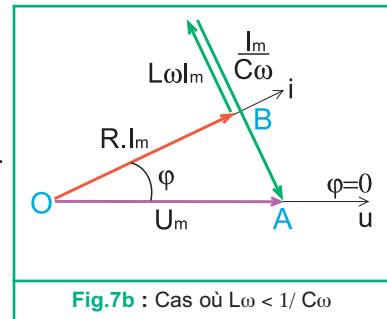


Fig.7b : Cas où  $L\omega < 1/C\omega$

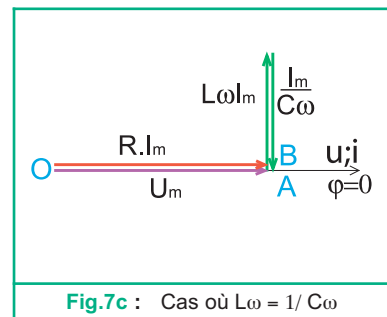


Fig.7c : Cas où  $L\omega = 1/C\omega$

Dans le cas général, on a :

$$U_m^2 = (R I_m)^2 + (L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega})^2, \text{ d'où } U_m = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} I_m.$$

Donc,

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}},$$

soit :  $I_m = \frac{U_m}{Z}$  avec  $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ .

D'après le cas de la figure 7a,  $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ , on a  $\varphi < 0$ , ça signifie que l'intensité  $i(t)$  du courant est en retard de phase par rapport à la tension excitatrice  $u(t)$  : le circuit RLC série est dit inductif.

D'après le cas de la figure 7b,  $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ , on a  $\varphi > 0$ , ça signifie que l'intensité  $i(t)$  du courant est en avance de phase par rapport à la tension excitatrice  $u(t)$  : le circuit RLC série est dit capacitif. D'après les constructions précédentes et en tenant compte de la dépendance du signe de  $\varphi$  de celui de  $(L\omega - \frac{1}{C\omega})$ , la phase initiale  $\varphi$  de  $i$  est telle que :

$$\text{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}, \text{ avec } -\frac{\pi}{2} \text{ rad} < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

### Remarque

Le déphasage  $\varphi$  entre  $i$  et  $u$  peut être aussi caractérisé par :  $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$

### Résonance d'intensité

L'impédance du circuit s'écrit  $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ .

∞ Aux très basses pulsations ainsi qu'aux pulsations beaucoup plus élevées que la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur, l'écart entre  $L\omega$  et  $\frac{1}{C\omega}$  augmente. Par suite, l'impédance  $Z$  devient de plus en plus grande.

Donc, dans l'un ou dans l'autre cas,  $I_m(\omega) = \frac{U_m}{Z} \rightarrow 0$ , ce qui signifie que la réponse du circuit RLC série devient de plus en plus faible. Cette réponse s'améliore lorsque  $Z$  prend une valeur modérée, ce qui n'est possible qu'avec des valeurs comparables de  $L\omega$  et de  $\frac{1}{C\omega}$ .

Dans le cas particulier où  $L\omega = \frac{1}{C\omega}$  obtenu avec  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,

∞ l'impédance  $Z$  est minimale :  $Z = R$ . Par conséquent, l'intensité maximale prend sa valeur la plus élevée  $I_{m0} = \frac{U_m}{R}$  : c'est la résonance d'intensité.

∞  $\text{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} = 0$ , ce qui signifie qu'à la résonance, la tension  $u$  et l'intensité  $i$  sont en phase.

### Remarque

L'appellation d'un oscillateur en régime forcé comme étant un résonateur revient au phénomène de résonance.

**Conclusion**

La réponse d'un circuit RLC série à une tension sinusoïdale de fréquence  $N$  égale à la fréquence propre  $N_0$  du circuit est un courant oscillant en phase avec la tension excitatrice et avec l'intensité maximale  $I_m$  la plus élevée : c'est la résonance d'intensité.

$$N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} : \text{Résonance d'intensité} \Leftrightarrow \begin{cases} I_m \text{ est la plus élevée} \\ u \text{ et } i \text{ sont en phase} \end{cases}$$

### 3 INFLUENCE DE LA RÉSISTANCE TOTALE DU CIRCUIT SUR LA RÉSONANCE

**Manipulation**

On refait l'étude expérimentale du paragraphe 2, avec  $L = 0,2 \text{ H}$  et  $C = 0,47 \mu\text{F}$ , mais en fixant  $R_0$  successivement aux valeurs  $R_{02} = 20 \Omega$  et  $R_{03} = 200 \Omega$ .

Les résultats des mesures faites permettent d'obtenir :

- les courbes de résonance d'intensité (1) et (2) de la figure 8a, correspondant respectivement à  $R_{02}$  et  $R_{03}$ .
- les courbes (a) et (b) de la figure 8b, représentant l'évolution de la phase initiale  $\varphi$  de l'intensité  $i$  en fonction de  $N$  et correspondant respectivement à  $R_{02}$  et  $R_{03}$ .

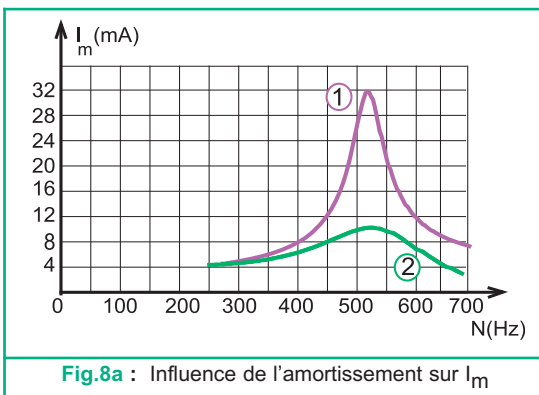


Fig.8a : Influence de l'amortissement sur  $I_m$

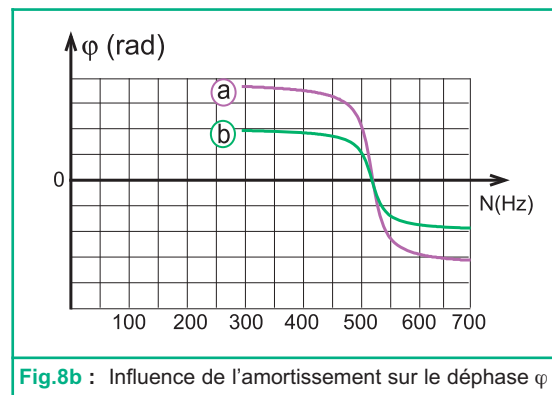


Fig.8b : Influence de l'amortissement sur le déphasage  $\varphi$

**Questions**

- 1°) Comparer les allures des courbes de résonance (1) et (2) entre elles ; en déduire l'influence de la résistance totale du circuit sur la résonance d'intensité.
- 2°) Pour les valeurs  $R_{02}$  et  $R_{03}$  de  $R_0$ , déterminer graphiquement :
  - a- la valeur de la fréquence de résonance,
  - b- le déphasage  $\varphi$ , entre l'intensité  $i$  et la tension d'alimentation  $u$ .

**Interprétation**

A la résonance d'intensité, on a  $I_{m0} = \frac{U_m}{R}$ . Cela signifie que l'importance de la résonance dépend de l'ordre de grandeur de  $R$ , donc de  $R_0$  car  $R = R_0 + r$  :  $I_{m0}$  est d'autant plus grande que  $R$  est plus petite.

- Si  $R$  est très petite, le maximum de  $I_m$  est très élevé, ce qui se traduit par un pic de résonance très pointu (courbe (1) de la figure 8a) : c'est la résonance aiguë.

- Si  $R$  est grande,  $I_{m0}$  est faible, ce qui se traduit par un pic de résonance très peu prononcé (courbe (2) de la figure 8a) : c'est la résonance floue.



**Conclusion**

La résonance d'intensité du courant d'un oscillateur RLC série est d'autant plus aiguë que l'amortissement est faible.

Cependant, quel que soit l'amortissement, la fréquence de résonance reste toujours égale à la fréquence propre du résonateur.

## 4 LE PHÉNOMÈNE DE SURTENSION

**Manipulation**

On reprend le montage de la figure 1, avec  $L = 0,2 \text{ H}$ ,  $C = 0,47 \mu\text{F}$  et  $U_m = 2 \text{ V}$ , en choisissant comme fréquence d'excitation, la fréquence propre ( $N_0 = 520\text{Hz}$ ) du circuit RLC série. On mesure la valeur maximale  $U_{Cm}$  de la tension aux bornes du condensateur pour des valeurs de la résistance  $R_0$  égales à  $R_{01} = 20 \Omega$ ,  $R_{02} = 50 \Omega$  et  $R_{03} = 200 \Omega$ . Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

$R_0 (\Omega)$	20	50	200
$U_{Cm} (\text{V})$	40,0	21,0	6,5

**Questions**

1°) Reproduire, puis compléter le tableau suivant :

$R_0 (\Omega)$	20	50	200
$Q = U_{Cm}/U_m$			

2°) Le quotient  $Q = \frac{U_{Cm}}{U_m}$  est appelé facteur de surtension à la résonance.

Justifier cette appellation.

3°) a-Montrer théoriquement que  $Q$  peut s'écrire uniquement en fonction des caractéristiques  $R$ ,  $L$  et  $C$  de l'oscillateur.

b-Calculer les valeurs théoriques de  $Q$ , correspondant respectivement aux valeurs  $20 \Omega$ ,  $50 \Omega$  et  $200 \Omega$  de la résistance  $R_0$ .

4°) Quelle précaution faut-il prendre pour avoir un facteur de surtension modéré ?

**Expression de Q**

Pour une pulsation  $\omega$  égale à la pulsation propre  $\omega_0$ ,

$$U_C = \frac{I_0}{C\omega_0} \quad \text{et} \quad I_0 = \frac{U}{R_0 + r} \quad \text{D'où :} \quad Q = \frac{1}{(R_0 + r) C\omega_0} \quad (1)$$

$$\text{Or, } \frac{1}{C\omega_0} = L\omega_0. \text{ Donc, } Q \text{ s'exprime autrement comme suit :} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R_0 + r} \quad (2)$$

$$\text{En remplaçant } \omega_0 \text{ par } \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ dans (1) par exemple, il vient :} \quad Q = \frac{1}{(R_0 + r) C} \sqrt{LC}.$$

$$\text{Donc :} \quad Q = \frac{1}{(R_0 + r)} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

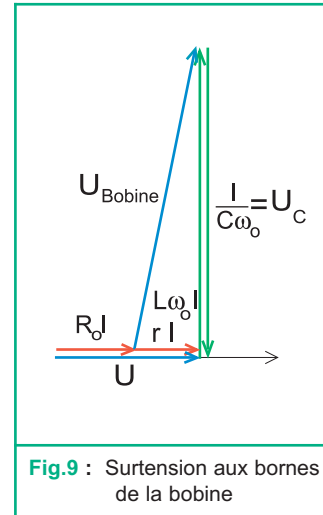
Donc, le facteur de surtension  $Q$  augmente quand l'inductance  $L$  augmente et lorsque la capacité  $C$  et la résistance  $R$  du circuit diminuent. S'il est trop élevé, la surtension devient dangereuse tant pour l'utilisateur que pour les composants du circuit ou les appareils d'une manière générale : elle peut provoquer le claquage du condensateur et des étincelles entre les spires de la bobine, d'où le risque d'électrocution.

### Remarque

A la résonance d'intensité :  $U = (R_o + r)I$  et  $U_{\text{Bobine}} = \sqrt{r^2 + (L\omega_o)^2} I$ .

Si la valeur de l'inductance  $L$  est telle que,  $L\omega_o \gg (R_o + r)$ ,

La valeur de la tension efficace aux bornes de la bobine sera plus grande que la valeur de la tension efficace d'alimentation. Donc, il y a aussi risque de surtension aux bornes de la bobine (Fig.9).



### Conclusion

- A la résonance d'intensité d'un circuit RLC série, il peut survenir aux bornes du condensateur, une surtension caractérisée par le facteur :

$$Q = \frac{1}{(R_o + r)} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Le facteur de surtension  $Q$  est d'autant plus grand que la résonance est plus aiguë.
- Une surtension élevée peut entraîner des conséquences néfastes.

## 5 APPLICATIONS DE LA RÉSONANCE

Les applications de la résonance sont très nombreuses. on cite essentiellement :

- les oscillateurs à quartz,
- le haut-parleur et le microphone électrodynamique,
- la réception d'émissions radiophoniques.

Dans le dernier exemple cité, lorsqu'il s'agit d'un poste radio ordinaire, la résonance aiguë est recherchée pour écouter nettement une émission, on doit accorder la fréquence propre de l'oscillateur RLC série du récepteur (poste radio) avec la fréquence sur laquelle émet la station choisie. Cependant, dans le cas d'une chaîne "haute fidélité", les étages d'amplification doivent répondre avec des courbes de résonance floue (les plus aplaties possibles) dans le domaine des sons audibles afin que l'appareil puisse restituer les timbres des voix et des instruments de musique.

## 6 PUISSANCE MOYENNE ET FACTEUR DE PUISSANCE

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier le bilan énergétique des oscillations forcées d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal.

### 6.1- PUISSANCE ÉLECTRIQUE INSTANTANÉE

♦ On applique aux bornes A et B du dipôle D une tension sinusoïdale de basse fréquence  $u(t) = U\sqrt{2} \sin \omega t$  (Fig.10). Il sera parcouru par un courant d'intensité sinusoïdale  $i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$  et recevra, à tout instant, une puissance électrique instantanée :  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ .

Étant générale, cette expression est applicable au circuit RLC série.

Ainsi,  $p = u \cdot i = U\sqrt{2} \sin(\omega t) \cdot I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) = 2U \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t)$ .  
En appliquant au produit des deux facteurs sinusoïdaux figurant dans cette expression de  $p$ , la relation trigonométrique

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)], \text{ on aboutit à :}$$

$$p = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi).$$

On constate que la puissance instantanée est la somme algébrique du terme constant "UIcosφ" et du terme "-UIcos(2ωt+φ)" évoluant périodiquement au cours du temps avec une fréquence double de celle de  $u$  et de  $i$ , ce qui rend  $p(t)$  périodique de période  $T_p = T/2$ .

Ainsi, pendant une demi oscillation de  $i$ ,  $\cos(2\omega t + \varphi)$  varie entre +1 et -1. Par conséquent,  $p$  peut être positive et le dipôle RLC série est effectivement un récepteur. Puis, elle peut devenir négative et le même dipôle se comporte alors comme un générateur. Cependant, pour déterminer le bilan, ces constatations restent insuffisantes.

### 6.2- PUISSANCE ÉLECTRIQUE MOYENNE

#### Définition

La puissance moyenne d'un dipôle D est la valeur moyenne prise par sa puissance instantanée  $p(t)$  sur une très grande durée  $\Delta t$  (tendant vers l'infini). Lorsque  $p(t)$  est périodique<sup>⊙</sup>, il est équivalent de prendre  $\Delta t$  égale à une période.

On note la puissance électrique moyenne  $P$  et on l'appelle aussi en régime forcé sinusoïdal, puissance électrique active ou réelle.

Comme toute puissance, la puissance moyenne s'exprime en watt (W) et se mesure avec un wattmètre.

⊙ Le cas unique qui figure dans le programme est celui du régime sinusoïdal forcé.

#### Expression de P

Lorsque la puissance instantanée  $p(t)$  est périodique, sa valeur moyenne  $P$  sur une période  $T_p$  s'écrit :

$$P = \frac{1}{T_p} \int_{kT_p}^{(k+1)T_p} p(t) dt$$

où  $k$  est un entier naturel.

En régime sinusoïdal, on vient de trouver :  $p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi)$ .

$$\text{Donc, } P = \frac{1}{T_p} \int_{kT_p}^{(k+1)T_p} UI \cos \varphi dt - \frac{1}{T_p} \int_{kT_p}^{(k+1)T_p} UI \cos(2\omega t + \varphi) dt.$$

$$\text{Ce qui donne : } P = \frac{UI \cos \varphi}{T_p} \left[ t \right]_{kT_p}^{(k+1)T_p} - \frac{UI}{2\omega T_p} \left[ \sin(2\omega t + \varphi) \right]_{kT_p}^{(k+1)T_p}.$$

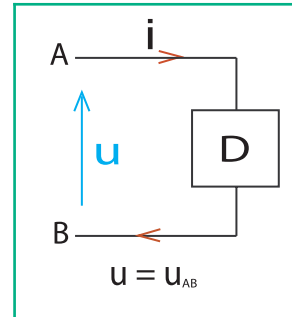


Fig.10 : Dipôle D parcouru par un courant alternatif

La fonction  $\sin(2\omega t + \varphi)$  étant périodique de période  $T_p = \frac{2\pi}{\omega}$ ,

on a :  $\left[ \sin(2\omega t + \varphi) \right]_{kT_p}^{(k+1)T_p} = 0$ .

Cependant,  $\left[ t \right]_{kT_p}^{(k+1)T_p} = T_p$ . Il vient donc :  **$P = UI \cos \varphi$**

Cette forme générale de l'expression de la puissance moyenne est indépendante de la nature du dipôle.

Etant semblable à l'expression de la puissance consommée en courant continu, le produit  $UI$  intervenant dans l'expression de  $P$  est appelé puissance apparente du dipôle.

La puissance apparente s'exprime en volt-ampère (V.A).

Le facteur  **$\cos \varphi$**  auquel la puissance moyenne est proportionnelle s'appelle **facteur de puissance**.

Pour un circuit RLC série,  $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ . Donc, ce facteur est toujours positif. Par suite, la puissance moyenne est positive, ce qui veut dire que le circuit RLC série se comporte dans l'ensemble comme un dipôle passif.

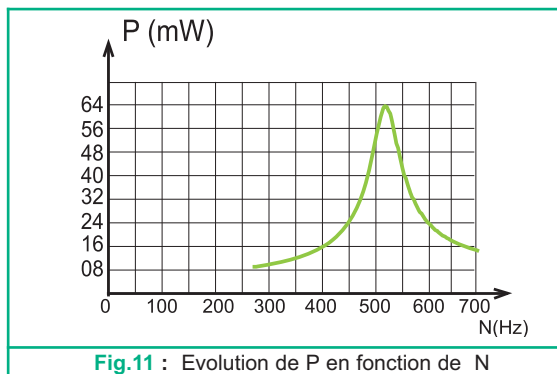
D'autre part, on a  $U = Z.I$ , d'où :  **$P = R.I^2$**

Ainsi, on montre que la puissance active d'un circuit RLC série est due à sa résistance totale  $R$  : c'est une puissance consommée par effet Joule. En d'autres termes, la puissance moyenne dissipée dans le circuit sert à compenser l'amortissement : en moyenne, l'énergie transférée de l'excitateur à l'oscillateur sert, lorsque le régime oscillatoire est établi, à compenser les pertes par effet Joule.

### 6.3- RÉSONANCE DE PUISSANCE

La puissance moyenne ( $P = RI^2$ ) d'un circuit RLC série est proportionnelle au carré de l'intensité efficace du courant oscillant dans le circuit. Il s'en suit une résonance de puissance à chaque fois qu'il y a résonance d'intensité (Fig.11).

A la résonance d'intensité,  $P$  est maximale, ce qui est en accord avec la condition ( $\cos \varphi = 1$ ) établie précédemment.



### 6.4- TRANSFERT DE PUISSANCE MOYENNE

La puissance moyenne fournie par le GBF au circuit RLC série en régime forcé sinusoïdal est:

$$P = R \frac{U^2}{Z^2} = \frac{RU^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Discutons cette relation dans les deux cas extrêmes d'amortissement.

- Si l'amortissement est important, lorsque  $\omega$  tend vers zéro ou  $\omega$  est très grand, la puissance transférée est quasiment nulle. Mais, au voisinage de  $\omega_0$ , P devient égale à  $U^2/R$ . Le transfert de puissance s'effectue alors quelle que soit la fréquence mais il reste faible. Par conséquent, l'amplitude des oscillations est faible. C'est ce qui justifie la résonance floue (Fig.12).
- Si l'amortissement est faible, le transfert de puissance est important. Par conséquent, l'amplitude des oscillations est élevée. C'est ce qui justifie la résonance aiguë (Fig.12).

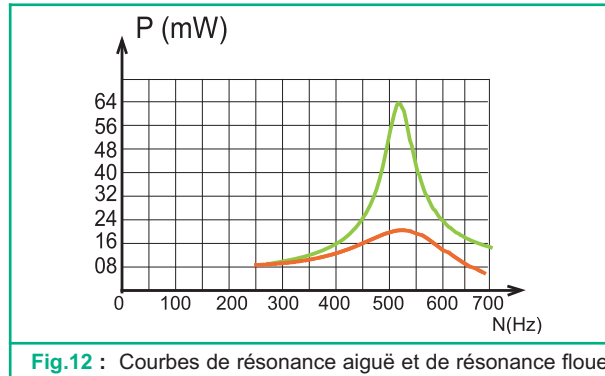


Fig.12 : Courbes de résonance aiguë et de résonance floue

### 6.5- IMPORTANCE DU FACTEUR DE PUISSANCE $\cos\varphi$

Dans toute installation électrique, la tension d'alimentation est imposée par le réseau de la distribution de la STEG. Tout appareil de l'installation est caractérisé par sa puissance nominale, la puissance moyenne en fonctionnement normal. En marche, il sera parcouru par un

courant d'intensité efficace :  $I = \frac{P}{U \cos\varphi}$ .

Le courant électrique débité provoque un échauffement par effet Joule des câbles de la ligne de transport d'électricité.

Par conséquent, la puissance est perdue et, en grande partie, la perte est à la charge de la STEG : c'est la perte en ligne.

Comment minimiser la perte en ligne ?

Si l'on désigne par  $P_o$  la puissance moyenne perdue par effet Joule dans la ligne d'alimentation de résistance  $R_o$ , on a :  $P_o = R_o I^2$ ,

soit :

$$P_o = R_o \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$$

P et U étant imposées, pour minimiser  $P_o$ , il faut chercher à minimiser  $R_o$  et à augmenter  $\cos\varphi$ . Les possibilités de diminution de  $R_o$  sont limitées. En effet, l'opération demande l'augmentation du diamètre des câbles électriques, ce qui augmente leurs poids. Par conséquent, les lignes et leur infrastructure coûteront beaucoup plus cher.

Ainsi, la seule solution pratique pour rendre minimales les pertes par effet Joule est d'augmenter le facteur de puissance  $\cos\varphi$ . Pour ce, on exige qu'une installation électrique ait un facteur de puissance élevé ( $\cos\varphi > 0,8$ ).

### Conclusion

La puissance moyenne d'un circuit RLC série est dissipée par effet Joule. Cette dissipation se fait à n'importe quelle fréquence mais elle est d'autant plus importante que la résistance est plus grande.

A la résonance d'intensité, correspond une résonance de puissance :

la puissance moyenne de l'oscillateur RLC série est dans ces conditions la plus élevée.

# L'essentiel

■ Comme en régime libre non amorti, les oscillations forcées d'un circuit RLC série sont sinusoïdales mais de fréquence imposée par l'excitateur.

■ La réponse d'un circuit RLC série à une tension excitatrice sinusoïdale de fréquence  $N$  est un courant électrique d'intensité sinusoïdale de valeur maximale  $I_m$  et de phase initiale  $\varphi$  dépendant de la fréquence des excitations et des grandeurs électriques  $R$ ,  $L$  et  $C$  de l'oscillateur :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R}$$

■ Selon le signe de  $(L\omega - \frac{1}{C\omega})$  ou du déphasage  $\Delta\varphi$  entre  $i$  et  $u$ , l'oscillateur électrique RLC série peut être inductif ou capacitif.

■ En régime forcé sinusoïdal, la valeur maximale de l'intensité du courant est d'autant plus élevée que l'amortissement est plus faible.

■ La résonance d'intensité est obtenue pour une fréquence  $N_e$  des excitations égale à la fréquence propre  $N_0$  de l'oscillateur.

■ La résonance d'intensité d'un circuit RLC série peut être accompagnée d'une surtension aux bornes du condensateur, caractérisée par un quotient  $Q > 1$  appelé dans ces conditions facteur de surtension :

$$Q = \frac{U_c}{U}$$

■ En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne  $P$  d'un circuit RLC série est la valeur moyenne prise par sa puissance instantanée  $p(t)$  durant une période :

$$P = UI\cos\varphi = RI^2$$

■ Comme la résonance d'intensité, la résonance de puissance est obtenue pour une fréquence des excitations égale à la fréquence propre de l'oscillateur.

■ Les pertes, par effet Joule, sont d'autant plus faibles que le facteur de puissance est plus grand.

# Exercices

## Exercice résolu

### ÉNONCÉ

On associe en série un condensateur de capacité  $C$ , une bobine  $B$  d'inductance  $L$  et un résistor de résistance  $R_0 = 81,5 \Omega$ . L'ensemble est alimenté par un générateur de basse fréquence (GBF) délivrant à ses bornes une tension alternative sinusoïdale  $u(t)$  de valeur maximale  $U_m = 6 \text{ V}$  et de fréquence  $N$  réglable (Fig.1).

1°) a- Préciser parmi les points A et B du circuit celui auquel on doit relier la masse du GBF afin de visualiser simultanément la tension d'alimentation  $u(t)$  et la tension  $u_{R_0}$  aux bornes du résistor, sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe.

b- Reproduire le schéma de la figure 1 en y indiquant les branchements effectués à l'oscilloscope.

2°) Pour une valeur  $N_1$  de la fréquence  $N$  du GBF, on obtient les oscillogrammes (1) et (2) de la figure 2 avec les réglages suivants:

- base de temps :  $0,5 \text{ ms/div}$  ;
- voie utilisée pour visualiser  $u(t)$  :  $2 \text{ V/div}$  ;
- voie utilisée pour visualiser  $u_{R_0}(t)$  :  $1 \text{ V/div}$ .

a- Identifier parmi les oscillogrammes (1) et (2) celui représentant  $u(t)$ .

b- Déterminer graphiquement la fréquence  $N_1$  et la valeur maximale  $I_m$  de l'intensité  $i(t)$  du courant électrique oscillant dans le circuit RLC série.

c- Calculer l'impédance  $Z$  du circuit RLC série.

d- Déterminer graphiquement le déphasage entre  $i(t)$  et  $u(t)$ .

En déduire que la bobine a une résistance interne non nulle que l'on calculera.

3°) Pour étudier le comportement de l'oscillateur à une autre fréquence  $N_2$  du GBF, on visualise simultanément avec  $u(t)$ , la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur.

a- Préciser le point du circuit auquel on doit relier la masse du GBF à cette fin.

b- Reproduire de nouveau le schéma de la figure 1 tout en y indiquant les nouveaux branchements effectués à l'oscilloscope.

c- En fermant le circuit, on obtient les oscillogrammes de la figure 3 avec une sensibilité horizontale de  $1 \text{ ms/div}$  et une même sensibilité de  $2 \text{ V/div}$  pour les deux voies  $Y_1$  et  $Y_2$ . Identifier l'oscillogramme représentant  $u_C(t)$ .

d- Déterminer graphiquement la fréquence de  $u_C(t)$  ainsi que son déphasage par rapport à  $u(t)$ .

e- Montrer que l'oscillateur RLC série est en résonance d'intensité.

f- Calculer le facteur de surtension et préciser si sa valeur présente un danger tout en justifiant la réponse.

g- Calculer  $C$  et  $L$ .

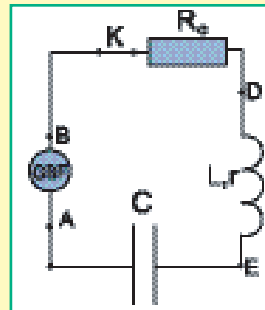


Fig.1

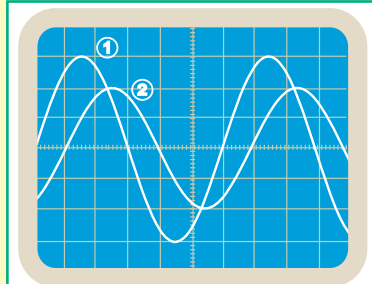


Fig.2

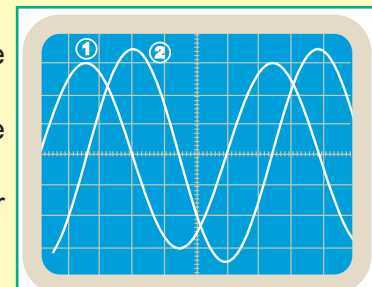


Fig.3

**SOLUTION**

1°) a - Afin de visualiser simultanément  $u(t)$  et  $u_{R_o}(t)$ , il faut que la masse du GBF soit du côté du résistor de résistance  $R_o$ . Il faut alors la relier au point B.

b - Comme sur le schéma de la figure 4, le point A est à relier à l'entrée  $Y_1$  (ou  $Y_2$ ) afin de visualiser  $u(t)$  tandis que le point D est à relier à l'entrée  $Y_2$  (ou  $Y_1$ ) pour visualiser  $u_{R_o}(t)$ .

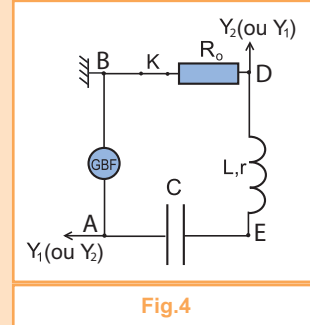


Fig.4

2°) a -  $U_m = 6$  V et la voie utilisée pour visualiser  $u(t)$  est de 2 V/div. Donc, l'oscillogramme (1) dont les crêtes sont distantes de 6 div est celui qui représente  $u(t)$ .

b -  $u_{R_o}(t) = R_o \cdot i(t)$  : étant proportionnelles l'une à l'autre,  $i(t)$  et  $u_{R_o}(t)$  évoluent au cours du temps avec la même fréquence.

Du fait que le décalage horaire entre les oscillogrammes (1) et (2) de la figure 2 est constant, on affirme que  $u_{R_o}(t)$  évolue avec la même fréquence  $N_1$  de  $u(t)$ .

$N_1 = \frac{1}{T_1}$ . Or,  $T_1$  s'étale sur 6 divisions et la sensibilité horizontale utilisée est de 0,5 ms/div.

Donc,  $T_1 = 3$  ms, ce qui signifie :  $N_1 \approx 333$  Hz.

On a :  $u_{R_o}(t) = R_o \cdot i(t)$ , ce qui signifie :  $i(t) = \frac{u_{R_o}(t)}{R_o}$ . D'autre part, en s'appuyant sur la forme sinusoïdale de l'oscillogramme (2) de la figure 2, on écrit :  $u_{R_o}(t) = U_{Rom} \sin(2\pi N_1 t + \varphi)$ , où  $\varphi$  est sa phase initiale. Donc,  $i(t) = I_m \sin(2\pi N_1 t + \varphi)$ , avec  $I_m = \frac{U_{Rom}}{R_o}$ .

2 div  $\rightarrow U_{Rom}$  et 1 div  $\rightarrow 1$  V. Donc,  $U_{Rom} = 2$  V. D'où, avec  $R_o = 81,5 \Omega$  :  $I_m = 24,5$  mA.

c - L'impédance  $Z$  du circuit RLC série s'écrit :  $Z = \frac{U_m}{I_m}$ .

A.N. : Avec  $U_m = 6$  V et  $I_m = 24,5$  mA,  $Z = 244,9 \Omega \approx 245 \Omega$ .

d - Soit  $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_u$ , le déphasage entre  $i(t)$  et  $u(t)$  de phases initiales respectives  $\varphi_i$  et  $\varphi_u$ .  $\varphi_i$  étant égale à la phase initiale  $\varphi$  de  $u_{R_o}(t)$ , déterminer  $\Delta\varphi$  revient à déterminer graphiquement le décalage horaire  $\Delta t$  entre les oscillogrammes (2) et (1) de la figure 2 représentant respectivement  $u_{R_o}(t)$  et  $u(t)$ .

$|\Delta\varphi| \rightarrow \Delta t = \frac{T}{6}$  et  $\pi$  rad  $\rightarrow \frac{T}{2}$ . Donc,  $|\Delta\varphi| = \frac{\pi}{3}$  rad.

Les maximums de  $u_{R_o}(t)$  sont atteints à  $\Delta t$  après ceux de  $u(t)$ . Donc,  $u_{R_o}(t)$  est en retard de

phase par rapport à  $u(t)$ , ce qui signifie  $\Delta\varphi < 0$ . Par suite, on a :  $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{3}$  rad.



On sait que  $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$ . Ceci équivaut :  $R = Z \cdot \cos\varphi$ . Avec  $Z = 245 \Omega$  et  $\cos\varphi = 0,5$  car  $\varphi = -\pi/3$  rad, on a :  $R = 122,5 \Omega$ . Or,  $R_0 = 81,5 \Omega$ . Donc,  $R > R_0$ . Il en découle que la bobine a une résistance non nulle  $r = R - R_0$ .

A. N. :  $r = 41 \Omega$ .

**3°) a** - Pour visualiser simultanément la tension d'alimentation  $u(t)$  et la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur, la masse du GBF doit être reliée au point A (Fig. 5).

**b** - Comme sur le schéma de la figure 5, le point B est à relier à l'entrée  $Y_1$  (ou  $Y_2$ ) afin de visualiser  $u(t)$  tandis que le point E est à relier à l'entrée  $Y_2$  (ou  $Y_1$ ) pour visualiser  $u_C(t)$ .

**c** - L'oscillogramme (1) étant le seul d'amplitude égale à 6 V, il représente  $u(t)$ . Donc, c'est l'oscillogramme (2) qui représente  $u_C(t)$ .

**d** - Du fait que le décalage horaire entre les oscillogrammes (1) et (2) de la figure 3 est constant, on affirme que  $u_C(t)$  évolue avec la même fréquence  $N_2$  de  $u(t)$ .

En procédant comme on a fait pour répondre à la question 2.b, on obtient :  $N_2 = 167 \text{ Hz}$ .

Les maximums de la tension  $u(t)$  sont atteints à  $T/4$  avant ceux de  $u_C(t)$ , ce qui signifie que

$u_C(t)$  est en quadrature retard de phase par rapport à  $u(t)$  :  $\varphi_{u_C} - \varphi_u = -\frac{\pi}{2}$  rad.

**e** - On a :  $i = \frac{dq}{dt}$ , d'où :  $\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$ . D'autre part,  $u_C = \frac{q}{C}$ . Il s'en suit :  $\varphi_{u_C} = \varphi_q$ .

Donc,  $\varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}$ . Or,  $\varphi_{u_C} - \varphi_u = -\frac{\pi}{2}$  rad, Donc,  $\varphi_u - (\varphi_i - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$  rad, d'où :  $\varphi_u - \varphi_i = 0$ .

Il s'agit alors d'une résonance d'intensité.

**f** -  $Q = \frac{U_{Cm}}{U_m}$ . En procédant comme on a fait pour déterminer graphiquement la valeur de

$U_{Rom}$  dans la réponse à la question 2.c, on trouve :  $U_{Cm} = 7 \text{ V}$ . On a ainsi :  $Q \approx 1,17C$ .

$Q$  étant très peu supérieur à l'unité du fait que  $U_{Cm}$  est très légèrement supérieure à  $U_m$ , on ne court aucun danger.

**g** - On est à la résonance d'intensité. Donc,  $Q = \frac{1}{RC\omega_2}$ , d'où :  $C = \frac{1}{RQ\omega_2}$ .

A. N. : Sachant que  $\omega_2 = 2\pi N_2$  et avec  $N_2 = 167 \text{ Hz}$ , on trouve :  $C = 6,68 \text{ nF}$ .

D'autre part, la fréquence d'excitation est égale à la fréquence propre de l'oscillateur :

$N_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ , d'où  $L = \frac{1}{4\pi^2 N_2^2 C}$ . A.N :  $L = 137 \text{ mH}$

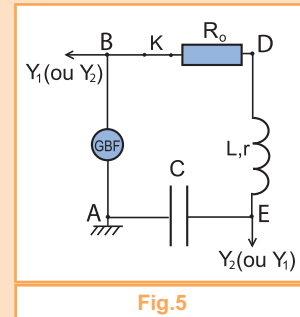


Fig.5

# Exercices à résoudre

## Tests rapides des acquis

### 1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

- 1°) Les oscillations d'un circuit RLC série auquel est appliquée une tension sinusoïdale sont libres.  
 2°) La fréquence des oscillations forcées d'un circuit RLC série peut être égale à sa fréquence propre.  
 3°) La résonance d'intensité est obtenue lorsque la tension aux bornes du circuit RLC série est en phase avec l'intensité du courant qui y circule.  
 4°) La résonance d'intensité est obtenue lorsque l'impédance du circuit RLC série est maximale.  
 5°) Le facteur de surtension d'un circuit RLC série augmente lorsque la résistance totale du circuit augmente.  
 6°) La puissance moyenne consommée par le condensateur est nulle.  
 7°) La résonance de puissance est elle même une résonance d'intensité.  
 8°) Pour minimiser les pertes par effet Joule dans les lignes d'alimentation en électricité, on diminue le facteur de puissance.

### 2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la (ou les) proposition(s) juste(s).

- I- Un circuit RLC série est en résonance d'intensité lorsque :
- a-son impédance est maximale;
  - b-la fréquence qui lui est imposée est égale à sa fréquence propre;
  - c-son impédance est égale à la résistance du résistor;
  - d-l'intensité du courant qui y circule et la tension qui lui est appliquée sont en phase.
- II- A la résonance d'intensité, l'intensité du courant  $i$  est :
- a-en quadrature avance de phase sur la tension aux bornes du condensateur ;
  - b-en quadrature retard de phase par rapport à la tension aux bornes de la bobine.
  - c-en phase avec la tension aux bornes du résistor.
  - d-en phase avec la tension aux bornes du circuit RLC série.
- III- Lors des oscillations forcées, un circuit RLC série a un caractère capacitif lorsque :
- a- $LC\omega^2 < 1$ ;
  - b-la tension aux bornes du condensateur est supérieure à celle aux bornes de la bobine en valeur maximale ;
  - c- l'intensité du courant qui y circule est en avance de phase sur la tension appliquée entre ses bornes.
- V- A la résonance d'intensité, une augmentation de la résistance du circuit RLC série entraîne:
- a- la diminution de la fréquence caractéristique de la résonance;
  - b- la diminution de la valeur maximale de l'amplitude de l'intensité du courant ;
  - c- l'augmentation de la valeur maximale de la puissance moyenne consommée par le circuit.
- VI- Le facteur de surtension  $Q$  d'un circuit RLC série s'écrit :
- a-  $\frac{2\pi LN_0}{R}$  ;
  - b-  $\frac{U_L}{U}$  quel que soit la fréquence  $N$  ;
  - c-  $\frac{1}{R} \sqrt{\frac{C}{L}}$  ;
  - d-  $\frac{U_C}{U}$  à la résonance d'intensité.

## Exercices d'application

**3** Les émetteurs produisent des oscillations électriques forcées dans les circuits d'accord des récepteurs radio. La recherche des stations émettrices sur ces derniers est un exemple de résonance d'intensité.

On désire capter une émission à la fréquence  $N = 16233$  Hz. Quelle valeur doit-on donner à la capacité  $C$  du condensateur du circuit d'accord RLC série sachant que la bobine a une inductance  $L = 10^{-4}$  H ?.

**4** On monte en série un condensateur de capacité  $C$  et une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$  aux bornes d'un générateur BF délivrant une tension sinusoïdale  $u$  de pulsation  $\omega$  variable:

$$u(t) = 30\sqrt{2} \sin \omega t$$

En fixant  $\omega$  à  $2000 \text{ rad.s}^{-1}$ , les mesures fournissent :  $I = 600 \text{ mA}$ ,  $U_1 = 30 \text{ V}$  et  $U_2 = 30 \text{ V}$ .  
 $I$  : Valeur efficace de l'intensité  $i$  du courant circulant dans le circuit.

$U_1$  : Valeur efficace de la tension  $u_1$  aux bornes de la bobine.

$U_2$  : Valeur efficace de la tension  $u_2$  aux bornes du condensateur.

L'intensité  $i$  est de la forme :  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ .

**1°)** A l'aide de la construction de Fresnel, calculer  $\varphi$ ,  $r$ ,  $L$  et  $C$ .

**2°)** Comparer par le calcul de leur quotient, la pulsation d'alimentation  $\omega$  et la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur RLC série et préciser, tout en justifiant la réponse, le sens dans lequel il faut faire varier  $\omega$  pour avoir une résonance d'intensité.

**5** Un circuit RLC série comprenant :

- Un condensateur de capacité  $C = 20 \mu\text{F}$ ,
- un résistor de résistance  $R = 20 \Omega$ ,
- une bobine d'inductance  $L = 0,55 \text{ H}$  et de résistance interne  $r = 12,5 \Omega$ .

On applique aux bornes de ce circuit une tension sinusoïdale de fréquence variable :

$$u(t) = 100\sqrt{2} \sin 2\pi Nt \text{ avec } N = 48 \text{ Hz}$$

**1°)** Donner, sans démonstration, l'expression de l'impédance  $Z$  en fonction de  $R$ ,  $r$ ,  $L$  et  $C$ .  
La calculer.

**2°)** Donner l'expression de l'intensité efficace  $I$  en fonction de  $Z$ .

**3°)** Le circuit est équivalent à un résistor de résistance  $(R + r)$ .

**a-** Montrer que la valeur de  $N$  est égale à la fréquence propre  $N_0$  du circuit. La calculer.

**b-** Quelles sont alors les valeurs de l'impédance  $Z_0$  et de l'intensité  $I_0$  obtenues pour  $N = N_0$ .

**6** On considère un circuit comportant, en série, un résistor de résistance  $R$ , une bobine d'inductance  $L$  et un condensateur de capacité  $C$ . Ce circuit est alimenté par un générateur BF délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U$  et de pulsation  $\omega$  réglable. Un ampèremètre de résistance négligeable permet de mesurer l'intensité efficace  $I$  du courant dans le circuit.

**1°)** Pour une pulsation  $\omega$  donnée, utiliser la construction de Fresnel pour exprimer l'impédance du circuit et le déphasage en fonction de  $\omega$ ,  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

**2°)**  $U$  étant constante, on fait varier  $\omega$  et on relève l'intensité efficace  $I$  pour chaque valeur de  $\omega$ .

**a-** Donner l'allure générale de la courbe représentant  $I = f(\omega)$ . Quel phénomène cette courbe met-elle en évidence ?

**b-** Soit  $\omega_0$  la valeur de la pulsation pour laquelle le phénomène précédent se produit. La pulsation  $\omega_0$  dépend-elle de  $R$ ,  $L$  et  $C$  ?

Donner l'expression de  $\omega_0$  en fonction de deux de ces trois grandeurs.

**c-** Que deviennent l'impédance  $Z$  et le déphasage pour  $\omega = \omega_0$  ?

**7** Un dipôle RLC série constitué d'une bobine  $B$  d'inductance  $L$  et de résistance  $r$  et d'un condensateur de capacité  $C = 0,5 \mu\text{F}$ , est alimenté par un générateur délivrant une tension alternative sinusoïdale de fréquence  $N$  variable. La tension efficace  $U$  aux bornes du générateur est maintenue constante et égale à  $2 \text{ V}$ . Les valeurs de la fréquence  $N_0$  de résonance d'intensité et de l'intensité efficace  $I_0$  correspondante sont respectivement  $2325 \text{ Hz}$  et  $130 \text{ mA}$ . Déterminer :

**1°)** les caractéristiques de la bobine inductive,  
**2°)** le facteur de surtension et la puissance moyenne maximale consommée par le circuit RLC série.

**8** On établit une tension alternative sinusoïdale de pulsation  $\omega$  entre les bornes M et N d'une portion de circuit comprenant un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L et de résistance interne r. L'intensité efficace étant  $I = 0,20$  A, la mesure des tensions efficaces fournit les résultats suivants :

$U_{MN} = 120$  V,  $U_{MP} = 160$  V et  $U_{PN} = 56$  V. (P : point de connexion de la bobine au condensateur).

**1°)** Calculer les impédances de la bobine et du condensateur ainsi que la résistance r de la bobine.

**2°)** Calculer le déphasage de la tension  $u_{MN}$  par rapport à l'intensité i du courant.

**3°)** Sachant qu'un courant de pulsation  $\omega_0 = 250 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  parcourant le circuit serait en phase avec la tension  $u_{MN}$ , déterminer :

**a-** les valeurs de l'inductance et de la capacité,

**b-** la pulsation  $\omega$  et la fréquence N correspondante,

**c-** la puissance moyenne consommée dans le circuit.

**4°)** Montrer que l'intensité efficace du courant reprendra la valeur  $I = 0,20$  A pour une deuxième pulsation  $\omega'$  que l'on calculera.

**5°)** Comparer les puissances moyennes consommées dans le circuit aux pulsations  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $\omega'$ .

**9** Un oscillateur RLC série comprenant un résistor de résistance  $R = 50 \Omega$ , un condensateur de capacité  $C = 1 \mu\text{F}$  et une bobine d'inductance L réglable et de résistance négligeable est alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale :

$$u(t) = 10\sqrt{2} \sin(100\pi t)$$

**1°)** Etablir l'équation différentielle régissant les oscillations du courant circulant dans le circuit RLC série.

**2°)** Sachant qu'en régime permanent, l'intensité du courant s'écrit  $i(t) = I_m \sin(100\pi t + \varphi)$  :

**a-**déterminer la valeur  $L_0$  de l'inductance de la bobine donnant une résonance d'intensité,

**b-**montrer que si l'on ferme le circuit en maintenant L égale à  $L_0$ , il se produit un phénomène de surtension aux bornes du condensateur.

**2°)** Sachant que la valeur de la tension de rupture, sérigraphiée sur le boîtier du condensateur utilisé, est  $U_0 = 100$  V, déterminer la valeur de l'inductance L de la bobine à ne pas dépasser pour éviter tout risque de claquage du condensateur.

**10** Un dipôle AB est constitué par l'association en série d'un résistor, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine purement inductive d'inductance L.

On désigne par R la résistance totale du circuit. On applique aux bornes du dipôle AB une tension  $u_{AB} = U_m \sin \omega t$  de valeur efficace U, constante mais de pulsation  $\omega$  réglable. Un wattmètre mesure la puissance électrique moyenne P reçue par le dipôle.

**1°)** Démontrer que lorsque l'on règle  $\omega = \omega_0$  pour obtenir les conditions de résonance d'intensité pour ce dipôle, on mesure une valeur maximale  $P_0$  pour la puissance moyenne. Exprimer  $P_0$  en fonction de U et de R.

En déduire l'expression de l'énergie électrique  $E_0$  reçue par le dipôle pendant une période, en fonction de U, R et  $\omega_0$ .

**2°)** Dans les conditions de résonance, exprimer en fonction du temps l'énergie totale  $E_t$  emmagasinée dans le dipôle, sous forme magnétique  $E_L$  dans la bobine et sous forme électrique  $E_C$  dans le condensateur.

Montrer que  $E_t$  reste constante. Dans ces conditions, exprimer cette énergie totale en fonction de L, U et R. Que devient donc à chaque instant l'énergie électrique reçue par le dipôle ?

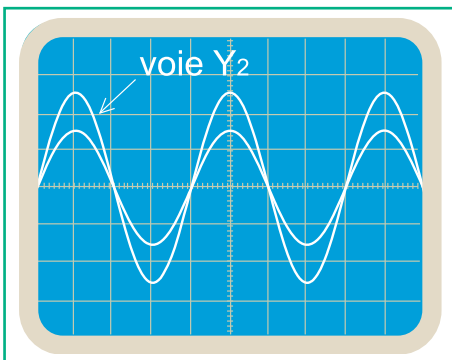
**3°)** Exprimer le rapport  $\frac{E_t}{E_0}$  en fonction du facteur de surtension Q du circuit.

**11** Un générateur G délivrant une tension alternative sinusoïdale de fréquence  $N$  réglable et de valeur efficace  $U$  alimente un circuit RLC série constitué d'un résistor de résistance  $R = 300 \Omega$ , d'un condensateur de capacité  $C = 3 \mu\text{F}$  et d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance interne  $r$ .

On se propose de visualiser simultanément à l'oscilloscope, la tension  $u(t)$  aux bornes du circuit (voie  $Y_1$ ) et la tension  $u_R(t)$  aux bornes du résistor (voie  $Y_2$ ).

Pour une valeur  $N_0$  de la fréquence  $N$  de la tension délivrée par G, on obtient les oscillogrammes de la figure ci-après avec :

- sensibilité verticale sur la voie  $Y_1$  :  $4\text{V} / \text{div}$ .
- sensibilité verticale sur la voie  $Y_2$  :  $2\text{V} / \text{div}$ .
- sensibilité horizontale :  $1\text{ms} / \text{div}$ .



a- Quel est le phénomène observé ?

b- Déterminer la valeur de l'inductance  $L$  et celle de la résistance  $r$  de la bobine.

## Exercices de synthèse

**12** On dispose d'un condensateur sur lequel le fabricant fournit les indications suivantes :

Références	EFD-CPM13B
Capacité	1,2 MF
Tolérance	10%
Tension maximale	160 V

On se propose de faire une recherche de la valeur réelle de la capacité  $C$ . Pour ce, on réalise un circuit série constitué d'un GBF délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U = 2\text{V}$ , d'un résistor de résistance  $R = 10 \Omega$ , d'une bobine d'inductance  $L = 58\text{mH}$  et de résistance  $r$  et du condensateur à étudier. Puis, on y insère un voltmètre et un ampèremètre.

1°) Schématiser le montage à réaliser de telle sorte que l'on puisse :

- vérifier que la tension efficace à la sortie du GBF soit maintenue constante et égale à  $2\text{V}$ ,
- mesurer l'intensité efficace du courant dans le circuit RLC série.

2°) On va rechercher la résonance d'intensité en faisant varier la fréquence de la tension délivrée par le GBF. Lors des mesures, on constate qu'à la fréquence  $N = 610\text{Hz}$ , l'intensité efficace prend sa valeur maximale  $I = 96,7\text{mA}$ .

a- Quelle est la valeur numérique de la fréquence propre du circuit ? justifier la réponse.

b- Déduire de cette fréquence, la valeur de la capacité  $C$  du condensateur. Quelle indication aurait dû porter le fabricant à la place de MF ?

c- La valeur obtenue par cette méthode de mesure est-elle dans le domaine de tolérance donné par le constructeur ?

**13** Un circuit électrique comporte en série:

- un résistor de résistance  $R = 40 \Omega$ ,
- un condensateur de capacité  $C$ ,
- une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$ .

L'ensemble est alimenté par un GBF délivrant une tension sinusoïdale de fréquence  $N$  réglable:

$$u(t) = 10\sqrt{2} \sin(2\pi Nt)$$

1°) Pour une fréquence  $N_0$ , la valeur de la tension efficace aux bornes du résistor est  $U_R = 9,6\text{V}$  et la tension instantanée aux bornes du condensateur est :

$$u_c(t) = U_c \sqrt{2} \sin(318\pi t - \frac{\pi}{2}) \text{ où } U_c = 36\text{V}.$$

**a-** Montrer que le circuit est en résonance d'intensité.

**b-** Déterminer :

- la valeur de l'intensité efficace  $I_0$  du courant électrique circulant dans le circuit,
- les valeurs de  $C$ ,  $L$  et  $r$ ,
- la valeur du coefficient de surtension  $Q$  du circuit.

**c-** Montrer que  $u$  et  $u_C$  vérifient à chaque instant la relation :  $u_C^2 = -Q^2 u^2 + 2U_C^2$ .

**d-** Etablir l'expression de l'énergie électrique totale en fonction de  $u$  et  $u_C$  et montrer qu'elle se conserve.

**14** Un générateur basse fréquence (G.B.F.) délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U = 10$  V, est utilisé pour alimenter un résistor de résistance  $R = 100 \Omega$ , un condensateur de capacité  $C = 0,5 \mu\text{F}$  et une bobine de résistance  $r = 100 \Omega$  et d'inductance  $L = 50$  mH, ces trois dipôles étant montés en série.

**1°)** Pour la fréquence  $N_1 = 318$  Hz du G.B.F., calculer :

- a-** l'impédance  $Z_1$  du circuit RLC série,
- b-** la valeur efficace  $I_1$  de l'intensité du courant débité par le G.B.F.,
- c-** la puissance  $P_1$  consommée par le circuit,
- d-** la phase  $\varphi_1$  de la tension  $u(t)$  délivrée par le générateur par rapport à l'intensité du courant qu'il débite. Préciser parmi ces deux grandeurs (tension ou intensité du courant) celle qui est en avance de phase sur l'autre.

En déduire le caractère (résistif, capacitif ou inductif) du circuit.

**2°)** Pour la fréquence  $N_1$ , tracer à l'échelle le diagramme de Fresnel du circuit.

**3°)** On fixe la fréquence  $N$  à une valeur  $N_0$  égale à la fréquence propre du circuit RLC série.

**a-** Que devient le diagramme de Fresnel tracé précédemment ?

**b-** En exploitant ce nouveau diagramme, calculer l'impédance  $Z_0$  du circuit, la valeur efficace  $I_0$  de l'intensité du courant débité par le G.B.F et la puissance  $P_0$  consommée par le circuit.

**15** On dispose des appareils et des composants suivants :

- un générateur de tension sinusoïdale de valeur efficace réglable de 0 à 10 V, de fréquence réglable de 5 à 5 kHz,
- un ampèremètre,
- deux voltmètres,
- une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$ ,
- un condensateur de capacité  $C$ ,
- une boîte de résistance réglable de 0 à 1,1 k $\Omega$ ,
- un oscilloscope bicourbe.

**1°)** Schématiser avec les éléments adéquats de la liste ci-dessus le montage permettant d'étudier la variation de l'intensité du courant dans un circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale de fréquence variable (l'oscilloscope sera utilisé au 3°).

**2°)** la mesure de l'intensité efficace dans le circuit en fonction de la fréquence permet de dresser le tableau suivant. La tension efficace  $U$  d'entrée est maintenue constante, égale à 5V pour tout l'exercice.

<b>N(Hz)</b>	100	200	300	400	500	600	700
<b>I(mA)</b>	1,6	3,4	5,7	8,9	15,1	27,6	47,0
<b>N(Hz)</b>	800	900	1000	1100	1200	1300	1400
<b>I(mA)</b>	31,5	20,5	14,6	11,7	9,8	8,5	7,6

**a-** Tracer la courbe  $I = f(N)$ .

Echelles :

- Sur l'axe des abscisses, 1cm représente 100 Hz.
- Sur l'axe des ordonnées, 1cm représente 2,5 mA.

**b-** Que représente la fréquence  $N_0$  correspondant au maximum d'intensité ?

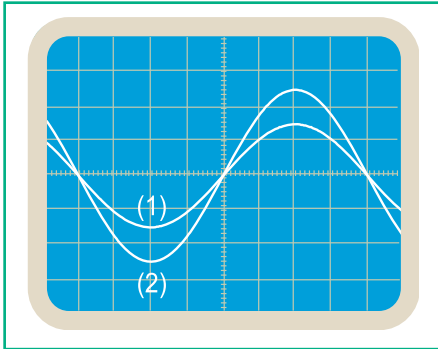
Donner sa valeur.

**c-** Quelle est la résistance totale du circuit ?

**3°) a-** Représenter sur le schéma du montage le branchement de l'oscilloscope pour visualiser la tension  $u(t)$  délivrée par le générateur sur la voie A et les variations d'intensité du courant sur la voie B.

b- Lorsque  $N = N_0$ , on observe l'oscillogramme de la figure ci-dessous. Les réglages de l'oscilloscope sont :

- déviation verticale voie A : 2 V/div.
- déviation verticale voie B : 1 V/div.
- balayage horizontal : 0,2 ms / div.



Quelle est, parmi les courbes (1) et (2), celle qui correspond à celle enregistrée sur la voie A ?  
En déduire la valeur de la résistance  $R$  réglable puis celle de la résistance  $r$  de la bobine.

c- La tension efficace  $U_C$  mesurée aux bornes du condensateur est alors maximale et vaut 21,5 V. Déterminer la valeur de  $C$ .

d- Calculer la valeur de l'inductance  $L$ .

## Étude de texte

### Le facteur de puissance

**16** Le facteur de puissance est un paramètre qui rend compte de l'efficacité qu'a une installation électrique pour consommer de la puissance lorsqu'elle est en marche.

Un mauvais facteur de puissance va augmenter les pertes en ligne, gaspiller la capacité et réduire l'efficacité de l'infrastructure électrique de l'utilisateur.

La structure tarifaire des fournisseurs d'électricité comme la STEG est établie de façon à inciter les

usagers à maintenir constamment un facteur de puissance très élevé. Cela évite les variations de tension et les pertes d'énergie sur le réseau et, par conséquent, le surdimensionnement des installations. Si chacun améliore le facteur de puissance de sa propre installation électrique, il réduit les frais de puissance tout en prolongeant la durée de vie de ses équipements.

La puissance apparente que le réseau de la STEG fournit se décompose en une puissance active et une puissance réactive.

La puissance active assure le fonctionnement des équipements produisant de la chaleur (appareils d'éclairage, radiateurs, etc.), alors que la puissance réactive résulte de la création de champs magnétiques utiles au fonctionnement de divers équipements (moteurs, compresseurs, etc.).

L'une des façons de mieux gérer les coûts d'énergie, c'est de minimiser la puissance maximale en fonction des besoins simultanés des usagers en énergie électrique. En fait, la puissance maximale joue un rôle déterminant dans l'établissement de la puissance qui leur est facturée pour une période donnée.

L'une des solutions proposées aux industriels est de monter des condensateurs dans l'installation électrique de leur usine afin de réduire l'écart entre la puissance moyenne et la puissance apparente et d'améliorer ainsi leur facteur de puissance.

### Questions

1°) Préciser les effets d'un mauvais facteur de puissance ?

2°) Dégager du texte les avantages du facteur de puissance élevé.

3°) Démontrer l'amélioration du facteur de puissance d'une installation électrique industrielle par l'insertion de condensateurs.

# Fiche technique

## Construction de Fresnel

Dans de nombreux problèmes de physique qui traitent des phénomènes périodiques, on est souvent amené à exprimer la somme  $y$  de deux ou plusieurs fonctions sinusoïdales isochrones  $y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ ,  $y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ , ...,  $y_n = a_n \sin(\omega t + \varphi_n)$ . Sachant que leur somme est une fonction sinusoïdale de même période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $y$  peut se mettre sous la forme :

$y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ , où  $a$  est son amplitude et  $\varphi$  sa phase initiale.

Pour déterminer  $a$  et  $\varphi$ , il est commode de recourir à une méthode graphique connue sous le nom de construction de Fresnel. Pour la réaliser, on procède comme suit :

A une fonction  $y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ , on associe, un vecteur tournant  $\vec{OA}$  appelé vecteur de Fresnel (Fig.1) :

- de module égal à l'amplitude  $a$  de  $y$ ,
- d'origine  $O$  confondue avec le centre du cercle trigonométrique,
- tournant avec une vitesse angulaire égale à la pulsation  $\omega$ , dans le sens trigonométrique choisi conventionnellement comme sens positif,
- faisant, à l'instant  $t = 0$  avec l'axe  $(\vec{O}, i)$  un angle égal à la phase initiale  $\varphi$ .

A tout instant  $t$ , la projection orthogonale de  $\vec{OA}$  sur l'axe  $(O, j)$  est  $y = a \sin(\omega t + \varphi)$  (Fig.2).

Le fait que les positions relatives des vecteurs de Fresnel associés à des fonctions isochrones ne soient pas modifiées au cours du temps permet de représenter chacun d'entre eux dans sa position à  $t = 0$  (Fig.3) :

$$y_{k=1,2,\dots,n} = a_k \sin(\omega t + \varphi_k) \quad \mapsto \vec{OA}_k [a_k, \varphi_k].$$

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad \mapsto \vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n.$$

Or,  $y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ . Donc, on a  $\vec{OA} [a, \varphi]$  (Fig.4).

Ainsi, on vient de réaliser un exemple de construction de Fresnel (Fig.4) avec laquelle on peut déterminer les expressions de l'amplitude  $a$  et de la phase initiale  $\varphi$  de  $y$  en fonction des amplitudes  $a_k$  et des phases initiales  $\varphi_k$  des fonctions sinusoïdales  $y_k$  dont elle est la somme.

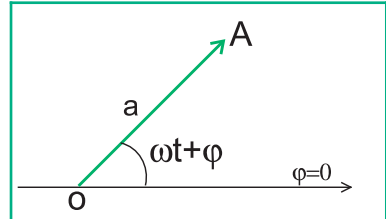


Fig.1 : Vecteur de Fresnel

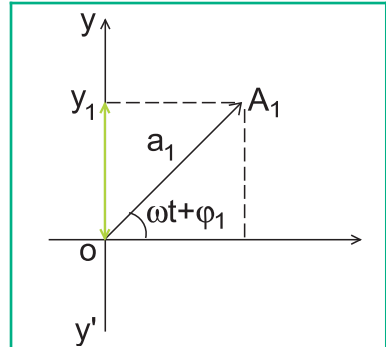


Fig.2 : Projection d'un vecteur de Fresnel sur l'axe  $y'y$

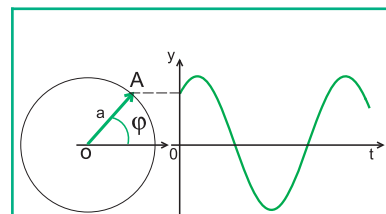


Fig.3 : Représentation d'un vecteur de Fresnel à  $t = 0$ .

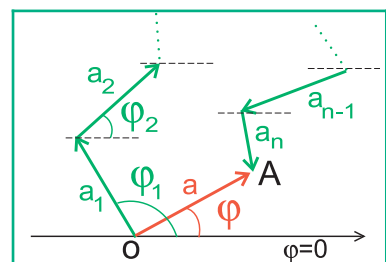


Fig.4 : Exemple de construction de Fresnel



# En savoir plus

## Générateur de courant haute fréquence

Etant inventé et construit vers 1895, l'appareil de la figure ci-contre permet, à partir d'une source de courant de haute tension fournie par une bobine spéciale connue sous le nom de bobine de Ruhmkorff (partie cylindrique située à la partie droite de la figure), de la transformer en courant de haute fréquence. Le principe est fondé sur la propriété de la décharge oscillante des condensateurs qui se compose d'une série de décharges, alternativement dans un sens, puis en sens contraire, avec des intensités qui décroissent rapidement. L'intervalle de temps qui sépare deux décharges successives est d'ailleurs extrêmement court. Une décharge



oscillante constitue donc un courant qui change de sens un grand nombre de fois par seconde. Ce phénomène est d'autant plus net qu'il se produit lorsque la décharge traverse des conducteurs métalliques, gros et courts. Il est dû à l'auto-induction du circuit de décharge. La période est d'autant plus grande que le circuit est plus enroulé sur lui-même, c'est-à-dire qu'il a une auto-induction plus considérable. Elle croît également avec la capacité du condensateur. Les courants de haute fréquence ont la propriété d'illuminer les tubes à vide (Crookes, Geissler) à distance, sans aucune liaison par fil. Les premières applications pratiques des courants, en haute tension, ont été réalisées dans le domaine médical. Nikola Tesla, physicien autrichien né en Dalmatie en 1857, s'aperçoit que les courants ainsi produits sont sans danger pour le corps humain qui peut aisément recevoir des effluves électriques même sous une intensité de deux ou trois ampères, en ne ressentant seulement qu'une sensation de chaleur. Les fréquences élevées sont sans action directe sur les fibres nerveuses et musculaires.

Le docteur et professeur Arsène d'Arsonval généralise l'emploi de ces courants dans le monde médical dès 1893. Il crée ainsi le service d'électrothérapie à la Salpêtrière et appelle cette nouvelle thérapeutique la d'arsonvalisation. Ces courants ont la propriété de produire une dilatation vasculaire générale abaissant la tension artérielle.

Les premiers appareils étaient munis du résonateur du docteur Oudin (c'est le cas de l'appareil présenté ci-dessus) : il s'agit d'un autotransformateur constitué par un solénoïde placé verticalement, dont l'extrémité se termine par une boule conductrice. La partie inférieure seule sert de circuit de décharge des armatures externes de deux condensateurs, reliés sur une longueur correspondant à quelques spires par l'intermédiaire d'un contact mobile ajustable. Selon son emplacement, il se produit par résonance électrique, un courant de haute fréquence dont les effets sont considérablement amplifiés.

## Objectifs

- ◆ A l'aide d'un enregistrement graphique, reconnaître le régime d'oscillations libres (amorties ou non amorties) d'un pendule élastique.
- ◆ Distinguer les régimes pseudopériodique, apériodique et critique des oscillations amorties.
- ◆ Etablir l'équation différentielle des oscillations libres d'un pendule élastique.
- ◆ Mesurer la période des oscillations d'un pendule élastique.
- ◆ Calculer l'énergie mécanique d'un pendule élastique en régime libre.
- ◆ Expliquer la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur non amorti.
- ◆ Expliquer la diminution d'amplitude des oscillations libres amorties d'un pendule élastique par la non conservation de son énergie mécanique.

## Prérequis

### SAVOIR

- ◆ Ecrire l'expression de l'énergie cinétique.
- ◆ Enumérer les facteurs dont dépend l'énergie potentielle élastique.
- ◆ Ecrire l'équation horaire d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.
- ◆ Enoncer la loi de Hooke.

### SAVOIR FAIRE

- ◆ Délimiter un système matériel.
- ◆ Distinguer les forces intérieures des forces extérieures d'un système.
- ◆ Reconnaître la période et la fréquence d'un mouvement périodique.
- ◆ Calculer la pulsation d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.
- ◆ Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un solide en mouvement de translation.
- ◆ Ecrire la solution générale de toute équation différentielle de la forme
 
$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \text{ où } k \text{ est une constante positive.}$$

# OSCILLATIONS LIBRES D'UN PENDULE ÉLASTIQUE

# 5



*Avec son amortisseur à ressort, le VTT (Vélo Tout Terrain) TS (Tout Suspendu) donne au cycliste un confort d'utilisation supérieur dans une compétition de descente d'une montagne.*

*En évitant le balancement des anneaux, le gymnaste démontre tant sa force que son équilibre.*



- ◆ Les geysers, le coeur humain et le balancier d'une horloge sont, entre beaucoup d'autres exemples, des systèmes oscillants. Pourquoi ?
- ◆ Quelle est l'origine du ronflement continu que l'on entend souvent à proximité de fils électriques ou téléphoniques aériens ?
- ◆ A quoi est due la catastrophe naturelle connue sous le nom de tsunami ?

# OSCILLATIONS LIBRES D'UN PENDULE ELASTIQUE

On désigne par pendule élastique tout système constitué d'un solide (S) de masse  $m$  attaché à un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur  $k$ .

Dans le présent chapitre on s'intéresse à l'évolution d'un tel système mécanique au cours du temps.

## OSCILLATIONS LIBRES NON AMORTIES

### 1 MISE EN EVIDENCE

#### Manipulation

Un pendule élastique est disposé horizontalement sur un banc à coussin d'air comme l'indique la figure 1. La masse du solide (S) est  $m = 0.1 \text{ kg}$  et la raideur du ressort est  $k = 20 \text{ N.m}^{-1}$ .

Le solide (S) étant au repos, on l'écarte d'une distance  $d = 2 \text{ cm}$  de sa position d'équilibre dans la direction de l'axe du ressort puis on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale. Le solide (S) effectue des oscillations de part et d'autre de sa position d'équilibre (position de repos) : on dit que les oscillations sont libres. Le système {solide, ressort} constitue un oscillateur libre. L'enregistrement graphique des premières oscillations libres du solide (S) est donné par la figure 2.

#### Remarque :

L'enregistrement graphique peut être réalisé à l'aide d'un dispositif d'acquisition informatique.

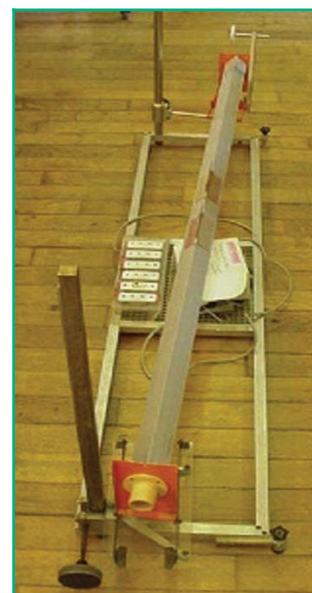


Fig.1 : Oscillateur mécanique sur banc à coussin d'air

#### Questions

1°) A l'aide de l'enregistrement graphique de la figure 2 :

a- mesurer les valeurs maximales ainsi que les valeurs minimales de l'élongation  $x$  du centre d'inertie  $G$  du solide (S), les comparer entre elles et à la distance  $d$  dont on a écarté  $G$  initialement de sa position d'équilibre.

b- mesurer les intervalles de temps séparant les maximums (ou les minimums) successifs et les comparer entre eux.

2°) Déduire des réponses aux questions 1-a et 1-b si les oscillations du pendule élastique utilisé sont amorties ou bien non amorties et qu'elles sont périodiques de période  $T_0$  que l'on précisera.

3°) Conclure quant à la nature du mouvement de  $G$ .

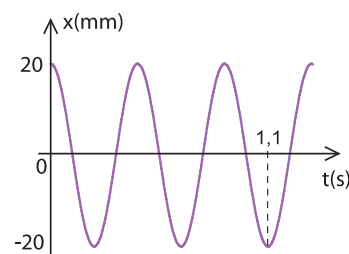


Fig.2 : Enregistrement graphique des premières oscillations libres du solide (S)

**Conclusion**

Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont rectilignes sinusoïdales.

L'élongation s'écrit : 
$$x = X_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

**Remarque**

Les valeurs de l'amplitude  $X_m$  et de la phase initiale  $\varphi$  dépendent des conditions initiales.

## 2 FACTEURS DONT DEPEND LA PERIODE DES OSCILLATIONS

### 2.1- INFLUENCE DE L'AMPLITUDE

**Manipulation**

On refait la même expérience pour différentes valeurs de  $d$  ( $X_m$ ). A l'aide d'un chronomètre, on mesure la durée  $\Delta t$  de dix oscillations. Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

$X_m$ (cm)	1	2	3	4	5
$\Delta t$ (s)	4.4	4.5	4.4	4.4	4.5

**Remarque**

La même manipulation peut être réalisée avec un pendule élastique vertical (Fig. 3).

**Questions**

- 1°) Calculer la période  $T_0$  des oscillations correspondant à chacune des amplitudes  $X_m$  choisies.
- 2°) Comparer les valeurs trouvées entre elles et en déduire si les oscillations, d'amplitudes différentes, sont isochrones.

**Conclusion**

La période  $T_0$  des oscillations libres non amorties d'un pendule élastique est indépendante de leur amplitude.

### 2.2- INFLUENCE DE LA MASSE DU SOLIDE (S)

**Manipulation**

On refait encore la même expérience avec des solides de masses  $m$  différentes. On détermine à chaque fois, indirectement, la période  $T_0$  des oscillations.

Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

$m$ (kg)	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300
$\Delta t = 10T_0$ (s)	3.2	4.4	5.4	6.3	7.0	7.7

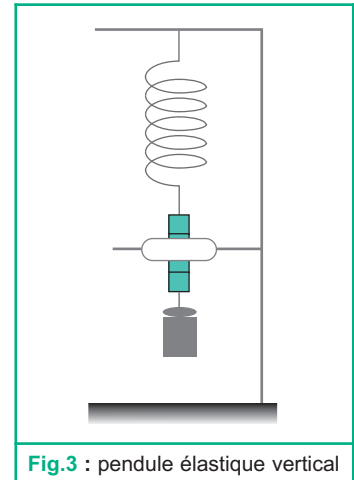


Fig.3 : pendule élastique vertical

### Questions

1°) Montrer, qualitativement, que la période  $T_0$  des oscillations n'est pas proportionnelle à  $m$ .

2°) L'évolution de  $T_0^2$  en fonction de la masse  $m$  est donnée par la figure 4. Montrer que  $T_0^2$  est proportionnelle à  $m$  et déterminer la constante de proportionnalité entre ces deux grandeurs.

3°) En déduire la relation entre la période  $T_0$  des oscillations et la masse  $m$  du solide (S).

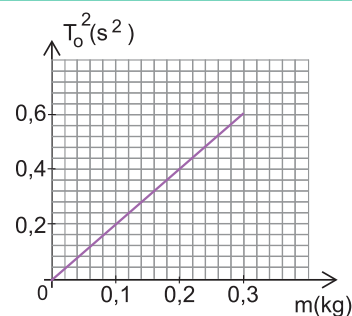


Fig.4 : Courbe  $T_0^2 = f(m)$

### Conclusion

La période des oscillations libres non amorties d'un pendule élastique est proportionnelle à la racine carrée de la masse du solide (S).

## 2.3- INFLUENCE DE LA RAIDEUR DU RESSORT

### Manipulation

La même expérience, réalisée avec le même solide (S) de masse 100 g, accroché à des ressorts de raideurs différentes, donne les résultats consignés dans le tableau suivant :

$k$ (N.m <sup>-1</sup> )	10	20	30	40	50
$\Delta t = 10 T_0$ (s)	6.28	4.44	3.62	3.14	2.80

### Questions

1°) Montrer, qualitativement, que la période  $T_0$  des oscillations n'est pas inversement proportionnelle à la raideur  $k$  du ressort.

2°) La courbe représentant  $T_0^2 = f\left(\frac{1}{k}\right)$  est donnée par la figure 5. Montrer que  $T_0^2$  est proportionnelle à  $\frac{1}{k}$ . Déterminer la constante de proportionnalité.

3°) En déduire la relation entre la période  $T_0$  des oscillations et la raideur  $k$  du ressort.

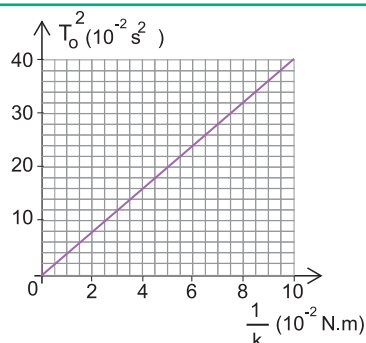


Fig.5 : Courbe  $T_0^2 = f\left(\frac{1}{k}\right)$

### Conclusion

La période des oscillations libres non amorties d'un pendule élastique est inversement proportionnelle à la racine carrée de la raideur  $k$  du ressort.

## 2.4- CONCLUSION GÉNÉRALE : EXPRESSION DE LA PÉRIODE $T_0$

La période d'un pendule élastique est indépendante de l'amplitude des oscillations. Elle ne dépend que des grandeurs  $m$  et  $k$  caractéristiques du pendule, d'où sa qualification de période propre. Etant à la fois proportionnelle à  $\sqrt{m}$  et inversement proportionnelle à  $\sqrt{k}$ , la période propre d'un pendule élastique

est alors proportionnelle à  $\sqrt{\frac{m}{k}}$  ce qui signifie  $T_0 = C\sqrt{\frac{m}{k}}$  où  $C$  est une constante dont la valeur  $2\pi$  peut être déduite des résultats obtenus précédemment.

Ainsi, la période propre  $T_0$  d'un pendule élastique de masse  $m$

et raideur  $k$ , a pour expression  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

### 3 ETUDE THEORIQUE

Dans toutes les expériences réalisées précédemment et par rapport à un repère lié au laboratoire, le solide (S) est soumis aux forces extérieures suivantes :

- son poids  $\vec{P}$ .
- la réaction  $\vec{R}$  du coussin d'air.
- la tension  $\vec{T}$  du ressort.

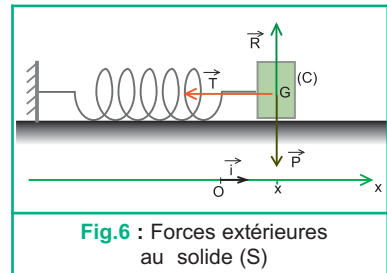


Fig.6 : Forces extérieures au solide (S)

#### Questions

1°) a-Montrer que :  $\vec{T} = -kx \cdot \vec{i}$ , où  $k$  est la raideur du ressort et  $x$  est l'élongation du centre d'inertie  $G$  de (S) à un instant  $t$  (fig. 6).

b-Justifier la qualification de la tension  $\vec{T}$  du ressort comme étant une force de rappel.

2°) Par application de la relation fondamentale de la dynamique au solide (S) dans un repère lié au laboratoire, montrer que l'équation différentielle du mouvement de  $G$  s'écrit:  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$  avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

3°) Vérifier que cette équation différentielle admet une solution générale de la forme :  $x = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ .

4°) Montrer que l'expression théorique de la période propre  $T_0$  du pendule élastique s'identifie bien à celle trouvée expérimentalement.

#### Conclusion

Etant sinusoïdales, les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

## 4 ENERGIE D'UN PENDULE ELASTIQUE

L'énergie mécanique  $E$  du système {solide (S) + ressort} est la somme de l'énergie cinétique  $E_c$  due au mouvement du solide (S) et de l'énergie potentielle élastique  $E_p$  due à la déformation du ressort :  $E = E_c + E_p$ .

### 4.1- ENERGIE CINÉTIQUE

L'énergie cinétique du solide (S) est  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

or,  $v = \frac{dx}{dt} = X_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$  d'où :  $E_c = \frac{1}{2}mX_m^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$ .

Compte tenu de  $\omega_0^2 m = k$ , il vient :

$$E_c = \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{4}kX_m^2 [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

Donc, les variations de l'énergie cinétique en fonction du temps sont périodiques de période  $\frac{T_0}{2}$  (Fig. 7, cas où  $\varphi = 0$ )

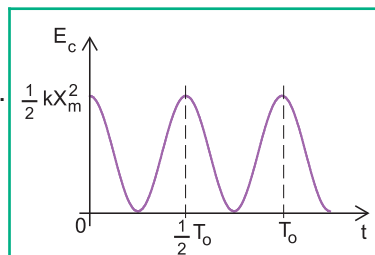


Fig.7 : Energie cinétique en fonction du temps (cas où  $\varphi = 0$ )

### 4.2- ENERGIE POTENTIELLE ÉLASTIQUE

On a vu en deuxième année que l'énergie potentielle élastique d'un système matériel déformable dépend de ses caractéristiques. Pour un pendule élastique, étant une fonction de la raideur  $k$  du ressort et de sa déformation  $\Delta l$ , elle s'écrit sous la

forme :

$$E_p = \frac{1}{2}k \Delta l^2$$

#### Questions

1°) Montrer que l'énergie potentielle élastique  $E_p$  du système {solide, ressort} s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{4}kX_m^2 [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

2°) Représenter la courbe  $E_p = f(t)$  et montrer que sa période est  $\frac{T_0}{2}$ .

### 4.3- L'ÉNERGIE MÉCANIQUE ET SA CONSERVATION

$$E = E_c + E_p$$

En remplaçant  $E_c$  et  $E_p$  par les expressions trouvées,

on aura :  $E = \frac{1}{2}kX_m^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)]$ .

Or,  $\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$ .

Il vient donc :  $E = \frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}mV_m^2$ .

Ainsi,  $E = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) = \text{cte}, \forall t$ .



**Conclusion**

En régime libre non amorti, l'énergie mécanique d'un pendule élastique horizontal est constante. Par suite, un tel système est dit conservatif.

**4.4- TRANSFORMATIONS MUTUELLES DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE ET DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE**

Au cours de ses oscillations libres non amorties, le pendule élastique passe périodiquement par sa position de repos ( $x = 0$ ) avec une vitesse maximale en valeur absolue ( $v = \pm V_m$ ) et rebrousse chemin lorsque, simultanément, sa vitesse s'annule et son élongation est extrême ( $x = \pm X_m$ ).

**Question**

Interpréter énergétiquement ces propriétés oscillatoires.

**Interprétation**

Lorsque le pendule élastique est écarté au maximum de sa position d'équilibre, position pour laquelle on a  $x = X_m$  par exemple, son énergie est purement potentielle.

En se rapprochant de la position de repos, l'élongation  $x$  diminue tandis que la valeur de la vitesse augmente. Par conséquent, l'énergie potentielle diminue aux dépens de l'énergie cinétique.

En atteignant la position de repos, l'oscillateur continue à se déplacer grâce à son énergie cinétique.

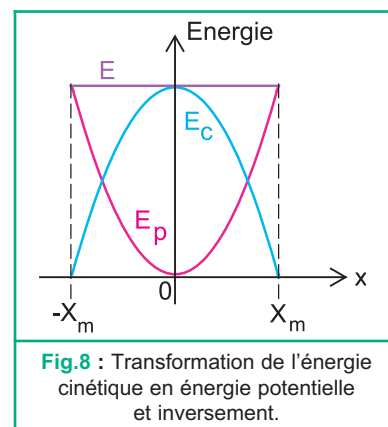
Au fur et à mesure qu'il s'en éloigne, son énergie cinétique diminue tandis que son énergie potentielle augmente. En atteignant la position  $x = -X_m$ , l'énergie cinétique s'annule tandis que l'énergie potentielle est maximale. Le solide (S) rebrousse alors chemin.

Par un raisonnement analogue, on montre qu'il va atteindre de nouveau la position extrême  $x = X_m$  et ainsi de suite.

La courbe de la figure 8 montre que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle dont la somme est constante varient toujours en sens inverses. En effet, lorsque l'une diminue, l'autre augmente et quand l'une s'annule, l'autre est maximale.

**Conclusion**

Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont auto-entretenues par les transformations mutuelles de ses énergies cinétique et potentielle.



**Fig.8** : Transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement.

# OSCILLATIONS LIBRES AMORTIES

Dans la pratique, on constate que l'amplitude des oscillations libres du pendule élastique diminue progressivement à cause des facteurs dissipatifs inévitables (essentiellement les frottements). Même sur une table à coussin d'air, où les frottements sont notablement amoindris, les oscillations prennent fin au bout d'un temps plus ou moins long. De telles oscillations sont dites amorties.

## 1

### ETUDE EXPERIMENTALE

#### Manipulation

On reprend le dispositif de la figure 1 et on fixe sur le solide une palette perpendiculairement à la direction du déplacement et qui peut se déplacer soit dans l'air, soit dans un liquide.

On peut enregistrer le mouvement du solide oscillant avec la palette se déplaçant d'abord dans l'air puis dans l'eau. On obtient, dans le cas des oscillations amorties, des courbes comme celles des figures 9 et 10.

#### Questions

1°) A l'aide des chronogrammes des figures 9 et 10 :

a- préciser comment évolue l'amplitude des oscillations libres du pendule au cours du temps ; en déduire que les oscillations sont plus amorties dans l'eau que dans l'air.

b- montrer que les maximums (ou minimums) sont atteints avec la palette dans l'air puis dans l'eau, à des intervalles de temps successifs égaux respectivement à  $T_1$  et à  $T_2$  que l'on calculera.

2°) Comparer les intervalles de temps  $T_1$  et  $T_2$  entre eux et avec la période propre  $T_0$  du pendule.

3°) Déduire des réponses aux questions 1-a et 1-b que, comme celles d'un circuit RLC série, les oscillations libres amorties d'un pendule élastique sont pseudopériodiques.

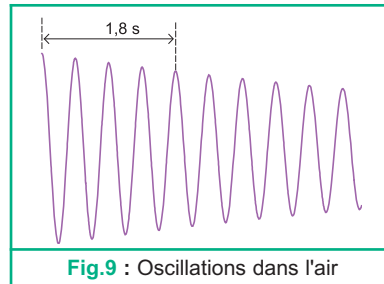


Fig.9 : Oscillations dans l'air

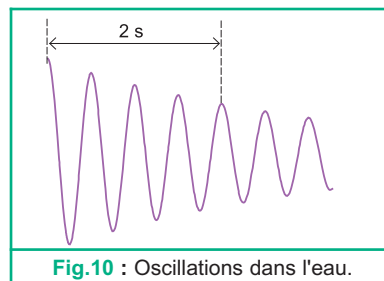


Fig.10 : Oscillations dans l'eau.

#### Interprétation

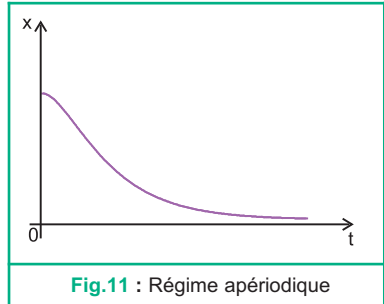
Les courbes des figures 9 et 10 montrent que l'amplitude des oscillations décroît plus vite dans l'eau que dans l'air. Or, on sait que la décroissance de l'amplitude est d'autant plus grande que l'amortissement est plus important. Donc, l'eau amortit plus les oscillations que l'air.

Le passage du solide par la position d'équilibre est toujours périodique, mais le mouvement oscillatoire n'est plus périodique à cause de la diminution de l'amplitude. Le mouvement est dit pseudopériodique.

On appelle pseudopériode la durée  $T$  qui sépare deux passages successifs du solide par la même position et dans le même sens.

La pseudopériode  $T$  ( $T_1$  ou  $T_2$ ) est voisine de la période propre  $T_0$  des oscillations.

Lorsqu'on augmente les frottements en immergeant totalement la palette dans l'eau, ou en utilisant un liquide plus visqueux que l'eau (de l'huile par exemple), on constate que le mouvement cesse d'être oscillatoire à partir d'une certaine valeur de l'amortissement : on dit qu'il est apériodique (Fig.11). Pour un amortissement particulier, l'oscillateur retourne à sa position d'équilibre, sans osciller, en un minimum de temps : un tel régime est dit apériodique critique.



### Conclusion

Selon l'importance de l'amortissement, les oscillations d'un pendule élastique sont :

- faiblement amorties, le régime est pseudopériodique.
- fortement amorties, le régime est apériodique.

## 2 ETUDE THÉORIQUE

### 2.1- ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES OSCILLATIONS

Dans un repère lié au laboratoire, le solide (S) est soumis aux forces extérieures suivantes (Fig.12) :

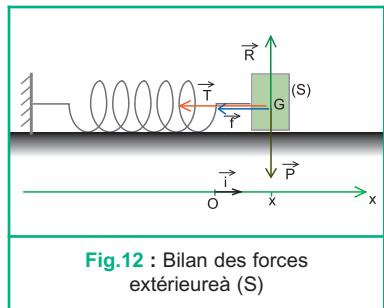
- son poids  $\vec{P}$ ,
- la réaction  $\vec{R}$  du coussin d'air,
- la tension du ressort (force de rappel)  $\vec{T} = -Kx\vec{i}$ ,
- les forces de frottement ; celles-ci étant supposées de type visqueux, elles sont équivalentes à une force  $\vec{f}$  de sens contraire au vecteur vitesse et de la forme :  $\vec{f} = -h\vec{v}$  où  $h$  est une constante positive, ne dépendant que de la nature du liquide visqueux, appelée coefficient de frottement.

La deuxième loi de Newton, appliquée au solide (S), s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Par projection orthogonale sur l'axe  $x'x$  on obtient :

$$-kx - h\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}, \text{ avec } \frac{dx}{dt} = v \text{ et } \frac{d^2x}{dt^2} = a,$$



il vient finalement :  $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = 0$  ou encore :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (1)$$

### Remarque

Cette équation différentielle admet des solutions qui dépendent de la valeur de  $h$  et qui donnent les régimes mis en évidence expérimentalement.

## 2.2- L'ÉNERGIE MÉCANIQUE ET SA NON CONSERVATION

En l'absence de frottement, on a montré que le caractère non amorti des oscillations est dû à la conservation de l'énergie mécanique  $E$  du pendule (système solide-ressort). Qu'en est-il pour  $E$  et qu'est-ce qui fait diminuer l'amplitude des oscillations lorsque les frottements sont présents ?

L'énergie mécanique  $E$  du pendule élastique a pour expression :  $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ .

N'ayant pas les expressions de  $x(t)$  et de  $v(t)$ , pour étudier l'évolution de  $E$  au cours du temps, il suffit de déterminer l'expression de sa dérivée par rapport au temps :

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt}$$

En remplaçant  $v$  par  $\frac{dx}{dt}$  et  $\frac{dv}{dt}$  par  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , on obtient :  $\frac{dE}{dt} = \frac{dx}{dt} \left[ m \frac{d^2x}{dt^2} + kx \right]$

Or d'après (1), dans le cas où les frottements sont de type visqueux,  $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = -h \frac{dx}{dt}$ .

D'où :  $\frac{dE}{dt} = -h \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = -h v^2$ .  $\frac{dE}{dt} = -h v^2$  ( $h$  est une constante positive)

On a ainsi :  $\frac{dE}{dt} < 0$ .  $\frac{dE}{dt}$  négative signifie que l'énergie mécanique de l'oscillateur diminue au cours du temps. Etant due aux frottements, cette diminution de  $E$  se traduit par une dissipation progressive sous forme d'énergie thermique. Celle-ci ne permet pas des transformations mutuelles intégrales d'énergie cinétique et d'énergie potentielle du pendule au cours de ses oscillations, ce qui explique la diminution de l'amplitude de ces dernières.

### Conclusion

Un pendule élastique soumis à des forces de frottement constitue un système non conservatif.

Dans le cas de frottements visqueux, la diminution d'énergie mécanique d'un pendule élastique est telle que :  $\frac{dE}{dt} = -h v^2$ , où  $h$  est le coefficient de frottement.

La diminution d'énergie due aux frottements est elle-même la cause d'amortissement des oscillations libres.

## ANALOGIE ENTRE UN OSCILLATEUR MECANIQUE ET UN OSCILLATEUR ELECTRIQUE

L'étude des oscillations libres d'un pendule élastique et celle d'un circuit RLC révèle une analogie formelle entre l'oscillateur mécanique et l'oscillateur électrique. Cette analogie est récapitulée dans le tableau suivant :

Oscillateur		le pendule élastique	le circuit RLC série
Grandeurs caractéristiques	Coefficient d'inertie	masse m	inductance L
	Coefficient de rappel	raideur k	inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
	Facteur dissipatif	coefficient de frottement h	résistance R
Grandeurs oscillantes		élongation x	charge q
		vitesse $v = \frac{dx}{dt}$	intensité $i = \frac{dq}{dt}$
Equation différentielle des oscillations	amorties	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$	$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$
	non amorties	$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$	$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$
Période propre de l'oscillateur		$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$
Equation horaire des oscillations non amorties		$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$ ou $v = V_m \sin(\omega_0 t + \varphi_v)$	$q = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$ ou $i = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$
Energie de l'oscillateur	Formes et expressions générales	- potentielle élastique : $\frac{1}{2} kx^2$ - cinétique : $\frac{1}{2} mv^2$ - mécanique : $E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$	- électrostatique : $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ - magnétique : $\frac{1}{2} Li^2$ - totale : $E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$
	non amorti	se conserve	
		$E = \frac{1}{2} kX_m^2 = \frac{1}{2} mV_m^2 = \text{cte}$	$E = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} LI_m^2 = \text{cte}$
amorti	diminue		
	$\frac{dE}{dt} = -hv^2 < 0$	$\frac{dE}{dt} = -Ri^2 < 0$	

# L'essentiel

- En l'absence de tout frottement, les oscillations libres d'un pendule élastique sont non amorties. Autrement, elles sont d'autant plus amorties que les frottements sont plus importants.
  - Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle :  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ , où  $x$  est l'élongation du centre d'inertie du solide S et  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .
  - Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont périodiques de période propre :  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .
  - En l'absence de tout frottement, le pendule élastique oscillant est un système conservatif.
  - Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique résultent des transformations mutuelles d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.
  - Les oscillations libres amorties d'un pendule élastique soumis à des frottements visqueux sont régies par l'équation différentielle :  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ , où  $h$  est le coefficient de frottement.
- Selon l'importance de l'amortissement, le régime peut être :
- pseudopériodique (amortissement faible)
  - apériodique (amortissement important)
- Les oscillations libres amorties d'un pendule élastique sont pseudopériodiques ; leur pseudopériode  $T$  est légèrement supérieure à la période propre  $T_0$  de l'oscillateur : l'écart ( $T - T_0$ ) est d'autant plus remarquable que l'amortissement est plus important.
  - La diminution d'énergie due aux frottements rend les oscillations libres du pendule élastique amorties.

# Exercices

## Exercice résolu

### ÉNONCÉ

Un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur  $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$  est enfilé sur une tige horizontale.

Une des extrémités du ressort est reliée à un cylindre creux (C) de masse  $m = 100 \text{ g}$  qui peut coulisser sans frottement le long de la tige.

L'abscisse  $x$  du centre d'inertie G du cylindre (C) est repérée par rapport à O, position de G à l'équilibre.

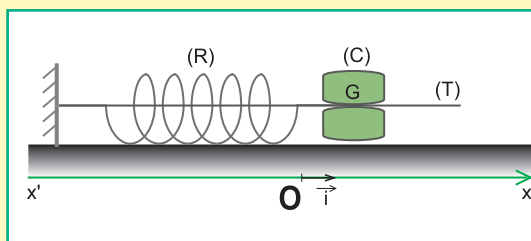


Fig.1

On écarte le cylindre de sa position d'équilibre d'une distance  $x_0 = 2 \text{ cm}$  et on l'abandonne à lui-même à un instant  $t_0$  choisi comme origine des temps.

1°) Dans une première expérience, le cylindre est abandonné sans vitesse initiale.

a- En appliquant le théorème du centre d'inertie, montrer que les oscillations du centre d'inertie G du cylindre (C) sont sinusoïdales de pulsation propre  $\omega_0$  que l'on calculera.

b- Montrer, par la détermination de  $\left(\frac{dE}{dt}\right)$ , que le système (cylindre, ressort) est conservatif.

c- Exprimer l'énergie mécanique E en fonction de k et de  $x_0$ . En déduire que l'amplitude  $X_{m1}$  est égale à  $x_0$ .

d- Déterminer l'équation horaire du mouvement de G.

2°) Dans une deuxième expérience, le cylindre (C) est abandonné avec une vitesse initiale  $v_0 = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$ .

a- Qu'est-ce qui change dans les oscillations du pendule ? Justifier qualitativement la réponse.

b- Sachant que l'élongation de G s'écrit :  $x(t) = X_{m2} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$ , déterminer l'amplitude  $X_{m2}$ , la phase initiale  $\varphi_2$  et la vitesse maximale  $V_{m2}$  de G.

c- Calculer l'énergie mécanique  $E_{02}$  de l'oscillateur à l'instant  $t_0 = 0$ .

d- Retrouver énergétiquement les valeurs de  $X_{m2}$  et de  $V_{m2}$ .

3°) Comparer les énergies mécaniques du système {cylindre + ressort} dans les deux expériences considérées.

**SOLUTION**

1°) a- A un instant  $t$  donné, lorsque le cylindre (C) est en mouvement, il est soumis aux forces extérieures suivantes : son poids  $\vec{P}$ , la réaction  $\vec{R}$  de la tige et la tension  $\vec{T}$  du ressort.

L'application du théorème du centre d'inertie au cylindre (C) donne :  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$ .

Par projection orthogonale sur Ox on obtient :

$$-kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} . \text{ D'où l'équation différentielle :}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1), \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m} . \text{ Les oscillations du cylindre (C) sont donc sinusoïdales de}$$

$$\text{pulsation : } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

$$\text{A.N. : } \omega_0 = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

b- L'énergie mécanique de l'oscillateur est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :  $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ .

$$\text{La dérivée de E par rapport au temps donne : } \frac{dE}{dt} = kx \frac{dx}{dt} + mv \frac{dv}{dt} \text{ Or } v = \frac{dx}{dt} \text{ et } \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} .$$

$$\text{D'où : } \frac{dE}{dt} = v \left[ kx + m \frac{d^2x}{dt^2} \right] . \text{ D'après l'équation différentielle (1), le terme } \left[ kx + m \frac{d^2x}{dt^2} \right] \text{ est nul}$$

quelle que soit  $v$ . Donc,  $\frac{dE}{dt} = 0$ , ce qui signifie : le système {cylindre, ressort} est conservatif.

c- Le système {cylindre, ressort} étant conservatif, son énergie mécanique  $E_1$  est constante. Donc,  $E_1 = E(t=0) = E_{01}$ .

$$\text{Or, à l'instant } t_0 = 0 : v_0 = 0 \text{ et } x = x_0 ; \text{ d'où : } E_{01} = \frac{1}{2}kx_0^2 .$$

$$\text{On sait que pour } x = \pm X_{m1} , v = 0 . \text{ Donc, } E_1 = \frac{1}{2}kX_{m1}^2 .$$

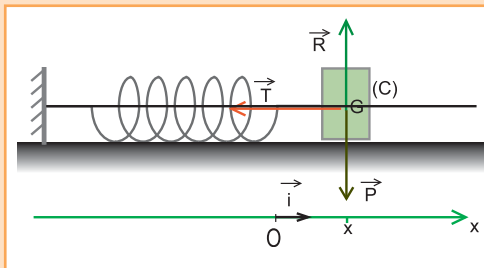
$$\text{Par suite, } \frac{1}{2}kX_{m1}^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 . \text{ Cela donne : } X_{m1} = x_0 .$$

d- L'équation horaire du mouvement de G est de la forme :  $x(t) = X_{m1} \sin(\omega_0 t + \varphi_1)$ .

$$\text{A } t = 0 ; x_0 = X_{m1} \sin \varphi_1 . \text{ Or, } X_{m1} = x_0 = 0.02 \text{ m ; d'où } \sin \varphi_1 = 1 . \text{ Ce qui donne : } \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$\text{Finalement : } x(t) = 0.02 \sin \left( 10t + \frac{\pi}{2} \right) .$$

2°) a- Etant abandonné à lui-même avec une vitesse initiale  $v_0$ , l'oscillateur possède une énergie mécanique  $E_{02}$  supérieure à son énergie mécanique  $E_{01}$  lorsqu'il est abandonné sans vitesse dans la première expérience, ce qui rend l'amplitude  $X_{m2}$  des oscillations dans la deuxième expérience supérieure à  $X_{m1} = x_0$ .





**b-** On a :  $x(t) = X_{m2} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$

Par dérivation de l'élongation :  $x(t) = X_{m2} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$ , on obtient la vitesse :

$$v(t) = X_{m2} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

A  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = X_{m2} \sin \varphi_2$  (1) et  $v = v_0 = X_{m2} \omega_0 \cos \varphi_2$  (2)

Le rapport  $\frac{(1)}{(2)}$  donne :  $\text{tg } \varphi_2 = \frac{x_0 \omega_0}{v_0}$ . A.N :  $\text{tg } \varphi_2 = 1$  ; d'où  $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$  rad ou bien  $\frac{3\pi}{4}$  rad.

Or  $v_0 = X_{m2} \omega_0 \cos \varphi_2 > 0$ . Donc  $\cos \varphi_2 > 0$ . D'où,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$  rad.

D'après (1), on obtient  $X_{m2} = \frac{x_0}{\sin \varphi_2}$ .

A.N. :  $X_{m2} \approx 2.83 \cdot 10^{-2}$  m

$v(t) = X_{m2} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$  donne :  $V_{m2} = X_{m2} \omega_0$

A.N. :  $V_{m2} = 0,283 \text{ m.s}^{-1}$ .

**c)** A l'instant  $t_0 = 0$ ,  $v = v_0$  et  $x = x_0$  d'où :  $E_{02} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2$

A.N. :  $E_{02} = 4 \cdot 10^{-3}$  J.

**d)** Le système (cylindre-ressort) étant conservatif,  $E_2$  est constante :  $E_2 = \frac{1}{2} k X_{m2}^2 = E_{02}$ .

Ce qui entraîne :  $X_{m2} = \sqrt{\frac{2E_{02}}{k}}$

A.N. :  $X_{m2} \approx 2.83 \cdot 10^{-2}$  m

$E_{02} = \frac{1}{2} m V_{m2}^2$ , d'où :  $V_{m2} = \sqrt{\frac{2E_{02}}{m}}$ .

A.N. :  $V_{m2} = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$

**3°)** L'énergie mécanique  $E$  est proportionnelle au carré de l'amplitude  $X_m$ .

On a :  $E_1 = \frac{1}{2} k X_{m1}^2$  et  $E_2 = \frac{1}{2} k X_{m2}^2$ , d'où :  $\frac{E_2}{E_1} = \frac{X_{m2}^2}{X_{m1}^2}$ .

Comme  $X_{m2}$  est supérieure à  $X_{m1}$ , il vient  $\frac{E_2}{E_1} > 1$ . Donc,  $E_2 > E_1$ .

**Remarque** : on peut répondre à la question en comparant directement  $E_{02}$  et  $E_{01}$  car

$E_1 = E_{01}$  et  $E_2 = E_{02}$ .

En fait,  $\frac{E_2}{E_1} = \frac{E_{02}}{E_{01}} = 1 + \frac{1}{\omega_0^2} \left( \frac{v_0}{x_0} \right)^2 > 1$ . Donc,  $E_2 > E_1$ .

# Exercices à résoudre

## Tests rapides des acquis

### 1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

1°) Au passage par la position d'équilibre, la valeur algébrique de la vitesse est :  $v = \omega_0 X_m$ .

2°) L'équation différentielle d'un pendule élastique est :  $\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_0^2 x = 0$

3°) Les oscillations d'un pendule élastique ne sont pas amorties dans l'air.

4°) L'énergie cinétique maximale du solide (S) de masse  $m$  d'un pendule élastique en oscillations libres non amorties, a pour expression  $E_c = \frac{1}{2} k X_m^2$

5°) La vitesse instantanée  $v(t)$  d'un solide en oscillations libres non amorties est toujours en quadrature avance de phase par rapport à son élongation  $x(t)$ .

6°) Les frottements influent sur l'amplitude des oscillations d'un pendule élastique.

7°) La pseudopériode des oscillations amorties d'un pendule élastique augmente avec l'amortissement.

### 2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la proposition juste.

1°) La période propre  $T_0$  des oscillations d'un pendule élastique :

- a- dépend de l'amplitude  $X_m$ .
- b- est proportionnelle à la masse du solide (S).
- c- ne dépend pas des conditions initiales.
- d- est le temps qui sépare deux passages successifs du solide par sa position d'équilibre.

2°) Les oscillations non amorties d'un pendule élastique ont une amplitude qui :

- a- dépend de la vitesse initiale ;
- b- ne dépend que de la distance dont on a écarté initialement le pendule de sa position de repos ;
- c- Une amplitude qui augmente au cours du temps.

3°) La diminution de l'amplitude des oscillations amorties d'un pendule élastique est due :

- a- aux transformations mutuelles d'énergie cinétique et d'énergie potentielle ;
- b- aux frottements ;
- c- uniquement à la dissipation de son énergie cinétique en énergie thermique.

4°) Au cours des oscillations libres d'un pendule élastique, la vitesse du solide au passage par la position d'équilibre, est :

- a- toujours maximale ;
- b- toujours nulle ;
- c- maximale ou minimale.

5°) Un pendule élastique est formé d'un ressort de raideur  $k = 40 \text{ N.m}^{-1}$  et d'un solide de masse  $m = 100 \text{ g}$ , sa période propre vaut :

- a- 0,62 s ;
- b- 3,10 s ;
- c- 0,31 s.

6°) L'équation différentielle du mouvement sans frottement d'un solide de masse  $m$  accroché à un ressort de raideur  $k$  est :

- a-  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m}{k} x = 0$  ;
- b-  $\frac{d^2x}{dt^2} + \sqrt{\frac{k}{m}} x = 0$  ;
- c-  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$  .

7°) Un pendule élastique en oscillations libres amorties a :

- a- une pseudopériode croissante au cours du temps ;
- b- une pseudopériode égale à sa période propre ;
- c- son amplitude qui diminue en raison des frottements.

8°) Le régime d'oscillations d'un pendule élastique amorti est pseudopériodique lorsque :

- a- l'amortissement est faible ;
- b- l'oscillateur est abandonné avec une vitesse initiale
- c- L'amplitude est constante.

## Exercices d'application

**3** Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide de masse  $m = 300 \text{ g}$  et un ressort de raideur  $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$ . Le solide est lancé à l'instant  $t = 0 \text{ s}$ , depuis sa position d'équilibre, avec une vitesse  $v_0 = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$  dans le sens positif. L'élongation du centre d'inertie du solide est :  $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ . Déterminer  $X_m$ ,  $\omega_0$  et  $\varphi$ .

**4** Un solide (S) de masse  $m = 0,1 \text{ kg}$  est accroché à l'une des extrémités d'un ressort de masse négligeable et de raideur  $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$  et dont la deuxième extrémité est attachée à un point fixe. L'ensemble { solide ; ressort } est disposé sur un banc à coussin d'air horizontal. Le solide (S) est déplacé de façon à provoquer l'allongement du ressort de  $2 \text{ cm}$  puis abandonné à lui-même sans vitesse initiale à un instant  $t_0$  qui sera pris comme origine des temps.

- 1°) Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide (S).
- 2°) Déterminer la période des oscillations du solide (S).
- 3°) Déterminer l'expression de l'élongation  $x(t)$  du centre d'inertie G de (S).

**5** Un pendule élastique horizontal est constitué d'un ressort à spires non jointives, de raideur  $k = 25 \text{ N.m}^{-1}$  et d'un solide de masse  $m = 0,5 \text{ kg}$ . On écarte le solide de  $2 \text{ cm}$  de sa position d'équilibre et on le lâche. Le pendule effectue des oscillations sinusoïdales non amorties.

- 1°) Calculer la période propre de l'oscillateur.
- 2°) Calculer la vitesse du solide au passage par la position d'équilibre.
- 3°) Comment évolue l'amplitude des oscillations, si le mouvement du solide devient amorti ?

## Exercices de synthèse

**6** Un corps (C) de masse  $M = 0,2 \text{ kg}$  est attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, de raideur  $k = 20 \text{ N.m}^{-1}$  et de masse négligeable devant  $M$ .

L'autre extrémité du ressort est fixe. L'ensemble ressort (R) et corps (C) peut osciller horizontalement le long d'une tige (T). A l'équilibre, le centre de gravité G du corps (C) coïncide avec l'origine d'un repère  $(O, \vec{i})$  porté par un axe horizontal  $x'x$  (figure 1). Au cours de son mouvement, G est repéré par son abscisse  $x$ .

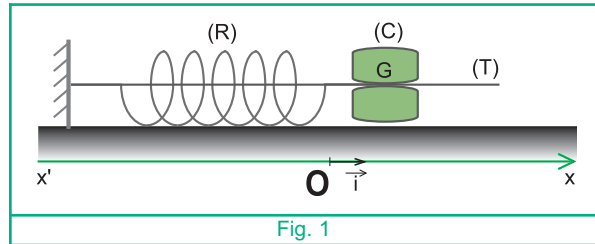


Fig. 1

L'équation horaire du mouvement de G est  $x = 0,1 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ . Sachant que,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

- 1°) a- calculer la valeur de la période  $T_0$  des oscillations de G,
- b- en déduire la valeur de la fréquence propre  $N_0$ .
- 2°) A l'aide d'un dispositif approprié, on soumet le corps (C) à des frottements visqueux.

L'enregistrement des différentes positions de G au cours du temps donne la courbe de la figure 2.

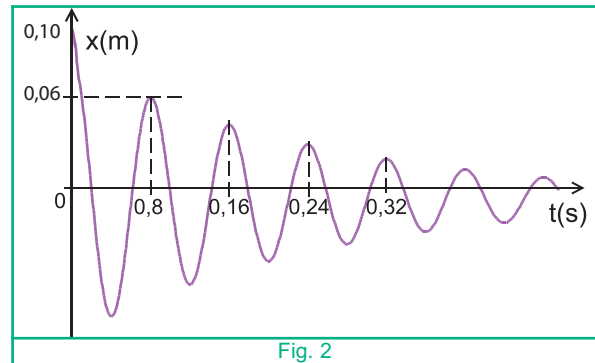


Fig. 2

- a- Déterminer, graphiquement, la valeur de la pseudo-période  $T$  des oscillations de G, la comparer à celle de la période propre  $T_0$  de l'oscillateur.
- b- Déterminer les valeurs des énergies mécaniques  $E_0$  et  $E_1$  de l'oscillateur respectivement aux instants  $t_0 = 0$  et  $t_1 = T$ .
- c- Comparer les valeurs de  $E_0$  et de  $E_1$ .

D'après Bac. Juin 2005 (section sport)

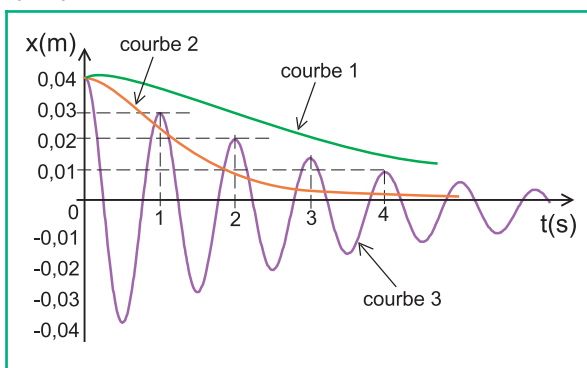
**7** On écarte le solide (S) d'un pendule élastique horizontal d'une distance  $d = 2 \text{ cm}$ , à partir de sa position de repos et on l'abandonne à lui-même sans vitesse.

1°) En supposant que le mouvement du solide (S) sur le plan s'effectue sans frottement, déterminer la nature des oscillations du pendule.

2°) Sachant que la masse du solide (S) est  $m = 360 \text{ g}$  et que la période des oscillations vaut  $T_0 = 0.60 \text{ s}$ , calculer la raideur du ressort.

3°) Calculer la valeur maximale de la vitesse du solide au passage par sa position de repos.

**8** La courbe de la figure ci-dessous représente l'enregistrement de l'élongation  $x$  du centre d'inertie G du solide (S) d'un oscillateur mécanique pour trois valeurs de l'amortissement.



1°) Parmi les trois enregistrements, indiquer celui (ou ceux) qui correspond(ent) à :

- \* des oscillations pseudopériodiques ;
- \* un régime apériodique.

2°) Dans la pratique, comment obtient-on un régime apériodique à partir d'un régime pseudopériodique ?

3°) Parmi les cas de régime apériodique, le régime critique correspond au retour le moins lent à l'état de repos. Identifier la courbe correspondante.

**9** Un ressort à spires non jointives, de longueur à vide  $l_0 = 10 \text{ cm}$ , peut être allongé ou raccourci au maximum de  $8,5 \text{ cm}$ .

1°) Le ressort étant vertical, on lui attache un solide de masse  $m = 0,1 \text{ kg}$ , sa longueur devient  $l = 15 \text{ cm}$ . Déterminer la raideur  $k$  du ressort.

2°) Le ressort attaché toujours au solide de masse  $m = 0,1 \text{ kg}$  est disposé sur un banc à coussin d'air horizontal. Déterminer la pulsation, la période et la fréquence des oscillations du pendule lorsqu'il est mis en mouvement.

3°) Le solide est écarté de sa position d'équilibre, l'abscisse de son centre d'inertie G est alors égale à  $x_0 = 5,5 \text{ cm}$ . Déterminer l'expression de l'élongation  $x$  du centre d'inertie G dans les cas suivants :

a-Le solide est abandonné sans vitesse initiale à l'instant  $t = 0$ .

b-Le solide est lâché sans vitesse initiale et passe pour la première fois par sa position d'équilibre à l'instant  $t = 0$ .

c-Le solide est lancé à l'instant  $t=0$  vers les élongations croissantes avec une vitesse initiale telle qu'il subit ensuite son raccourcissement maximal.

**10** Un solide de masse  $m = 292 \text{ g}$  et de centre d'inertie G peut coulisser sans frottements le long d'une tige horizontale. Il est attaché à un ressort horizontal de raideur  $k = 8\text{N.m}^{-1}$ . L'élongation  $x$  de G est repérée sur un axe Ox parallèle à la tige. L'origine O de cet axe correspond à la position du centre d'inertie G du solide lorsque le système est au repos.

1°) Etablir l'équation différentielle de mouvement du centre d'inertie G.

2°) Déterminer l'expression littérale de la période  $T_0$ . L'enregistrement de l'élongation en fonction du temps a permis de tracer le graphe de la figure 1.

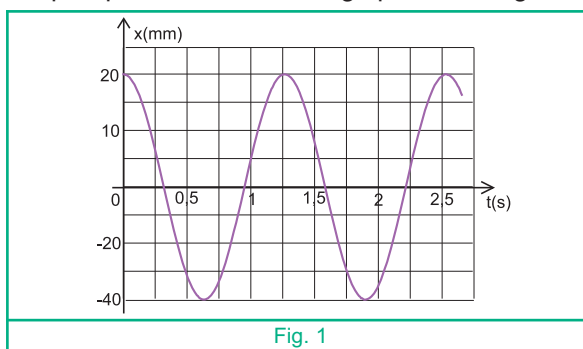


Fig. 1

a-Déterminer graphiquement les valeurs de  $X_m$  et  $T_0$  puis trouver  $\varphi$ .

b-Vérifier que la valeur de  $T_0$ , mesurée précédemment est en accord avec les valeurs numériques de  $m$  et  $k$ .

3°) Sur le graphe de la figure 2, on a représenté les couples  $(x ; a)$  où  $a$  est l'accélération du centre d'inertie G à un instant  $t$ .

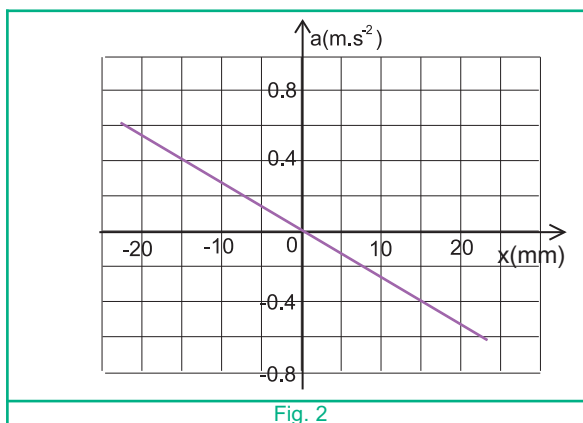


Fig. 2

a-Montrer que l'allure de ce graphe est en accord avec l'équation différentielle précédente

b-Déterminer l'expression littérale du coefficient directeur de la droite obtenue et montrer que cette valeur est en accord avec la valeur expérimentale.

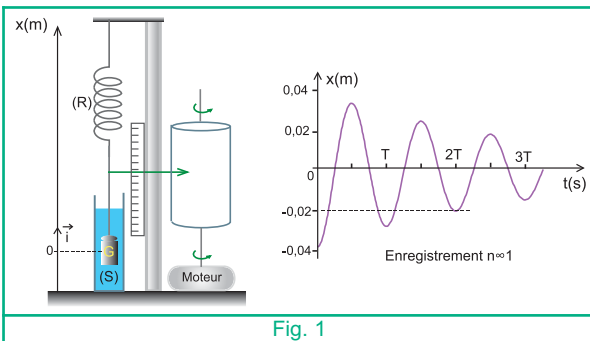
## 11

Le dispositif de la figure suivante comporte :

- un ressort (R), disposé verticalement tel que son extrémité supérieure est fixe, de raideur  $k = 12 \text{ N.m}^{-1}$  et de masse négligeable.

- un récipient transparent contenant un liquide visqueux.

- un solide (S) de masse  $M = 0,304 \text{ kg}$  accroché à l'extrémité libre du ressort. Au cours de son mouvement, il baigne totalement dans le liquide et est soumis à des frottements de type visqueux équivalents à  $\vec{f} = -h\vec{v}$  où  $h$  est le coefficient de frottement caractéristique du liquide visqueux utilisé et  $\vec{v}$  la vitesse instantanée du centre d'inertie G du solide (S).



1°) Enregistrement n°1 : On utilise un liquide visqueux de coefficient de frottement  $h_a = 0,2 \text{ N.s.m}^{-1}$ . On agit sur le dispositif expérimental de sorte que G soit écarté de sa position d'équilibre O, origine du repère  $(O, \vec{i})$  d'axe  $x'x$ , de 4 cm vers le bas et libéré sans vitesse initiale à un instant  $t = 0$ . Un stylet est solidaire du ressort en A. Il enregistre, grâce à sa pointe qui appuie légèrement sur le cylindre enregistreur tournant à vitesse constante, le diagramme correspondant à l'enregistrement n°1 et traduisant les oscillations pseudopériodiques de G au cours du temps. L'intensité des frottements auxquels est soumis le solide (S) est telle que la valeur de sa pseudo période  $T$  peut être assimilée à celle de sa période propre  $T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ .

a-Calculer la valeur de la pseudopériode  $T$ .

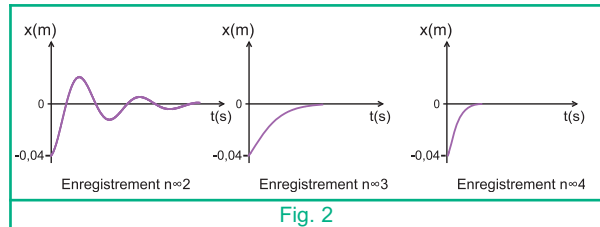
b-Déterminer la durée d'un tour du cylindre enregistreur, sachant que le diagramme associé à l'enregistrement n°1 correspond à un seul tour de ce cylindre.

2°) Enregistrement n°2, n°3 et n°4.

On dispose de trois liquides visqueux dont les coefficients de frottement sont :

$h_b = 1 \text{ N.s.m}^{-1}$ ;  $h_c = 4 \text{ N.s.m}^{-1}$  et  $h_d = 6 \text{ N.s.m}^{-1}$ .

Pour chaque liquide utilisé, un enregistrement est effectué dans les mêmes conditions que celles pour l'enregistrement n°1. On obtient les enregistrements n°2, 3 et 4 (Fig. 2).



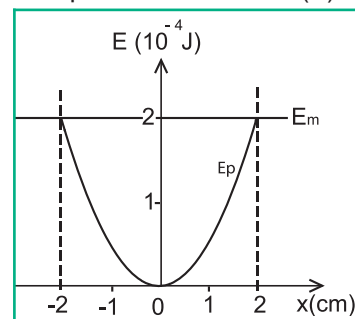
Reproduire le tableau suivant et le remplir en indiquant pour chaque enregistrement la valeur du coefficient de frottement associé au liquide utilisé et l'une des deux indications «pseudo périodique» ou «apériodique»

	$h$ (en $\text{N.s.m}^{-1}$ )	Nature des oscillations (pseudo périodique ou aperiodique)
Enregistrement n° 2		
Enregistrement n° 3		
Enregistrement n° 4		

D'après Bac. juin 2004

## 12

Sur la figure ci-dessous on a représenté les variations des énergies potentielle élastique et mécanique d'un pendule élastique horizontal en fonction de l'élongation  $x$  du centre d'inertie du solide (S). On désigne par  $k$  la raideur du ressort et par  $m$  la masse de (S).



1°) Comment varie l'énergie mécanique au cours du temps. Donner sa valeur. Déduire si les oscillations libres de ce pendule sont amorties ou non amorties.

2°) Dans quel domaine d'élongation  $x$  évolue le mobile ?

3°) Justifier la forme de la courbe représentant l'énergie potentielle élastique de l'oscillateur.

## 13

## Etude de texte

## Le tsunami

Le tsunami est une catastrophe naturelle qui peut être meurtrière et destructrice comme celle qui a suivi le séisme de Sumatra (Indonésie) du 26 décembre 2004. Dès lors, le terme "tsunami" est passé dans la langue courante des différents peuples du monde. Le tsunami est provoqué par un déplacement rapide d'un grand volume d'eau d'océan ou de mer. Ce mouvement est en général dû à un séisme, à une éruption volcanique sous-marine de type explosive ou bien à un glissement de terrain sous-marin de grande ampleur. Un impact météoritique peut aussi en être la cause, de même qu'une explosion atomique sous-marine.

Tous ces phénomènes entraînent des oscillations de la Terre avec une fréquence pouvant atteindre 3 mHz et qui ne dépend que de sa structure interne ; les oscillations les plus graves sont celles de fréquence comprise entre 0,3 mHz et 3 mHz. En fait, il peut en résulter une élévation ou un abaissement brutal du niveau de la surface d'eau océanique.

En plein océan (ou en pleine mer), le tsunami provoque l'oscillation de quantités d'eau énormes tant en surface qu'en profondeur (les particules d'eau sont animées d'oscillations horizontales dans la direction de propagation du tsunami) avec des périodes variant entre 10 min (profondeur de 1 km d'eau) et plus de 60 min (profondeur de 6 km d'eau au minimum).

Lorsque le tsunami s'approche des côtes, sa période diminue tandis que son amplitude augmente. Lorsque l'amplitude du tsunami devient non négligeable par rapport à la profondeur de l'eau, une partie de la vitesse d'oscillation de l'eau se transforme en un mouvement (ou courant d'eau) horizontal global. Sur les côtes, c'est davantage ce courant d'eau horizontal et rapide (typiquement plusieurs dizaines de km/h) qui est la cause des dégâts que d'élévation du niveau de l'eau : ce n'est pas principalement la hauteur du tsunami qui en fait sa force destructrice mais la durée de l'élévation du niveau de l'eau et la quantité d'eau déplacée à son passage.

On peut voir le phénomène sous un autre angle: une vague classique, d'une période d'au plus une minute, n'élève pas le niveau de l'eau suffisamment longtemps pour que de grandes quantités d'eau déferlent profondément sur les côtes, tandis que le niveau des eaux s'élève au dessus de son niveau normal pendant 5 à 30 minutes lors du passage d'un tsunami.



## Questions

1°) Relever les trois types d'oscillations libres évoquées dans le texte.

2°) a- Qu'est-ce qui montre que les oscillations de la Terre provoquées par les séismes entre autres sont libres ?

b- Calculer les valeurs minimale et maximale des périodes de ces oscillations.

c- Quelle qualification donne-t-on à ces périodes d'oscillations libres de la Terre ?

3°) Qu'est-ce qui montre que le tsunami est un phénomène oscillatoire ?

4°) Justifier la durée d'élévation du niveau de l'eau de mer allant de 5 à 30 min lors du passage d'un tsunami.

# En savoir plus

## Les oscillations libres de la Terre

Comme tout corps élastique, la Terre peut vibrer librement à des fréquences bien déterminées par sa forme et sa constitution. Ces oscillations sont les modes normaux du corps, ou oscillations libres. Ce dernier qualificatif se justifie par le fait qu'après excitation de l'oscillation, celle-ci perdurera indéfiniment, si l'on fait abstraction des forces de frottement.

Pour exciter les modes normaux de la Terre (le mode le plus simple est le fondamental, tandis que les autres sont les harmoniques), il faut évidemment des sources formidables telles que les grands tremblements de Terre. En fait, si le séisme est suffisamment important, les oscillations libres de la Terre se produisent à des fréquences qui ne dépendent que de sa structure interne.

Les périodes des modes sismiques sont comprises entre quelques secondes et 54 min, tandis que leur amplitude peut atteindre le millimètre. Certains modes perdurent jusqu'à un mois après des séismes particulièrement violents. Par suite, leurs fréquences sont très basses : à la période de 20.5 minute par exemple, correspond une fréquence de 0.001 Hz. Pour se donner une meilleure idée des ordres de grandeur, comparons cette fréquence à celle du « Do 256 Hertz », qui occupe le centre du clavier d'un piano. Pour atteindre la fréquence de 0.001 Hertz, il faudrait descendre de 18 octaves (En musique, une octave est l'intervalle séparant deux sons dont les fréquences fondamentales sont en rapport de un à deux), alors que le clavier d'un piano n'en compte au total que 8. Prenons un autre exemple : dans le cas d'une corde de guitare, sa fréquence est d'autant plus basse qu'elle est longue (lorsque le guitariste obtient un son plus ou moins grave d'une corde en la pinçant en différents endroits, il ne fait rien d'autre que l'allonger ou la raccourcir). En supposant que l'on pourrait fabriquer et tendre une corde de guitare de 300 km de long, elle émettrait une fréquence aussi basse que 0,001 Hz !

L'harmonie d'un son provient d'une relation simple qui lie les fréquences harmoniques et fondamentales. Dans le cas d'un stylo qui tombe, le choc excite sa fréquence fondamentale, par exemple égale à 197 Hz, mais également des « harmoniques », de 211, 217, 219, 287, 311 Hertz... Il n'existe pas de relation simple entre harmoniques et fondamentale, c'est ce qui rend le son sec et désagréable. Cependant, pour le physicien, il s'agit toujours d'une somme de fondamentale et d'harmoniques. Si l'on pouvait entendre les sons qui correspondent aux modes sismiques, il s'agirait également d'un bruit non harmonieux, vu les relations complexes qui existent entre fondamentales et harmoniques.

Pour qu'il y ait des oscillations, il faut des forces de rappel qui tendent à ramener les particules à leur position d'équilibre. Dans le cas des modes sismiques, ces forces de rappel sont dues essentiellement à l'élasticité liée aux forces de cohésion moléculaire.

D'après **M. Van camp**

## Objectifs

- ◆ Distinguer, en régime mécanique forcé, entre l'excitateur et le résonateur.
- ◆ Distinguer en mécanique, entre les oscillations libres et les oscillations forcées.
- ◆ Mettre en évidence la résonance d'élongation d'un pendule élastique.
- ◆ Etablir l'expression de l'amplitude  $X_m$  des oscillations d'un pendule élastique en fonction de la fréquence  $N$  de l'excitateur.
- ◆ Etudier l'influence de l'amortissement sur la résonance d'élongation d'un pendule élastique.
- ◆ Établir l'expression du déphasage entre la force excitatrice  $F$  et l'élongation  $x$  du solide.
- ◆ Interpréter théoriquement le phénomène de résonance.
- ◆ Distinguer une résonance aiguë d'une résonance floue.
- ◆ Utiliser l'analogie formelle électrique - mécanique pour :
  - caractériser la résonance de charge dans un circuit RLC série,
  - caractériser la résonance de vitesse d'un pendule élastique,
  - exprimer la puissance mécanique moyenne d'un pendule élastique.

## Prérequis

### SAVOIR

- ◆ Exprimer la période propre des oscillations libres d'un pendule élastique en fonction de ses grandeurs caractéristiques.
- ◆ Ecrire l'équation différentielle caractéristique des oscillations libres d'un pendule élastique amorti ou non amorti.
- ◆ Exprimer la puissance électrique moyenne absorbée par un oscillateur électrique.

### SAVOIR FAIRE

- ◆ Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à un solide en mouvement.
- ◆ Associer à une fonction sinusoïdale, un vecteur de Fresnel.
- ◆ Faire la construction de Fresnel.
- ◆ Faire l'analogie formelle entre un oscillateur mécanique amorti et un circuit RLC - série.



# OSCILLATIONS FORCÉES D'UN PENDULE ÉLASTIQUE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

# 6



*Les marées sont des oscillations périodiques. À quoi sont-elles dues et en quoi diffèrent-elles des tsunamis ?*



*Le violoniste fait vibrer les cordes de son instrument en les frottant avec l'archet pour produire un son avec des notes plus ou moins hautes.*



*Clarinettes "graves" offrant une musique très impressionnante*

- ◆ Pourquoi ces formes particulières des instruments de musique comme le violon, le violoncelle, le contre basse, la clarinette ... ?
- ◆ Dans certaines voitures, on entend parfois des bruits inconfortables de la carrosserie. A quoi sont-ils dus et pourquoi à des vitesses bien déterminées et non pas à d'autres ?
- ◆ Pourquoi a-t-on interdit à un régiment de soldats de traverser un pont (même non suspendu) au pas cadencé ?

# OSCILLATIONS FORCÉES D'UN PENDULE ÉLASTIQUE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Comme dans la nature, nombreux sont les domaines où les oscillations mécaniques sont importantes. Lorsqu'elles sont recherchées, il faut penser à les entretenir. En fait, pour éviter la diminution de leur amplitude due aux frottements inévitables, on doit leur apporter de l'énergie. Comme dans le cas des oscillations électriques, lorsque l'apport de l'énergie se produit périodiquement avec un dispositif approprié appelé excitateur, les oscillations mécaniques entretenues sont dites forcées.

## 1 PRODUCTION D'OSCILLATIONS FORCÉES

### Manipulation

On utilise le dispositif expérimental schématisé sur la figure 1. Il est constitué essentiellement d'un pendule élastique horizontal (système solide – ressort), d'un moteur (M) et d'un dispositif d'entraînement du pendule par le moteur. Le solide est un palet (S) de masse  $m = 100 \text{ g}$ , placé sur un banc à coussin d'air. Par un point A de l'un de ses bords latéraux, il est attaché à un ressort de raideur  $k = 6,5 \text{ N.m}^{-1}$ . Par l'intermédiaire d'un dispositif de guidage, le ressort est relié par son autre extrémité à un excentrique solidaire du moteur (M) de fréquence de rotation  $N$  réglable. De cette manière, lorsque le moteur est en marche, l'extrémité B du ressort est assujettie à se déplacer parallèlement au bord supérieur du banc à coussin d'air.

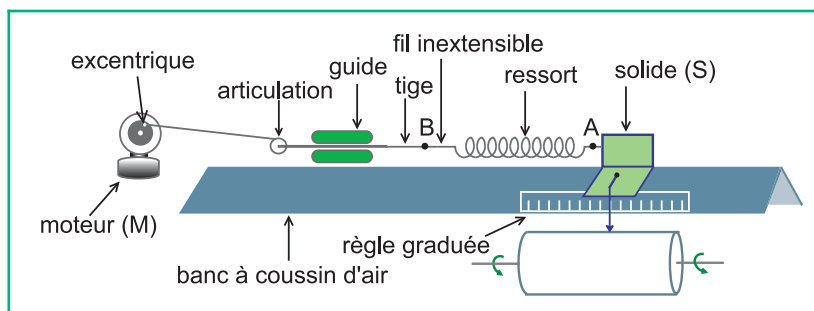


Fig.1 : Dispositif d'étude des oscillations forcées d'un pendule élastique horizontal

Un stylet fixé sur le solide (S) permet d'enregistrer l'évolution de l'élongation de son centre d'inertie G en fonction du temps, sur une feuille de papier enroulée sur un cylindre tournant à vitesse constante. En faisant tourner le moteur à la fréquence  $N = 1,5 \text{ tr.s}^{-1}$ , le palet (S) se met à osciller sur le banc de part et d'autre de sa position de repos. Une fois le régime permanent est établi, on réalise un enregistrement graphique qui donne la courbe de la figure 2.

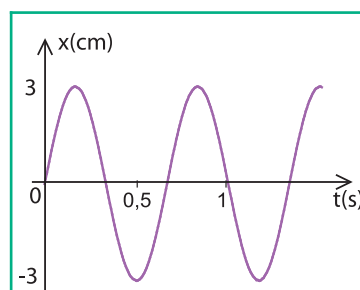


Fig.2 : Enregistrement graphique des oscillations

### Remarque

On peut réaliser une acquisition et un traitement informatique des mesures. A cette fin, on relie le solide (S) à un montage potentiométrique qui permet de mesurer la différence de potentiel entre le point M qui correspond à la position de (S) à un instant  $t$  et le point O qui correspond à la position de (S) au repos et qui sera prise comme origine des abscisses. La tension  $U_{OM}$  est proportionnelle à l'abscisse  $x$  du point M (Fig.3).

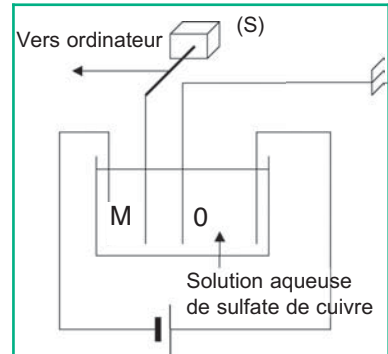


Fig.3 : Schéma du montage potentiométrique

### Questions

1°) Déterminer, graphiquement, la fréquence des oscillations du pendule élastique, la comparer à sa fréquence propre et à la fréquence de rotation du moteur. En déduire qu'il s'agit d'oscillations forcées.

2°) Déterminer l'expression de l'élongation  $x$  en fonction du temps.

### Interprétation

Au cours de son mouvement de rotation uniforme à la fréquence  $N$ , le moteur (M) entraîne l'extrémité B du ressort dans un mouvement rectiligne sinusoïdal suivant la direction horizontale du ressort à la fréquence  $N$ .

Ainsi l'élongation du centre d'inertie G s'écrit :  $x = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi)$ . On dit alors que le pendule élastique effectue des oscillations forcées imposées par le moteur qui joue le rôle d'excitateur.

### Conclusion

Etant soumis à des excitations périodiques, le pendule élastique effectue des oscillations forcées avec une période imposée par l'excitateur. L'oscillateur (pendule élastique) est appelé résonateur.

### Remarque :

La dénomination résonateur sera justifiée plus loin.

## 2 INFLUENCE DE LA FRÉQUENCE DE L'EXCITATEUR SUR L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

### Manipulation

On fait varier la fréquence de rotation du moteur et on mesure à chaque fois l'amplitude des oscillations du pendule élastique. Les résultats des mesures permettent de tracer la courbe de réponse  $X_m = f(N)$  de la figure 4.

### Questions

1°) Décrire la courbe de la figure 4 et en déduire l'influence de la fréquence  $N$  des excitations sur l'amplitude  $X_m$  des oscillations du pendule élastique.

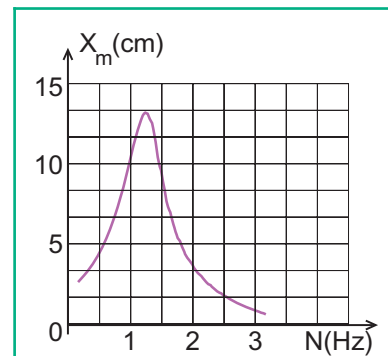


Fig.4 : Courbe  $X_m = f(N)$

- 2°) Relever la valeur de la fréquence  $N$  pour laquelle l'amplitude des oscillations est maximale et la comparer à la fréquence propre  $N_0$  du pendule élastique.
- 3°) La courbe de la figure 4 est appelée courbe de résonance d'élongation. Justifier cette qualification ainsi que la désignation du pendule élastique comme étant le résonateur.

### Conclusion

En régime sinusoïdal forcé, l'amplitude  $X_m$  des oscillations d'un pendule élastique dépend de la fréquence  $N$  des excitations. Elle atteint sa valeur la plus élevée à une fréquence  $N_r$  légèrement inférieure à la fréquence propre  $N_0$  du pendule : on dit qu'il y a résonance d'élongation.  $N_r$  est appelée fréquence de résonance.

## 3 INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT SUR L'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS

### Manipulation

#### Expérience 1

On reprend le dispositif expérimental de la figure 1. On augmente l'amortissement dû à la résistance de l'air en fixant sur le palet (S) une voile sous forme d'une plaque rectangulaire perpendiculaire à l'axe du banc à coussin d'air (Fig.5).

En effectuant, comme précédemment, une série de mesures de l'amplitude  $X_m$  des oscillations du résonateur pour différentes valeurs de la fréquence  $N$  de l'excitateur. Les résultats permettent de tracer la courbe de résonance 1 de la figure 6.

#### Expérience 2

En faisant de même avec une plaque un peu plus grande, on obtient la courbe 2 de la figure 6.

#### Expérience 3

En utilisant pour la voile une plaque de grandes dimensions, on obtient finalement la courbe 3 de la figure 6.

### Remarque

La manipulation précédente peut être réalisée avec un pendule élastique vertical, l'amortissement varie selon que le solide (S) oscille dans l'air ou dans un liquide avec ou sans rondelle (Fig.7).

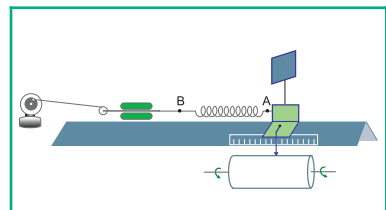


Fig.5 : Palet (S) avec voile

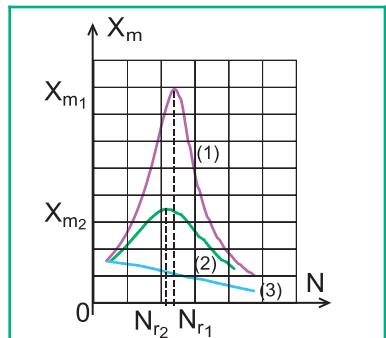


Fig.6 : Influence de l'amortissement sur l'amplitude

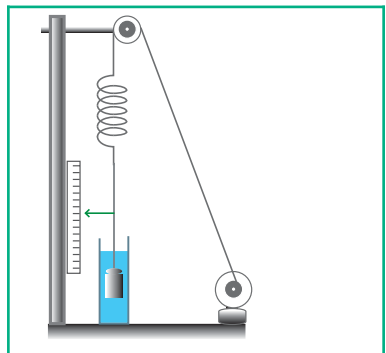


Fig.7 : Pendule élastique vertical

## Questions

- 1°) Comparer les fréquences  $N_{r_1}$  et  $N_{r_2}$  et les amplitudes  $X_{m_1}$  et  $X_{m_2}$  des oscillations à la résonance obtenue respectivement dans les expériences 1 et 2.
- 2°) En déduire l'influence de l'amortissement sur l'amplitude et la fréquence des oscillations à la résonance.
- 3°) La courbe 3 ne peut être appelée courbe de résonance. Elle traduit plutôt un régime forcé dit linéaire. Pourquoi ?

## Manipulation

En fixant sur le palet une voile de dimensions de plus en plus grandes, on augmente l'amortissement. Ce qui explique la diminution de l'amplitude  $X_m$  des oscillations à la résonance.

Lorsque l'amortissement est faible (absence de voile sur le palet), l'amplitude  $X_{m_0}$  à la résonance est très grande et diminue considérablement dès que la fréquence des excitations est légèrement différente de la fréquence de résonance, ce qui donne à la courbe de résonance de la figure 4 cette forme caractérisée par un pic étroit et très prononcé. Une telle résonance est dite **aiguë**.

Avec un amortissement moyen (avec une plaque de petites dimensions), l'amplitude  $X_{m_1}$  à la résonance est plus petite que  $X_{m_0}$  et sa diminution constatée avec l'écart de la fréquence  $N$  des excitations par rapport à la fréquence  $N_{r_1}$  de résonance est plutôt modérée, ce qui rend le pic de résonance moins étroit et moins prononcé (courbe 1 de la figure 6).

Pour un amortissement important (avec une plaque de dimensions moyennes comme celles de l'expérience 2), l'amplitude des oscillations devient moins sensible à la variation de la fréquence des excitations, ce qui explique l'obtention d'une courbe de résonance caractérisée par un pic peu remarquable (courbe 2 de la figure 6). La résonance est dite **floue**.

Pour un amortissement très important, le pendule répond toujours mais difficilement avec des oscillations de très petite amplitude pratiquement indépendante de la fréquence  $N$  des excitations, ce qui explique l'impossibilité d'obtenir dans ces conditions une résonance. C'est pour cette raison qu'un tel régime forcé est qualifié de régime **linéaire**.

## Conclusion

Pour une fréquence d'excitation donnée, l'amplitude des oscillations forcées d'un pendule élastique est d'autant plus petite que l'amortissement est plus important. Avec un faible amortissement la résonance est aiguë. Avec un amortissement important, la résonance est floue.

La fréquence de résonance  $N_r$  est inférieure à la fréquence propre  $N_0$  du pendule élastique. Cependant, l'écart entre ces fréquences est d'autant plus remarquable que l'amortissement est important.

## 4 ETUDE THÉORIQUE

On choisit comme repère galiléen, le repère  $(O, \vec{i})$  lié au laboratoire (fig.8),  $\vec{i}$  étant le vecteur unitaire de l'axe du ressort et la position de repos  $O$  du centre d'inertie  $G$  de  $(S)$  étant son origine.

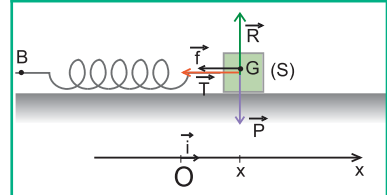


Fig.8 : Forces extérieures au palet (S)

### 4.1- NATURE DES OSCILLATIONS

Dans les expériences réalisées précédemment, le palet (S) est soumis aux forces extérieures suivantes (Fig.8) :

- son poids  $\vec{P}$  ;
- la réaction  $\vec{R}$  du coussin d'air.
- la tension  $\vec{T}$  du ressort.
- la force de frottement  $\vec{f}$  .

Dans tout ce qui suit, on supposera que les frottements sont de type visqueux. Donc, on peut écrire :  $\vec{f} = -h \vec{v}$ , où  $h$  est le coefficient de frottement et  $\vec{v}$  la vitesse du centre d'inertie  $G$  du palet (S). En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au palet (S), on peut écrire:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Comme  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  se compensent, on aura  $\vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$  :

Par projection sur  $(O, \vec{i})$ , on aura :  $T + f = ma$  .

On a  $T = -k(x - x_B)$ , où  $x_B$  est l'élongation de l'extrémité B du ressort et  $f = -h v$  .

On peut donc écrire:  $-k(x - x_B) - hv = ma$

En remplaçant  $v$  par  $\frac{dx}{dt}$  et  $a$  par  $\frac{d^2x}{dt^2}$  , il vient :  $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = kx_B$

Le second membre de cette équation a la même dimension qu'une force :  $F = kx_B$ .

Du fait que l'ensemble {tige de guidage – fil inextensible tendu} transmet intégralement le mouvement rectiligne sinusoïdal de l'extrémité E de l'excentrique à l'extrémité B du ressort.

De ce fait,  $x_B$  s'écrit :  $x_B = X_{Bm} \sin(\omega t + \varphi_B)$  avec  $\omega = 2\pi N$  où  $N$  est la fréquence de rotation du moteur. Avec le choix  $\varphi_B = 0$  ; on a :  $x_B = X_{Bm} \sin \omega t$  . Par suite :  $F = F_m \sin \omega t$  avec  $F_m = kX_{Bm}$  .

Ainsi tout se passe comme si le palet (S) est soumis directement à une force excitatrice  $\vec{F} = F \cdot \vec{i}$ . De ce fait, l'équation différentielle ci-dessus peut s'écrire sous la forme :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin \omega t \quad (1)$$

Une telle équation différentielle admet comme solution particulière :  $x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$  , ce qui explique les oscillations sinusoïdales de (S) en régime permanent à la fréquence  $N$  de l'excitateur.

### Conclusion

Etant régies par l'équation différentielle  $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin(\omega t)$ , les oscillations forcées d'un pendule élastique évoluent sinusoïdalement au cours du temps à la pulsation  $\omega$  de l'excitateur.

## 4.2- AMPLITUDE ET PHASE INITIALE DES OSCILLATIONS

Déterminons, à l'aide de la représentation de Fresnel, les expressions de l'amplitude de  $X_m$  et de la phase initiale  $\varphi$ , de la solution particulière  $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$ , de l'équation différentielle (1).

On a :  $x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$  ; d'où :  $v = \frac{dx}{dt} = X_m \omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$  et  $a = \frac{d^2x}{dt^2} = X_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi)$

En remplaçant  $x$ ,  $v$  et  $a$  par leur expression dans l'équation différentielle (1), on obtient l'équation (2) :

$$m\omega^2 X_m \sin(\omega t + \varphi + \pi) + h\omega X_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + kX_m \sin(\omega t + \varphi) = F_m \sin \omega t \quad (2)$$

Pour déterminer  $X_m$  et  $\varphi$ , à chacun des termes de l'équation (2) on associe un vecteur de Fresnel.

\* Au terme  $kX_m \sin(\omega t + \varphi)$ , on associe :  $\vec{OA}_1[kX_m, \varphi]$

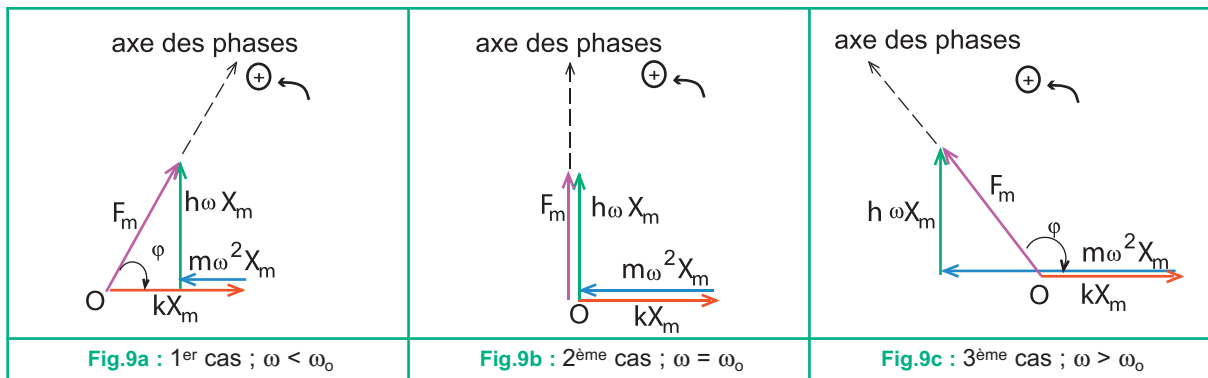
\* Au terme  $hX_m \omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$ , on associe :  $\vec{OA}_2[h\omega X_m, \varphi + \frac{\pi}{2}]$

\* Au terme  $m\omega^2 X_m \sin(\omega t + \varphi + \pi)$ , on associe :  $\vec{OA}_3[m\omega^2 X_m, \varphi + \pi]$

\* Au terme  $F_m \sin \omega t$ , on associe :  $\vec{OA}[F_m, 0]$

D'après l'équation (2), on a :  $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 = \vec{OA}$

Selon les valeurs de  $\omega$  et  $\omega_0$ , trois cas peuvent se présenter pour la construction de Fresnel (Fig.9a ; 9b et 9c).



On remarque que dans les trois cas, on a :  $\varphi < 0$ .

Ainsi, l'élongation  $x$  est toujours en retard de phase par rapport à la force excitatrice.

Dans le premier cas,  $\omega < \omega_0$  ; on a :  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$  rad

Dans le deuxième cas,  $\omega = \omega_0$  ; on a :  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  rad

Dans le troisième cas,  $\omega > \omega_0$  ; on a :  $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$  rad

L'application du théorème de Pythagore dans le cas général donne :

$$F_m^2 = (k - m\omega^2)^2 X_m^2 + h^2 \omega^2 X_m^2, \text{ d'où : } X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} \quad (3).$$

Pour  $h = 0$ , l'expression (3) donne :

$$F_m^2 = (k - m\omega^2)^2 X_m^2$$

**Remarque :**

le déphasage  $\varphi$  entre l'élongation  $x(t)$  et la force excitatrice  $F(t)$  peut être caractérisé par:

$$\cos \varphi = \frac{k - m\omega^2}{F_m}$$

### Conclusion

En régime sinusoïdal forcé, un pendule élastique oscille toujours en retard de phase par

rapport à la force excitatrice, avec une amplitude :  $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$

### 4.3- RÉSONANCE D'ÉLONGATION

L'amplitude  $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$  dépend de la pulsation  $\omega$  et par suite de la fréquence

$N$  de l'excitateur. Elle atteint sa valeur la plus élevée lorsque le dénominateur

$\left[ h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$  est minimal, c'est-à-dire lorsque sa dérivée par rapport à  $\omega$  s'annule,

soit :  $2h^2\omega - 4(k - m\omega^2)m\omega = 0$ . Comme  $\omega \neq 0$ , cela entraîne :  $h^2 = 2m(k - m\omega^2)$ .

D'où :  $\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2} = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$ . Or,  $\omega = 2\pi N$ . Alors,  $N^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2} = N_r^2$ .

Ainsi, on montre que le phénomène de résonance se manifeste à une fréquence  $N_r$  de l'excitateur légèrement inférieure à la fréquence propre  $N_0$  du résonateur. A cause du terme dû au coefficient de frottement non nul  $h$ , l'écart  $(N_0 - N_r)$  augmente avec celui-ci. D'autre part, l'amortissement influe sur l'amplitude des oscillations. Plus  $h$  est grand, plus la valeur de  $X_m$  est petite.



**Question**

Montrer que la résonance d'élongation devient impossible pour les valeurs de  $h$  supérieures à une valeur limite

$$h_0 = m\omega_0\sqrt{2}?$$

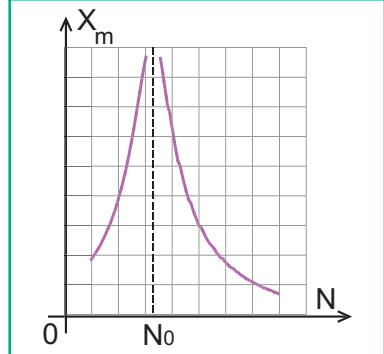


Fig.10 : Courbe de réponse du résonateur dans le cas idéal ( $h = 0$ )

**Remarque**

Dans le cas idéal où  $h = 0$ , la résonance aura lieu pour  $\omega = \omega_0$  avec une amplitude  $X_m$  qui tend vers l'infini (Fig.10)

## 5 RÉSONANCE DE VITESSE ET RÉSONANCE DE CHARGE

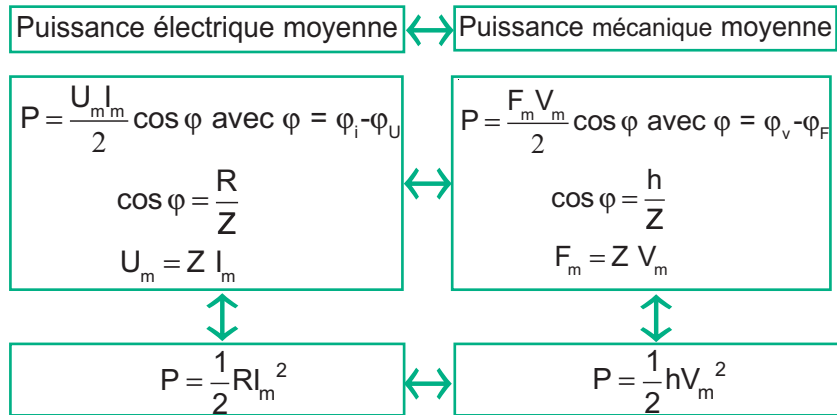
Dans ce paragraphe, il n'y a pas lieu de faire une étude systématique de la résonance de vitesse en mécanique ou de la résonance de charge en électrocinétique, mais il s'agit de les dégager par recours à l'analogie formelle électrique-mécanique faite à la fin du chapitre précédent tout en lui ajoutant l'analogie entre la tension excitatrice  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$  et la valeur algébrique de la force excitatrice  $F = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$ .

Le tableau suivant rassemble les principaux résultats :

Oscillateur électrique	Oscillateur mécanique
$I_m = \frac{U_m}{Z}, \text{ où } Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ <p style="text-align: center;"><math>Z</math> : impédance électrique</p> $\text{tg } \Delta\varphi = \frac{\frac{1}{C\omega} - L\omega}{R} \text{ avec } \Delta\varphi = (\varphi_i - \varphi_u)$	$V_m = \frac{F_m}{Z}, \text{ où } Z = \sqrt{h^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}$ <p style="text-align: center;"><math>Z</math> : impédance mécanique</p> $\text{tg } \Delta\varphi = \frac{\frac{k}{\omega} - m\omega}{h} \text{ avec } \Delta\varphi = (\varphi_v - \varphi_F)$
Résonance d'intensité $I_m = \frac{U_m}{R} \text{ à } N = N_0$	Résonance de vitesse $V_m = \frac{F_m}{h} \text{ à } N = N_0$
$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2\omega^2 + (\frac{1}{C} - L\omega^2)^2}}$ $\text{tg } \Delta\varphi = \frac{R\omega}{(L\omega^2 - \frac{1}{C})} \text{ avec } \Delta\varphi = (\varphi_q - \varphi_u)$	$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$ $\text{tg } \Delta\varphi = \frac{h\omega}{(m\omega^2 - k)} \text{ avec } \Delta\varphi = (\varphi_x - \varphi_F)$
Résonance de charge $\text{à } N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{R^2}{8\pi^2 L^2}}$	Résonance de charge $\text{à } N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$

## 6 PUISSANCE MÉCANIQUE

En régime sinusoïdal forcé, le pendule élastique oscille sans diminution d'amplitude grâce à l'énergie qui lui est transférée périodiquement par l'excitateur. La puissance mécanique moyenne  $P$  de l'oscillateur peut être exprimée par recours à l'analogie formelle électrique mécanique.



## 7 IMPORTANCE DES OSCILLATIONS MÉCANIQUES FORCÉES ET DE LA RÉSONANCE

Les oscillations mécaniques forcées ainsi que le phénomène de résonance sont très importants tant dans la nature que dans les différents domaines de la vie (en acoustique, en industrie...). Toutefois, elles sont parfois recherchées, surtout à la résonance comme en acoustique ; par contre, dans d'autres cas elles sont à éviter parce qu'elles sont gênantes ou même dangereuses.

### 1- DANS LA NATURE : PHÉNOMÈNE DES MARÉES

Dans certaines baies, il se produit régulièrement au cours de l'année le phénomène naturel des marées qui consiste en des oscillations forcées de grandes quantités d'eau d'océans, les excitateurs sont la lune et le soleil.

Ayant, dans une baie, une période propre proche de la période des marées (de l'ordre de 12 heures), l'eau entre en résonance. Ainsi, à l'entrée d'une baie, on peut observer des marées hautes de dix mètres et même plus, alors qu'en haute mer l'amplitude n'est que de l'ordre 30 cm. L'énergie des marées peut être mise à profit pour faire fonctionner les turbines d'une centrale marémotrice.



Fig.11 : Exemple de marée

### 2- EN ACOUSTIQUE

En musique, les caisses des instruments à cordes ainsi que l'air qu'elles contiennent, entrent en résonance sous l'action des vibrations des cordes, ce qui permet de renforcer les notes produites. La caisse de résonance et l'air qu'elle contient constituent un oscillateur mécanique de période propre dépendant de la forme de la caisse.

La membrane d'un haut-parleur forme le système oscillant qui engendre les vibrations sonores. Elle doit vibrer avec une amplitude importante dans un domaine de fréquences audibles particulier. Ces vibrations forcées doivent correspondre à une résonance «floue», si non, selon leur fréquence, certains sons seraient amplifiés beaucoup plus que d'autres.

### 3- EN INDUSTRIE : OSCILLATIONS FORCÉES DUES AUX TRÉPIDATIONS DU ROTOR D'UNE MACHINE TOURNANTE

Dans le cas où la partie tournante d'une machine n'est pas parfaitement équilibrée, elle joue par ses trépidations, le rôle d'excitateur pour les autres parties de la machine susceptibles de vibrer. Lorsque la fréquence de rotation de la machine avoisine la fréquence propre de l'une ou de l'autre de ses parties, l'amplitude des oscillations que prend cette machine peut devenir tellement importante que de dangereuses ruptures se produisent. Ceci explique les vibrations inconfortables ou bruyantes qu'on observe parfois dans une voiture pour certains régimes de rotation du moteur, leur amplitude est d'autant plus grande que les pièces de la carrosserie mises en cause sont plus desserrées, puisque leur amortissement devient plus faible.

C'est aussi l'une des raisons pour lesquelles on équilibre les roues des véhicules en plaçant une masselotte de plomb sur la jante de la roue.

Les paniers à linge des machines à laver sont suspendus à des amortisseurs qui évitent aux châssis une excitation à ses fréquences propres lorsque le panier est en rotation.

Pour les mêmes raisons, les machines outils sont souvent munies de supports amortisseurs.

#### EXEMPLE D'ILLUSTRATION

Pour illustrer les effets de trépidation, on peut utiliser l'exemple du gyroscope (Fig.12). Cet appareil est constitué essentiellement d'un stator et d'un rotor. La partie fixe (stator) est un bâti portant une série de lamelles d'acier d'inégales longueurs, donc de différentes périodes propres. La partie tournante (rotor) est un disque métallique mobile autour d'un axe fixe passant par son centre et perpendiculaire à son plan.

Un petit trou percé au voisinage du pourtour du disque fait que son centre d'inertie n'est pas situé exactement sur l'axe de rotation et provoque de légères trépidations au cours de sa rotation. Les oscillations sont transmises aux lamelles. Le disque est mis en rotation à l'aide d'une ficelle initialement enroulée sur son axe. A cause des frottements, le disque tourne de moins en moins vite. Lorsque la fréquence des trépidations avoisine la fréquence propre de l'une des lamelles, celle-ci entre en résonance. On voit donc les lamelles entrer en résonance, une à une, sachant que c'est la plus courte qui commence la première vu que sa fréquence propre est la plus grande.



Fig.12 : Gyroscope à lames

### 4- DANS LES OUVRAGES

Lors d'intempéries, les ponts suspendus peuvent être considérés comme des résonateurs. Si la fréquence des tourbillons due à une tornade est voisine de la fréquence propre des oscillations du pont, il y aura une résonance susceptible d'engendrer de très fortes amplitudes, d'où les effets "spectaculaires" menant parfois à la rupture du pont. Pour plus de détails, il est recommandé de lire la rubrique "en savoir plus".

# L'essentiel

- En régime forcé, le dispositif d'entretien des oscillations d'un pendule élastique constitue l'excitateur tandis que le pendule constitue le résonateur.
- La fréquence des oscillations forcées d'un pendule élastique est égale à celle de l'excitateur.
- En présence de frottements visqueux, les oscillations sinusoïdales forcées d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F$$

avec  $F = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$ , valeur algébrique de la force excitatrice.

- En régime sinusoïdal forcé, le résonateur oscille en retard de phase par rapport à l'excitateur avec une amplitude  $X_m$  qui dépend de la fréquence  $N$  de l'excitateur :

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{4h^2\pi^2N^2 + (k - 4m\pi^2N^2)^2}}$$

- En régime sinusoïdal forcé, la résonance d'élongation se produit à la fréquence :

$$N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2m^2}}$$

- La résonance est d'autant plus aiguë que l'amortissement est plus faible.
- Dans le cas d'un amortissement important, la résonance est floue. Lorsque  $h$  dépasse la valeur limite  $h_0 = m\omega_0\sqrt{2}$ , la résonance devient impossible.
- En régime sinusoïdal forcé, la puissance mécanique moyenne de l'oscillateur est donnée

par la relation :

$$P = \frac{1}{2} h v_m^2$$

# Exercices

## Exercice résolu 1

### ÉNONCÉ

L'extrémité B d'un ressort de raideur  $k = 40 \text{ N.m}^{-1}$  est reliée indirectement à un excentrique fixé à un moteur. La deuxième extrémité A du ressort est attachée à un palet (S) de masse  $m = 100 \text{ g}$ . Sur (S) est fixée une plaque rectangulaire comme l'indique la figure ci-contre.

Le système {palet-ressort} se déplace sur un banc à coussin d'air horizontal.

Lorsque le moteur tourne à une fréquence  $N$ , le palet (S) effectue des oscillations de part et d'autre de sa position de repos.

Un stylet fixé sur le palet permet d'enregistrer la position du centre d'inertie G de (S) au cours du temps.

On obtient la courbe  $x(t)$  ci-contre,  $x$  étant l'abscisse du centre d'inertie G du palet (S) dans un repère galiléen  $(O, \vec{i})$  horizontal. Le point O correspond à la position de G lorsque le palet est au repos.

1°) a- Préciser le rôle joué par le moteur muni de l'excentrique et celui joué par le système {palet – ressort}?

b- Déterminer la fréquence et l'amplitude  $X_m$  des oscillations du palet (S).

c- Ecrire l'expression de  $x(t)$ .

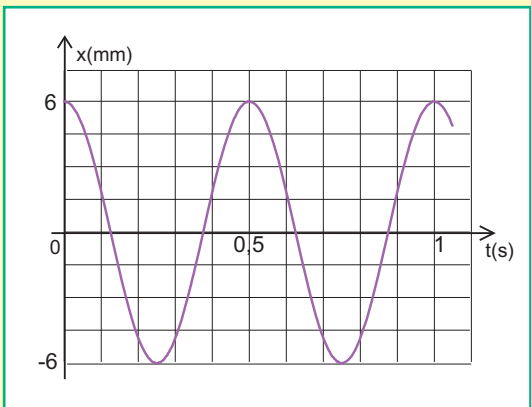
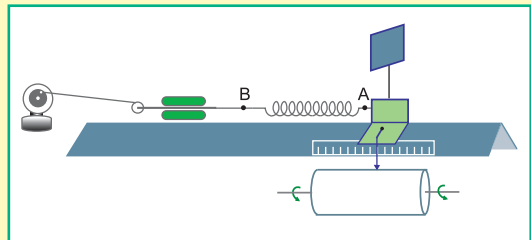
2°) On modifie la fréquence  $N$  de rotation du moteur et on note à chaque fois l'amplitude  $X_m$  des oscillations du palet (S). Les résultats des mesures sont rassemblés dans le tableau suivant :

<b>N (Hz)</b>	1.5	2,0	2.5	2.8	3.1	3.2	3.3	3.6	4,0	4.5
<b><math>X_m</math> (mm)</b>	4	6	10	15	21	23	20	15	10	7

a- Tracer le graphe  $X_m = f(N)$  traduisant la variation de l'amplitude  $X_m$  des oscillations en fonction de la fréquence  $N$ .

b- Déterminer la fréquence  $N_r$  des oscillations à la résonance et la comparer à la fréquence propre  $N_0$  des oscillations libres du pendule élastique.

c- Comment la courbe  $X_m = f(N)$  serait modifiée si on remplace la plaque par une autre de surface plus grande?



**SOLUTION**

1°) a- Le moteur muni de l'excentrique joue le rôle de l'excitateur. Le système {palet - ressort} joue le rôle de résonateur.

b- D'après l'enregistrement  $x(t)$ , la période des oscillations est  $T = 0.5$  s donc la fréquence vaut 2 Hz. L'amplitude des oscillations est  $X_m = 6$  mm.

$$c- x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$$

à  $t = 0$  ;  $x = X_m \sin \varphi_x = X_m$ , d'où :  $\sin \varphi_x = 1$  et  $\varphi_x = \frac{\pi}{2}$  rad  
 $\omega = 2\pi N = 4\pi \text{ rad.s}^{-1}$ . Finalement :

$$x(t) = 6 \cdot 10^{-3} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

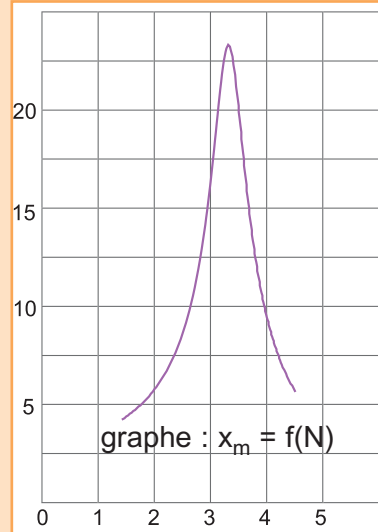
2°) a- Voir graphe:  $X_m = f(N)$

$$b- N_r = 3.15 \text{ Hz.}$$

$$N_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ soit numériquement : } N_0 = 3.18 \text{ Hz.}$$

On remarque que  $N_r$  est légèrement inférieure à  $N_0$ .

c- Lorsqu'on remplace la plaque fixée sur le palet par une autre de surface plus grande, l'amortissement augmente,  $X_m$  est moins important à la résonance. La courbe présentera un pic moins prononcé ; la résonance est moins auguë.



## Exercice résolu 2

**ÉNONCÉ**

Une voiture roule sur une piste saharienne, avec une vitesse constante. Elle rencontre des bosses régulièrement espacées d'une distance  $d = 20$  m les unes des autres. La masse totale de la voiture et de son conducteur est  $m = 1000$  kg.

1°) Sachant que la voiture est assimilable à un système { solide ; ressort } oscillant verticalement, montrer que le conducteur doit éviter de rouler à une vitesse critique  $v_c$ . Calculer  $v_c$  sachant que la raideur du ressort vaut  $k = 4 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}$ .

2°) Expliquer le rôle des amortisseurs de la voiture.

**SOLUTION**

1°) La série de bosses régulièrement espacées impose à la voiture des oscillations forcées de période  $T$  égale à la durée séparant les passages de la voiture sur deux bosses

successives :  $T = \frac{d}{v}$ . L'ensemble (voiture ; amortisseurs) se comporte comme un oscillateur

mécanique de période propre :  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ . La résonance a lieu lorsque  $T = T_0$ , ce qui est

obtenu pour une certaine vitesse  $v = v_c$ . On aura alors :  $\frac{d}{v_c} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  d'où :  $v_c = \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

Soit, numériquement  $v_c = 20,14 \text{ m.s}^{-1}$  ou  $v_c = 72,5 \text{ km.h}^{-1}$ .

2°) Les amortisseurs absorbent une partie de l'énergie des oscillations. L'amplitude des secousses provoquées par la succession des bosses est ainsi diminuée, ce qui entraîne une meilleure tenue de route et donc plus de sécurité.

# Exercices à résoudre

## Tests rapides des acquis

### 1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

- 1°) Pour un pendule élastique en régime sinusoïdal forcé, le ressort constitue l'excitateur tandis que le solide (S) qui lui est attaché est le résonateur.
- 2°) La période des oscillations forcées d'un pendule élastique est imposée par l'excitateur.
- 3°) En régime sinusoïdal forcé, le pendule élastique peut osciller avec sa période propre.
- 4°) La résonance d'élongation a lieu à chaque fois que la fréquence de l'excitateur est égale à la fréquence propre du résonateur.
- 5°) Pour un pendule élastique en régime sinusoïdal forcé, l'élongation  $x$  du centre d'inertie du solide (S) évolue toujours en retard de phase par rapport à la valeur algébrique  $F$  de la force excitatrice.
- 6°) L'élongation du centre d'inertie d'un pendule élastique n'est maximale qu'à la résonance.
- 7°) A la résonance d'élongation, l'amplitude  $X_m$  des oscillations d'un pendule élastique augmente avec l'amortissement.
- 8°) Lorsque l'amortissement est faible, la courbe de résonance est caractérisée par un pic très large.

### 2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la (ou les) proposition(s) juste(s).

- 1°) En régime sinusoïdal forcé, l'élongation du résonateur est :
- a-toujours en retard de phase par rapport à sa vitesse ;
  - b-toujours en retard de phase par rapport à la force excitatrice ;
  - c-alternativement en avance de phase et en retard de phase par rapport à la force excitatrice.
- 2°) A la résonance, l'amplitude  $X_m$  des oscillations d'un pendule élastique est :
- a-maximale seulement en valeur absolue ;
  - b-la plus élevée ;
  - c-indépendante de l'amortissement.
- 3°) A la résonance d'élongation, la période d'un pendule élastique :
- a-n'est pas égale à celle de l'excitateur ;
  - b-ne dépend que de la période propre de l'oscillateur ;
  - c- dépend du coefficient de frottement.
- 4°) L'amplitude  $X_m$  des oscillations forcées d'un pendule élastique est :
- a-d'autant plus grande que l'amortissement est plus important ;
  - b-d'autant plus grande que la valeur de la fréquence de l'excitateur est plus proche de la valeur de sa fréquence propre ;
  - c-d'autant plus petite que sa masse est plus grande.
- 5°) Pour un pendule élastique en régime sinusoïdal forcé, la résonance d'élongation :
- a-n'est possible que lorsque sa période propre est très petite ;
  - b-peut être obtenue avec n'importe quelle valeur du coefficient de frottement ;
  - c-est d'autant plus aiguë que l'amortissement est plus faible.
- 6°) D'après l'analogie électrique mécanique :
- a-comme on définit l'impédance électrique, on peut définir l'impédance mécanique ;
  - b-comme il y a la résonance d'intensité de courant électrique, il y a une résonance d'élongation mécanique ;
  - c-la puissance mécanique moyenne est constante à la résonance d'élongation.

## Exercices d'application

**3** L'une des extrémités d'un ressort de masse négligeable et de raideur  $k = 50 \text{ N.m}^{-1}$  est attachée à un solide (S) de masse  $m = 100 \text{ g}$ . L'ensemble est monté de manière à réaliser un pendule élastique horizontal. La deuxième extrémité du ressort est liée à un dispositif d'excitation qui permet de mettre le pendule en mouvement et de l'entretenir.

- 1°) Identifier l'excitateur et le résonateur.
- 2°) Calculer la période propre  $T_0$  des oscillations du pendule élastique.
- 3°) Que risque-t-il de se produire lorsque le dispositif d'excitation impose au pendule une fréquence d'oscillations proche de sa fréquence propre ? Pourquoi ?

**4** L'extrémité supérieure d'un ressort (R) est reliée à un excentrique solidaire d'un moteur effectuant  $N$  tours par seconde. L'extrémité inférieure de (R) est fixée à un solide (S) qui plonge dans un liquide visqueux.

On actionne le moteur, et on mesure pour chaque fréquence  $N$  de rotation, la valeur de l'amplitude  $X_m$  des oscillations. Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

N (Hz)	1.5	2.0	2.5	2.8	3.1	3.2	3.3	3.6	4.0	4.5
$X_m$ (cm)	0.4	0.6	1.0	1.5	2.1	2.3	2.0	1.5	1.0	0.7

- 1°) Tracer le graphe traduisant les variations de l'amplitude  $X_m$  en fonction de la fréquence  $N$ .
- 2°) Quel phénomène obtient-on à  $N = 3.2 \text{ Hz}$  ?
- 3°) En déduire la période des oscillations à la résonance.
- 4°) Quelle modification subirait le graphe précédent lorsqu'on fait osciller le solide (S) dans l'air ?

**5** Sur une piste saharienne, le vent produit sur le sable des bosses qui se succèdent régulièrement à une distance  $d = 60 \text{ cm}$ . Une voiture parcourt cette piste à la vitesse  $v$

constante. Le conducteur sait qu'il faut rouler ou très lentement ou avec une vitesse supérieure à une certaine valeur pour éviter les sensations désagréables et les détériorations du véhicule.

1°) Avec quelle période, la roue de la voiture passe-t-elle d'une bosse sur la suivante ? En déduire la fréquence de ce phénomène.

2°) L'action des bosses successives fait que la voiture soit en régime d'oscillations forcées.

a- Préciser l'excitateur et le résonateur.

b- L'oscillateur constitué par la roue, son ressort de suspension et son amortisseur est caractérisé par une fréquence propre  $N_0 = 5 \text{ Hz}$ . Montrer qu'il existe une valeur  $v_0$  de la vitesse pour laquelle l'oscillateur entre en résonance.

On admettra que la fréquence de résonance est la fréquence propre de l'oscillateur.

## Exercices de synthèse

**6** Un oscillateur mécanique comporte un solide (S), de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$ , attaché à l'une des extrémités d'un ressort (R) de raideur  $k$  et de masse négligeable. L'autre extrémité du ressort est fixe. L'ensemble {ressort, solide (S)} est disposé horizontalement. Le solide (S) est soumis à une force de frottement de type visqueux  $\vec{f} = -h\vec{v}$  où  $\vec{v}$  est le vecteur vitesse instantanée de  $G$  et  $h$  est une constante positive. A l'aide d'un dispositif approprié on applique sur (S) une force excitatrice

$$\vec{F}(t) = F_{\max} \sin(2\pi Nt + \varphi_F) \vec{i}$$

On désigne par  $x(t)$  l'élongation du centre d'inertie  $G$  en fonction du temps par rapport au repère  $(O, \vec{i})$ ,  $O$  étant la position d'équilibre de  $G$ .

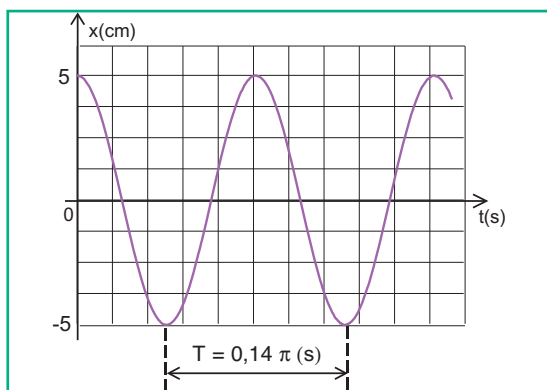


1°) Montrer que l'élongation  $x$ , sa dérivée

première  $\frac{dx}{dt}$  et sa dérivée seconde  $\frac{d^2x}{dt^2}$

vérifient la relation :  $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$

2°) Le dispositif d'enregistrement des oscillations de (S) est constitué d'un cylindre enregistreur sur lequel est enroulé un papier millimétré et d'un stylet marqueur, solidaire du solide (S), et affleurant le papier millimétré. Dans le cas de l'expérience étudiée, ce dispositif permet d'obtenir le diagramme suivant et qui correspond aux variations de l'élongation  $x(t)$  en accord avec l'équation :  $x(t) = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x)$ .



a-Sachant que les deux oscillations présentées sur le diagramme de la figure ci-contre correspondent à un tour complet du cylindre enregistreur, en déduire le nombre de tours par minute effectués par ce cylindre. Déterminer, à partir de ce diagramme :

les valeurs de  $X_{\max}$ ,  $N$  et  $\varphi_x$ .

b-Sachant que  $m = 98 \text{ g}$  et  $k = 20 \text{ N.m}^{-1}$ , montrer que (S) effectue des oscillations mécaniques forcées correspondant à une résonance de vitesse.

c-En déduire qu'à tout instant  $t$ ,  $x(t)$  vérifie

la relation suivante :  $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ .

d-Déterminer les valeurs de  $F_{\max}$ ,  $\varphi_F$  et la puissance mécanique moyenne absorbée par l'oscillateur. On donne  $h = 1.8 \text{ kg.s}^{-1}$ .

**7** Relié à l'une des extrémités d'un ressort, un solide(S) de masse  $m = 51\text{g}$  oscille sur un banc à coussin d'air horizontal. La deuxième extrémité du ressort est animée d'un mouvement sinusoïdal de translation, grâce à un système de transmission relié à un disque mis en rotation par un moteur de fréquence  $N$  réglable.

On fait tourner le moteur à raison de 1,25 tours par seconde, l'amplitude des oscillations du solide (S) est maximale et vaut 4,8 cm .

1°) Proposer un montage correspondant à la description précédente et permettant d'enregistrer le mouvement du solide (S).

2°) Préciser, dans le montage l'excitateur et le résonateur.

3°) a-Déterminer la période du mouvement du solide (S)

b-Déduire une valeur approchée de la raideur du ressort.

4°) On fixe au solide (S) une palette que l'on immerge dans l'eau. L'amplitude des oscillations devient 2,4 cm.

a-Interpréter cette diminution d'amplitude.

b-Dans quel sens évolue l'amplitude lorsqu'on remplace l'eau par de l'huile ?

5°) On fait varier la fréquence  $N$  du moteur. On constate que l'amplitude des oscillations prend une valeur maximale pour une fréquence particulière  $N_r$ .

a-De quel phénomène s'agit-il ?

b-La période et l'amplitude des oscillations dépendent-elles de la nature du liquide utilisé lorsque ce phénomène se produit ?

**8** Un oscillateur est constitué d'un pendule élastique {solide (S) de masse  $m$  relié à un ressort de raideur  $k$ } horizontal. Le pendule est excité à l'aide d'un moteur muni d'un excentrique, celui-ci produit une force périodique qui agit sur l'extrémité du ressort qui n'est pas reliée au solide (S).

1°) Quel type d'oscillations, le résonateur effectue-t-il ? Avec quelle période oscille-t-il ?

2°) Sachant que la période propre du pendule élastique vaut  $T_0 = 0,46$  s, quel phénomène aura-t-il lieu si la période de la force excitatrice devient voisine de 0,46 s ?

3°) On fait varier maintenant la fréquence  $N$  du moteur et on note l'amplitude  $X_m$  des oscillations du pendule. Les résultats des mesures sont rassemblés dans le tableau suivant :

N(Hz)	1.2	1.4	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.5	2.7	2.9
$X_m$ (cm)	1.6	2.2	4.8	5.7	6.4	6.8	6.5	5.6	4.2	3.2	2.7

a-Tracer sur une feuille de papier millimétrée la courbe traduisant l'évolution de l'amplitude  $X_m$  en fonction de la fréquence  $N$ .

b-Déterminer la fréquence de résonance  $N_r$  et la comparer à la fréquence propre  $N_0$  de l'oscillateur.

**9** Un solide (S) de masse  $m$  est accroché à l'extrémité d'un ressort de raideur  $k$  dont l'autre extrémité est fixe. L'ensemble est horizontal et (S) subit des actions de frottement visqueux équivalentes à une force  $\vec{f} = -h \vec{v}$  proportionnelle à la vitesse et de sens opposé ;  $h$  est constante. De plus (S) subit une force  $F$  dirigée suivant l'axe du ressort et dont la projection sur cet axe est  $F = F_m \sin \omega t$ .

1°) Etablir l'équation :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin \omega t$$

2°) En utilisant la construction de Fresnel obtenue par analogie avec celle qui correspond à un circuit RLC série, montrer

que  $Z = \frac{F_m}{V_m} = \sqrt{h^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}$ , où  $V_m$  est la

vitesse maximale de (S), et que le déphasage

entre  $F$  et  $v$  est donné par  $\text{tg} \varphi = \frac{(m\omega - \frac{k}{\omega})}{h}$ .

3°) En déduire l'expression de la vitesse  $v$  en fonction du temps  $t$ , de  $F_m$ , de  $Z$  et de  $\varphi$ .

4°) De l'expression précédente déduire celle de  $x(t)$ .

5°) En faisant varier  $\omega$ , mais en maintenant constante la valeur de  $F_m$ ,  $V_m$  varie. Déterminer la valeur de  $\omega$  pour laquelle  $V_m$  est maximale (résonance de vitesse). Quel est alors le déphasage entre la vitesse  $v$  et la force  $F$  ?

6°) L'amplitude des élongations varie également en fonction de  $\omega$ . Montrer qu'elle est maximale (résonance d'amplitude) quand la quantité  $Y = [m^2\omega^4 + (h^2 - 2mk)\omega^2 + k^2]$  est minimale. Déterminer la valeur  $\omega_r$  qui rend  $Y$  minimale. Vérifier que  $\omega_r < \omega_0$ . Montrer qu'il existe une valeur du coefficient de frottement telle qu'il n'existe plus de phénomène de résonance d'amplitude.

#### Etude de texte

**10** Dans le film «le salaire de la peur» de Henri-Georges Clouzot, les héros doivent transporter de la nitroglycérine (explosif puissant) dans un camion. La piste empruntée est constituée d'une succession régulière de rigoles creusées par le ruissellement de l'eau. Une piste de ce genre est appelée «tôle ondulée».

L'un des acteurs affirme à ses collègues qu'il faut rouler soit très lentement soit très vite pour éviter de faire exploser le chargement.

1°) Quel est le phénomène susceptible de se produire lorsqu'un véhicule roule sur ce type de piste ?

2°) Sachant que la masse du camion chargé est  $m = 10$  tonnes et que ses suspensions s'affaissent de 1,2 mm lorsqu'il porte une charge de 6,5 tonnes, calculer :

a-la raideur du ressort équivalent aux suspensions du camion.

b-la période et la fréquence des oscillations du camion.

3°) Le camion roule sur une tôle ondulée dont les bosses sont régulièrement espacées d'une distance  $d = 0,70$  m. Pour quelle vitesse de déplacement, le phénomène sera le plus perceptible ?

4°) L'affirmation de l'acteur est-elle justifiée ?

# En savoir plus

## Dangers de la résonance

Généralement en mécanique le phénomène de résonance est à éviter vu les effets néfastes qu'il peut engendrer. En effet la suspension d'une voiture peut être modélisée par un ressort vertical de raideur  $k$  sur lequel est posé un solide de masse  $m$ . L'ensemble constitue un oscillateur.

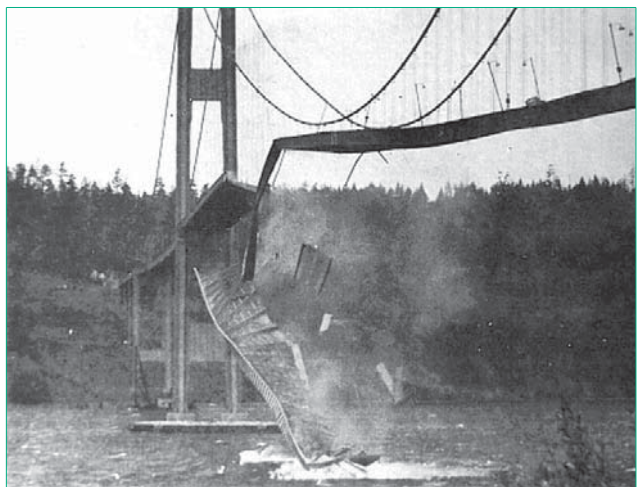
Il en est de même pour les constructions et bâtiments que le vent et les secousses sismiques peuvent mettre en oscillations avec des amplitudes importantes, risquant même leur destruction.

Un conducteur de voiture doit éviter de rouler à certaines vitesses lorsqu'il rencontre certains types d'irrégularités dans la chaussée ou sur une piste saharienne dans les rallyes par exemple, où le vent produit sur le sable des ondulations. Pour ces vitesses, le véhicule entre en résonance, l'amplitude de ses oscillations augmente fortement et cela peut engendrer des dangers ; les roues décollent de la route et perdent toute adhérence. Pour limiter cet effet désagréable et assurer plus de sécurité, on ajoute des amortisseurs, généralement à huile (à gaz sur les motos), qui permettent de diminuer l'amplitude du mouvement dans le cas où il y a résonance.

Le cas du Tacoma Narrow Bridge, situé à Puget Sound dans l'état de Washington aux U.S.A. est un exemple célèbre : en novembre 1940, cinq mois après son ouverture à la circulation, les rafales de vent périodiques, jouant le rôle d'excitateur, ont provoqué la résonance du pont qui s'est mis à vibrer et en quelques heures, les vibrations sont devenues si importantes que le pont s'est effondré.

De même, le 16 avril 1850, le tablier d'un pont suspendu sur la maine à Angers en France, se rompit au passage d'une troupe marchant au pas cadencé. A la suite de ces événements les ponts sont dessinés de manière à les rendre aérodynamiquement stables. Les tabliers des ponts actuels sont tous arrimés au sol par l'intermédiaire de vérins amortisseurs qui permettent de limiter le phénomène de résonance. Les bâtiments de grande hauteur, comme les tours et les gratte-ciel sont particulièrement sensibles aux vibrations provoquées par les bourrasques de vent, les turbulences et les secousses sismiques. Leur construction doit en tenir compte. Citons l'exemple de la conception et la réalisation de la tour Taipei 101 à Taiwan achevée en 2004, qui mesure 508 mètres de haut pour 101 étages.

Une boule en acier de 800 tonnes suspendue entre les 88<sup>ème</sup> et 92<sup>ème</sup> étages permet d'amortir les oscillations engendrées par les vents et les secousses sismiques.



Pont de Tacoma Narrow après sa rupture

## Objectifs

- ◆ Reconnaître le schéma d'un filtre électrique.
- ◆ Distinguer entre l'entrée et la sortie d'un filtre électrique.
- ◆ Représenter, sur le schéma d'un filtre, les grandeurs intensité et tension.
- ◆ Définir la fonction de transfert (ou la transmittance)  $T$  d'un filtre.
- ◆ Déterminer le gain d'un filtre électrique en décibel.
- ◆ Reconnaître la courbe de réponse d'un filtre :  $T = f(N)$  ou  $G = h(N)$ .
- ◆ Tracer la courbe de réponse d'un filtre électrique.
- ◆ Déterminer la (ou les) fréquence(s) de coupure d'un filtre électrique.
- ◆ Déterminer la bande passante à -3 dB d'un filtre électrique.

## Prérequis

SAVOIR	SAVOIR-FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Définir un quadripôle.</li> <li>◆ Caractériser une grandeur sinusoïdale par sa période, son amplitude et sa phase initiale.</li> <li>◆ Ecrire les relations entre la pulsation, la période et la fréquence d'une grandeur sinusoïdale.</li> <li>◆ Ecrire la relation entre la valeur maximale et la valeur efficace d'une tension sinusoïdale.</li> <li>◆ Définir l'impédance d'un dipôle.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Schématiser un quadripôle.</li> <li>◆ Visualiser, simultanément, deux tensions électriques à l'oscilloscope.</li> <li>◆ Déterminer, graphiquement, la période, l'amplitude et la phase initiale d'une grandeur électrique oscillante.</li> <li>◆ Appliquer la relation entre la valeur maximale et la valeur efficace d'une tension sinusoïdale.</li> </ul>

# LES FILTRES ELECTRIQUES

7



Dans une enceinte acoustique, les filtres électriques permettent d'appliquer sur chaque haut-parleur, de l'enceinte, la plage de fréquences qui lui correspond.

En acoustique, en télécommunication et en électronique d'une manière générale, les filtres électriques font partie des fonctions très fréquemment employées. Pour un signal complexe, on utilise des filtres pour extraire une partie de l'information et pour affaiblir ou éliminer une plage de fréquences indésirable liée à ce signal.

Qu'est-ce qu'un filtre électrique et qu'est ce qui lui confère toutes ses propriétés ?

# LES FILTRES ÉLECTRIQUES

Dans les techniques de transmission d'information telles que la téléphonie, la télégraphie, la télévision, la radio, le filtrage constitue une opération fondamentale, c'est une forme de traitement du signal. Elle consiste à extraire une partie de l'information liée à ce signal. Sans filtres, il ne serait pratiquement pas possible de transmettre l'information. Un poste de radio, par exemple, sans l'utilisation de filtres, ne parviendrait pas à capter une station désirée. C'est avec des filtres électriques qu'on peut sélectionner la bande de fréquences relative à cette station.

## 1 FILTRAGE

### 1.1- MANIPULATION

Avec un résistor de résistance  $R = 620 \Omega$  et un condensateur de capacité  $C = 1 \mu\text{F}$ , on réalise le quadripôle RC de la figure 1, dont les tensions d'entrée et de sortie sont respectivement  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$ .

Un générateur basse fréquence délivrant une tension sinusoïdale, d'amplitude  $U_{Em}$  et de fréquence  $N$  réglable, est branché à l'entrée du quadripôle RC.

L'entrée E et la sortie S du quadripôle sont reliées, respectivement, aux voies  $Y_1$  et  $Y_2$  d'un oscilloscope bicourbe.

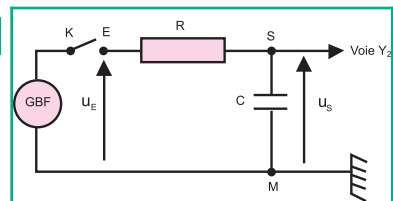


Fig.1 : Circuit RC excité par une tension sinusoïdale.

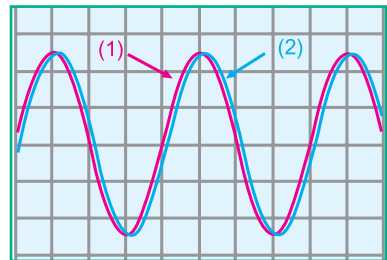


Fig.2a :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_1 = 50 \text{ Hz}$

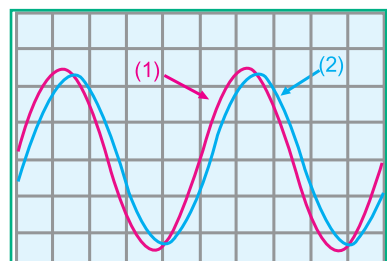


Fig.2b :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_2 = 100 \text{ Hz}$

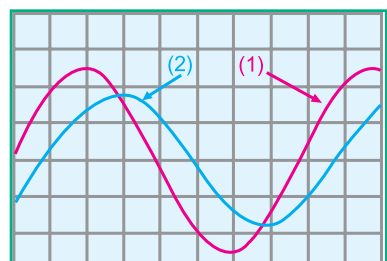


Fig.2c :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_3 = 257 \text{ Hz}$

### Expérience

#### ♦ Etape 1

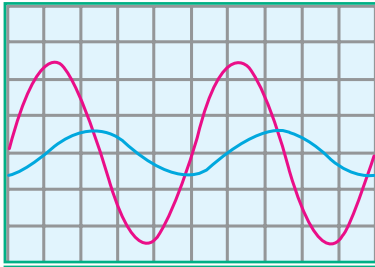
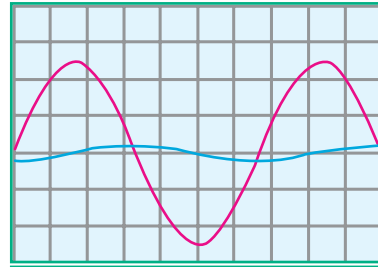
On règle l'amplitude  $U_{Em}$  de la tension d'entrée à 5 V, la fréquence  $N$  du GBF à 50 Hz et on ferme l'interrupteur  $K$ .

Sur l'écran d'un oscilloscope on obtient les chronogrammes 1 et 2 de la figure 2a, représentant, respectivement, les tensions instantanées  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$ .

#### ♦ Etape 2

On maintient le circuit fermé et on augmente progressivement la fréquence  $N$  de la tension d'entrée du quadripôle, tout en gardant la valeur de l'amplitude  $U_{Em}$  constante. Pour différentes valeurs de  $N$ , on obtient les oscillogrammes des figures : 2b, 2c, 2d et 2f.

Les sensibilités verticales des deux voies  $Y_1$  et  $Y_2$  de l'oscilloscope sont les mêmes.

Fig.2d :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_4 = 1$  kHzFig.2f :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_5 = 3$  kHz

### Questions

- 1°) Justifier, en se basant sur les figures 2a, 2b et 2c, que l'oscillogramme (1) correspond à la tension d'entrée  $u_E(t)$ .
- 2°) Comparer les valeurs des amplitudes  $U_{Sm}$  de la tension de sortie et  $U_{Em}$  de la tension d'entrée pour :
  - les faibles fréquences,
  - les fréquences élevées ( $N \geq 1$  kHz).
- 3°) Préciser l'effet de la fréquence  $N$ , de la tension d'entrée, sur l'amplitude  $U_{Sm}$  de la tension de sortie.
- 4°) La fréquence  $N$ , a-t-elle un effet sur le déphasage  $\Delta\varphi$  de  $u_E(t)$  par rapport à  $u_S(t)$ ?

## 1.2-INTERPRÉTATION

A l'entrée du quadripôle RC, on applique une tension sinusoïdale  $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt)$ , de fréquence  $N$  réglable. Une tension sinusoïdale  $u_S(t) = U_{Sm} \sin(2\pi Nt + \varphi_s)$ , de même fréquence  $N$ , est obtenue à la sortie. Pour les faibles fréquences, la valeur de l'amplitude  $U_{Sm}$  est comparable à celle de  $U_{Em}$  comme le montre les figures : 2a, 2b et 2c.

Pour les fréquences élevées, la valeur de  $U_{Sm}$  devient très atténuée d'une part et d'autre part on note une variation appréciable du déphasage  $\Delta\varphi$  entre les tensions  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$ , comme le montre la figure 2d.

En conclusion, l'amplitude et la phase initiale de la tension de sortie  $u_S(t)$  du quadripôle RC dépendent de la fréquence  $N$  de la tension (ou signal) d'entrée  $u_E(t)$ . Pour une plage de fréquences déterminée, la tension d'entrée  $u_E(t)$ , à travers le quadripôle RC, subit une modification qui peut consister en une atténuation. Cette opération est appelée filtrage. Le quadripôle RC, dans ce cas, est un filtre électrique. En effet, ce quadripôle transmet, sans atténuation, les tensions (signaux) de faibles fréquences et il atténue les tensions (signaux) de fréquences élevées.

### Définitions

- ♦ Selon la valeur de sa fréquence, un signal sinusoïdal appliqué à l'entrée d'un quadripôle donné peut subir une atténuation, ou une amplification de son amplitude à la sortie. Une telle opération est appelée filtrage et le quadripôle utilisé est un filtre électrique.
- ♦ On appelle filtre électrique, tout quadripôle qui ne transmet que les signaux électriques dont les fréquences sont comprises dans un domaine de fréquences déterminé.

### 1.3-SCHÉMA D'UN FILTRE ET GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES

Un filtre électrique est un exemple de quadripôle. Il est caractérisé par ses tensions d'entrée  $u_E(t)$  et de sortie  $u_S(t)$ , ses courants d'entrée  $i_E(t)$  et de sortie  $i_S(t)$ .  
Le schéma d'un filtre électrique, en convention récepteur, est donné par la figure 3.

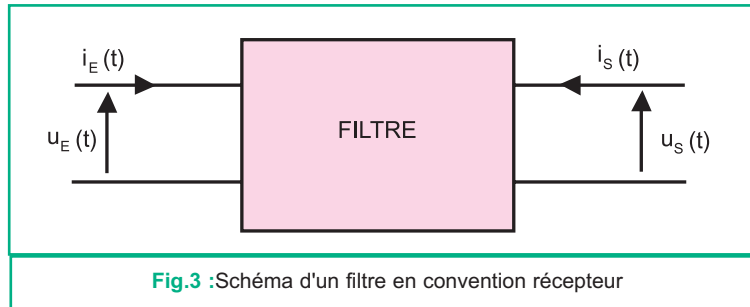


Fig.3 :Schéma d'un filtre en convention récepteur

### 1.4-RÉGIME PÉRIODIQUE ET QUADRIPOLE LINÉAIRE

On reprend le montage de la figure 1 et pour différentes valeurs de  $N$ , on compare la forme et la fréquence des signaux d'entrée et de sortie du filtre RC.  
D'après les oscillogrammes des figures: 2b, 2c, 2d et 2f, la forme et la fréquence du signal d'entrée, à travers le filtre RC, ne subissent aucune modification.  
En effet, à partir d'une tension d'entrée sinusoïdale nous obtenons une tension de sortie sinusoïdale et de même fréquence. Dans ce cas, le filtre est qualifié de linéaire.

#### Définition

Un filtre est dit linéaire si, à partir d'un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence  $N$ , il donne un signal de sortie sinusoïdal de même fréquence.

#### Remarque

Le filtre RC est dit passif car il est constitué uniquement de dipôles passifs linéaires.

## 2

## FONCTION DE TRANSFERT ET GAIN D'UN FILTRE

### 2.1- FONCTION DE TRANSFERT

On règle l'amplitude  $U_{Em}$  de la tension d'entrée du filtre RC (Fig1) à la valeur 5V. On fait varier la fréquence  $N$  et pour différentes valeurs de  $N$ , on note la valeur de la tension maximale  $U_{Sm}$  correspondante. Les résultats de mesures sont consignés dans le tableau suivant :

<b>N (Hz)</b>	10	50	100	257	300	500	$10^3$	$10^4$
<b><math>U_{Em}</math> (V)</b>	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00
<b><math>U_{Sm}</math> (V)</b>	5,00	4,90	4,65	3,53	3,25	1,88	1,24	0,12



**Remarque :**

Au lieu de mesurer les tensions maximales  $U_{Em}$  et  $U_{Sm}$  à l'aide d'un oscilloscope bicourbe, il est commode aussi de recourir à la mesure des tensions efficaces  $U_E$  et  $U_S$  avec des multimètres numériques ou voltmètres.

**Questions**

- 1°) En s'appuyant sur le tableau dressé précédemment, préciser comment varie  $U_{Sm}$  en fonction de la fréquence  $N$  en maintenant la valeur de  $U_{Em}$  constante.
- 2°) Reproduire le même tableau, y ajouter une ligne pour le calcul du rapport :  $\frac{U_{Sm}}{U_{Em}}$  et commenter le résultat obtenu.
- 3°) Préciser l'effet de la valeur de la fréquence  $N$  du signal d'entrée sur le rapport :

$$\frac{U_{Sm}}{U_{Em}}$$

**Interprétation**

Le rapport  $\frac{U_{Sm}}{U_{Em}}$  est pratiquement constant pour les faibles fréquences, sa valeur est pratiquement égale à un. Par contre, pour les fréquences élevées, on note une diminution importante de ce rapport, sa valeur tend vers zéro. Ainsi, le rapport  $\frac{U_{Sm}}{U_{Em}}$  varie avec la fréquence  $N$  du signal d'entrée. Ce rapport de tensions maximales renseigne sur la nature du filtre considéré et son comportement pour les faibles, moyennes et hautes fréquences (fréquences élevées).

**Définition**

Pour un filtre électrique donné, en régime sinusoïdal, le rapport  $\frac{U_{Sm}}{U_{Em}}$ , noté  $T$  est appelé fonction de transfert ou transmittance du filtre:  $T = \frac{U_{Sm}}{U_{Em}}$ .

**Conclusion**

En régime sinusoïdal, un filtre électrique est caractérisé par sa fonction de transfert ou transmittance  $T = \frac{U_{Sm}}{U_{Em}}$ .

Cette fonction de transfert  $T$  dépend de la fréquence du signal d'entrée.

**Remarque :**

- La transmittance  $T$  d'un filtre peut prendre des valeurs supérieures ou égales à l'unité. De même, elle peut prendre des valeurs inférieures à l'unité et qui peuvent tendre vers zéro.
- Pour  $T = 1$ , la transmission du signal d'entrée, à travers le filtre, se fait sans atténuation.
  - Pour  $T < 1$ , il y a atténuation du signal d'entrée, à travers le filtre.
  - Pour  $T > 1$ , la transmission du signal d'entrée, à travers le filtre, se fait avec amplification.

## 2.2- GAIN D'UN FILTRE

La fonction de transfert  $T$  d'un filtre électrique peut varier dans de très grandes proportions. Elle peut prendre des valeurs variant entre 0,001 et 100 et même plus. Pour pouvoir lire, sur un graphique, différentes valeurs de  $T$ , on cherche à étirer les petites valeurs et à compresser les grandes valeurs. Cette opération est réalisée par l'introduction d'une grandeur appelée gain du filtre et notée  $G$ .

### Définition

Le gain d'un filtre électrique, noté  $G$ , est donné par la relation :  $G = 20 \log T$ , avec  $T$  la fonction de transfert du filtre.

Le gain  $G$  est une grandeur sans dimension qui s'exprime en décibel de symbole **dB**.

### Questions

1°) Compléter le tableau ci-dessous :

<b>T</b>	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	0,5	1	10	$10^2$
<b>G (dB)</b>							

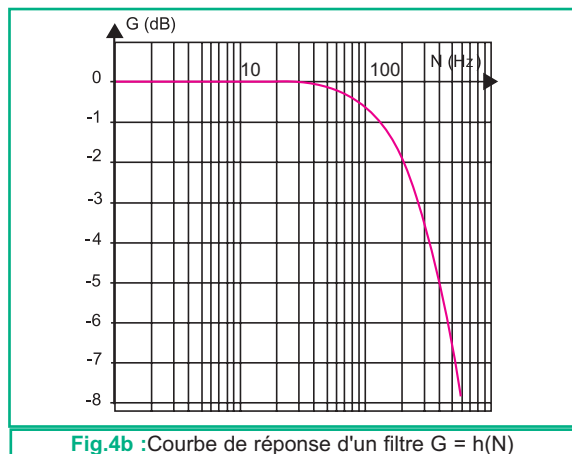
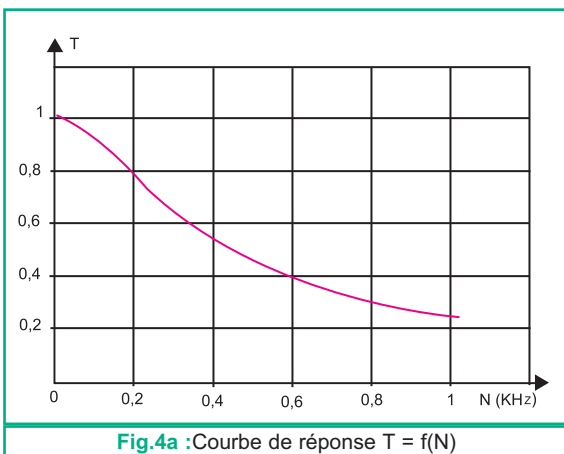
2°) Comparer les intervalles de variation de  $T$  et de  $G$ .

3°) Justifier que l'introduction du gain en décibel permet d'étirer les petites valeurs de  $T$  et de compresser les grandes valeurs.

Par introduction de la grandeur  $G$ , on peut étirer les petites valeurs de  $T$ . Par exemple, pour les valeurs de  $T$  appartenant à l'intervalle  $[10^{-3}, 10^{-1}]$ , correspond des valeurs de  $G$  comprises entre (-60) et (-20 dB). De même, à une transmittance  $T = 1$ , correspond un gain  $G = 0$ .

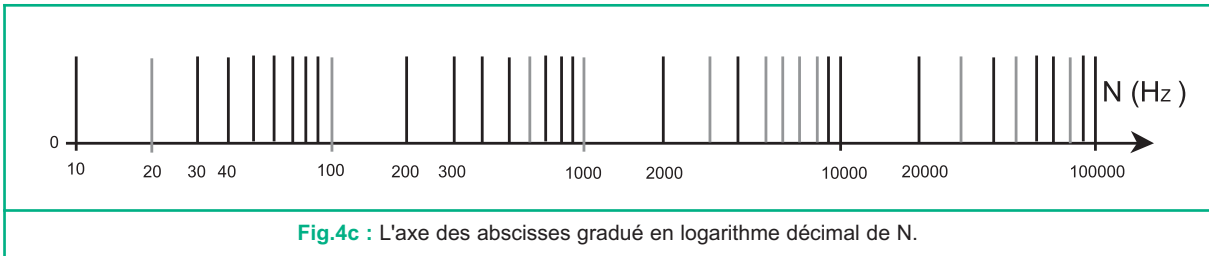
## 2.3- COURBE DE RÉPONSE D'UN FILTRE

On appelle courbe de réponse d'un filtre, la représentation graphique  $\mathcal{E}_T$  (fig.4a) de la variation de la transmittance  $T$  en fonction de la fréquence  $N$  du signal d'entrée :  $T = f(N)$  ou la représentation graphique  $\mathcal{E}_G$  (fig.4b) de la variation du gain  $G$  en fonction de  $N$  :  $G = h(N)$ . L'avantage de la courbe de réponse  $\mathcal{E}_G$  par rapport à  $\mathcal{E}_T$  est la compression des grandes valeurs de fréquences et l'étirement des petites valeurs.



## Remarques

- ◆ Dans l'étude des filtres, le domaine de variation de la fréquence  $N$  reste très large et variant, généralement, entre 0,1 Hz et 300 kHz. Par suite, il est plus commode d'attribuer à l'axe de fréquences une échelle logarithmique (Fig. 4c). Dans ce cas, le quadrillage dans lequel est tracée la courbe de réponse du filtre est dit semi-logarithmique comme le montre la figure 4b.



- ◆ D'une manière générale les caractéristiques d'un filtre sont définies à partir des courbes de réponse en gain,  $G = h(N)$  et en déphasage  $\Delta\varphi = f(N)$ . Cependant, dans notre étude on se limitera, principalement, à la courbe de réponse en gain pour décrire les propriétés d'un filtre.

## 3

### BANDE PASSANTE ET FRÉQUENCE DE COUPURE D'UN FILTRE

Un filtre électrique, d'une manière générale, est caractérisé par une plage de fréquences pour laquelle le signal d'entrée est transmis sans modification appréciable. Dans ce cas, le filtre est dit passant. Cependant, pour les fréquences où l'atténuation du signal d'entrée est importante, le filtre est dit non passant ou opaque.

D'ailleurs, les courbes de réponse en transmittance  $T(N)$  et en gain  $G(N)$ , du filtre RC (Fig. 4a et 4b), permettent de confirmer que les signaux de faibles fréquences sont transmis sans atténuation appréciable. Cependant, l'atténuation des signaux est très importante pour les fréquences élevées. Il s'agit de la partie oblique et sensiblement rectiligne de la courbe de réponse où le filtre est non passant.

**La convention généralement adoptée : un filtre électrique est passant pour toute valeur de  $T \geq \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ , avec  $T_0$  la valeur maximale de la transmittance  $T$ .**

#### 3.1- BANDE PASSANTE

A partir des courbes de réponse  $T(N)$  et  $G(N)$  du filtre RC, données par les figures 4a et 4b, on obtient les valeurs maximales  $T_0$  de  $T$  et  $G_0$  de  $G$ . Par convention, le filtre RC est passant dans la plage de fréquences où la transmittance  $T$  est supérieure ou égale à  $\frac{T_0}{\sqrt{2}}$  :

$$T \geq \frac{T_0}{\sqrt{2}} .$$

D'autre part, la fréquence  $N_h$  de  $N$ , pour laquelle on a :  $T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ , est appelée la fréquence de coupure « haute » du filtre.

L'intervalle de fréquence  $[0, N_h]$  est appelée la bande passante du filtre RC.

La condition sur le gain  $G$ , d'un filtre pour qu'il soit passant, est obtenue en exprimant  $G$  en fonction de  $G_0$  pour  $T \geq \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ . On obtient ainsi :

$$20 \log T \geq 20 \log \left( \frac{T_0}{\sqrt{2}} \right), \text{ par suite } G \geq 20 \log T_0 - 10 \log 2.$$

Par suite, le filtre est passant pour :  $G \geq G_0 - 3 \text{ dB}$ , avec  $G_0 = 20 \log T_0$ .

En conclusion, un filtre est passant pour :  $T \geq \frac{T_0}{\sqrt{2}}$  ou bien  $G \geq G_0 - 3 \text{ dB}$ .

### 3.2- DÉTERMINATION GRAPHIQUE DE LA FRÉQUENCE DE COUPURE

#### Définition

On appelle bande passante à -3 dB d'un filtre, l'intervalle de fréquences  $[N_b, N_h]$  pour lequel le gain  $G$  est compris entre le gain maximale  $G_0$  et  $G_0 - 3 \text{ dB}$  :

$$G \geq G_0 - 3 \text{ dB} \text{ ou bien } T \geq \frac{T_0}{\sqrt{2}}.$$

Les fréquences  $N_b$  et  $N_h$ , pour lesquelles  $G = G_0 - 3 \text{ dB}$ , sont respectivement les fréquences de coupure basse et haute du filtre.

#### Questions

1°) Par exploitation graphique des courbes de réponse  $T(N)$  et  $G(N)$  des figures 4a et 4b, déterminer :

a- les valeurs maximales  $T_0$  de  $T$  et  $G_0$  de  $G$ ,

b- la fréquence  $N_h$  de  $N$  pour laquelle  $T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$  et en déduire le domaine de fréquences pour lequel le filtre est passant.

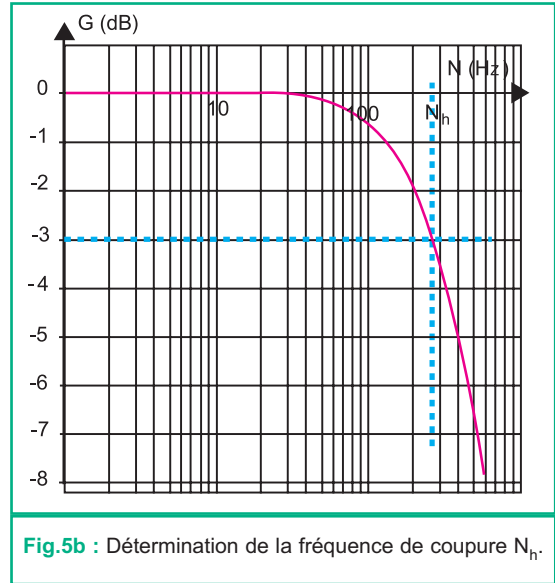
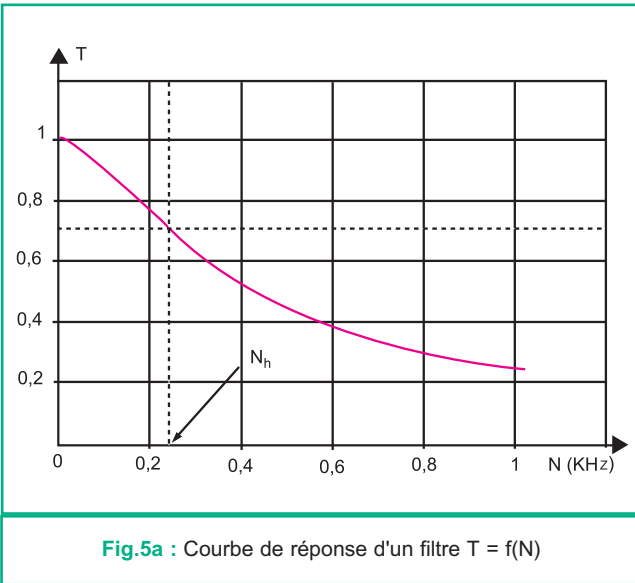
2°) Exprimer le gain  $G$  en fonction de  $G_0$  pour :  $T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ .

3°) Quelle est la valeur de  $N$  pour laquelle :  $G = G_0 - 3 \text{ dB}$  ?

Par exploitation de la courbe de réponse en transmittance  $T(N)$  ou en gain  $G(N)$ , on peut déterminer la (ou les) fréquence(s) de coupure du filtre et par suite délimiter sa bande passante.

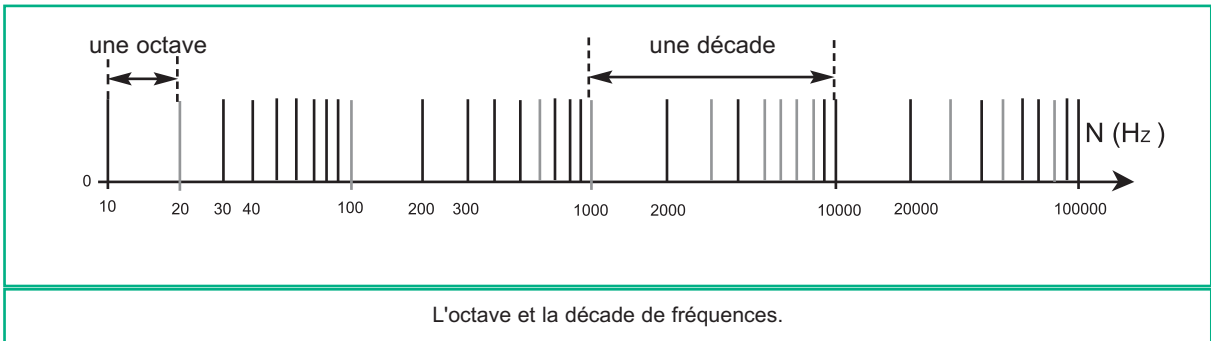
– La valeur de la fréquence de coupure  $N_h$  d'un filtre est l'abscisse en fréquences correspondant à une transmittance  $T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ , comme le montre la figure 5a.

– De même, pour la courbe de réponse en gain  $G(N)$ , la fréquence de coupure  $N_h$  est l'abscisse en fréquences correspondant à un gain  $G = G_0 - 3 \text{ dB}$  (Fig.5b).



**Remarque**

Pour les hautes fréquences (fréquences élevées), la courbe de réponse en gain d'un filtre RC est confondue avec une asymptote oblique de pente : (-20 dB) par décade\*. Cette asymptote coupe l'axe de fréquences en  $N = N_h$ , fréquence de coupure du filtre (Fig. 5b).

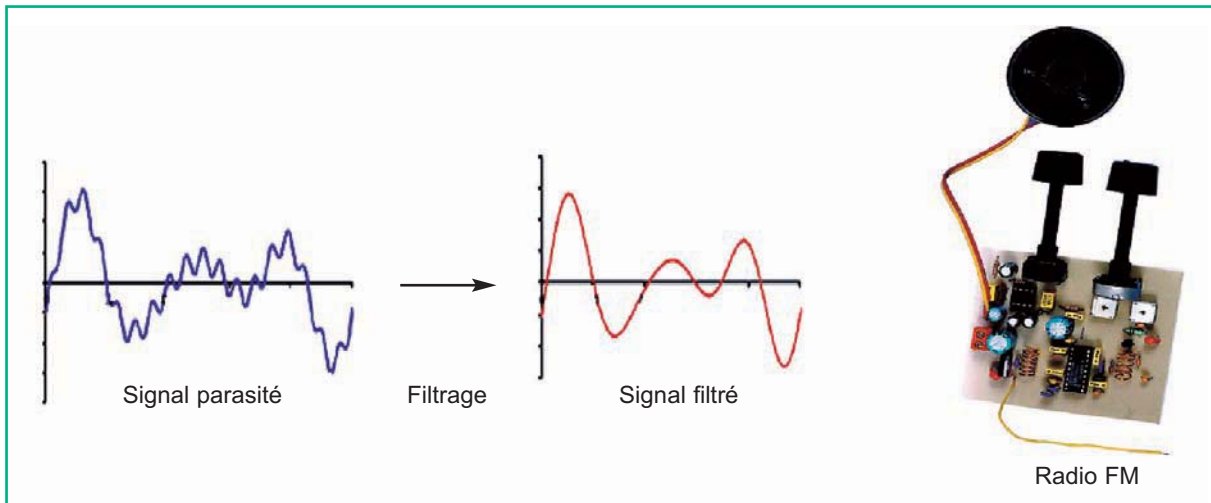


## 4 APPLICATIONS DES FILTRES

Dans les montages électriques, les filtres sont utilisés pour extraire ou supprimer la composante continue d'un signal, éliminer les fréquences indésirables ou sélectionner une bande de fréquences bien déterminée d'un signal.

Dans le cas d'une voiture, on utilise les filtres électriques pour éviter que les signaux «parasites» qui sont produits par l'allumage, soient transmis et amplifiés par la radio de bord. Dans les appareils électriques, alimentés par le courant du secteur, de fréquence 50 Hz, on utilise les filtres pour supprimer les bruits indésirables causés par cette fréquence.

En médecine, un électrocardiogramme est un signal de faible fréquence et d'amplitude de quelques millivolts sur lequel se superpose des parasites (à 50 Hz). Pour un diagnostic correct, il faut amplifier les faibles fréquences et éliminer le bruit du secteur (50 Hz) en utilisant des filtres électriques. En télécommunication, une antenne reçoit une multitude d'ondes radio de différentes fréquences. La réception d'une station désirée, nécessite l'utilisation de filtres électriques. Ces filtres sélectionnent la bande de fréquences relative à cette station. Dans une enceinte acoustique, les filtres sont nécessaires pour guider les signaux amplifiés vers les haut-parleurs adéquats.



# L'essentiel

- Le filtre électrique est un quadripôle qui ne transmet que les signaux de fréquence(s) comprise(s) dans un certain domaine.
- Le filtrage est une opération de tri de signaux électriques selon leurs fréquences.
- Un filtre RC transmet les signaux de faible fréquence sans atténuation appréciable.
- Un filtre est dit linéaire si, d'un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence  $N$ , donne un signal de sortie sinusoïdal de même fréquence.
- La fonction de transfert ou la transmittance  $T$  d'un filtre est le rapport :

$$T = \frac{U_{Sm}}{U_{Em}} \quad \text{ou bien} \quad T = \frac{U_S}{U_E} .$$

- La transmittance maximale  $T_0$  d'un filtre passif est égale à un :  $T_0 = 1$ .
- Le gain  $G$  d'un filtre, mesuré en décibel (dB), est :  $G = 20 \log T$ .
- La fréquence de coupure d'un filtre est celle pour laquelle on a :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{2}} \quad \text{ou bien} \quad G = G_0 - 3 \text{ dB} .$$

- La bande passante à -3 dB, d'un filtre est l'intervalle de fréquences pour lequel on a un gain  $G$  supérieur ou égal à  $G_0 - 3$  dB :

$$G \geq G_0 - 3 \text{ dB} .$$

Avec  $G_0$  la valeur maximale du gain  $G$  du filtre.

- Un filtre est passant pour tout signal électrique dont la fréquence appartient à sa bande passante.

# Exercices

## Exercice résolu

### ÉNONCÉ

Un générateur basse-fréquence délivrant une tension sinusoïdale de fréquence  $N$  réglable, alimente un filtre RC. On désigne par  $u_E(t)$  la tension d'entrée du filtre et par  $u_S(t)$  sa tension de sortie, avec:  $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt)$  et  $u_S(t) = U_{Sm} \sin(2\pi Nt + \varphi)$ .

- 1°) Donner le schéma d'un filtre RC en précisant l'entrée et la sortie d'un tel filtre.
- 2°) A l'aide d'un oscilloscope bicourbe, on visualise simultanément les tensions  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  du filtre. Pour une fréquence  $N_1$  de  $N$  et avec les mêmes sensibilités, on obtient l'oscillogramme de la figure 1.
  - a- Identifier les tensions d'entrée et de sortie du filtre.
  - b- Justifier qu'il s'agit d'un filtre linéaire passif.
- 3°) Pour une tension d'entrée  $U_{Em}$  donnée, on fait varier la tension  $N$  du générateur. Pour chaque valeur de  $N$ , on mesure la tension maximale  $U_{Sm}$ . Les résultats de mesures permettent de tracer la courbe de réponse en gain du filtre RC, donnée par la figure 2.
  - a- Donner la condition pour qu'un filtre électrique soit passant.
  - b- Déterminer graphiquement la fréquence de coupure  $N_h$  et la bande passante du filtre RC, en précisant la méthode utilisée.
  - c- On applique à l'entrée du filtre deux signaux ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) de fréquences respectives  $N_1 = 700$  Hz et  $N_2 = 7$  kHz. Lequel des deux signaux est transmis par le filtre ? Justifier la réponse.

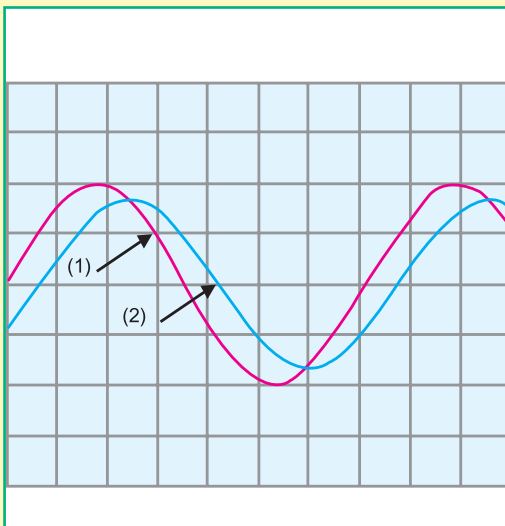


Fig.1

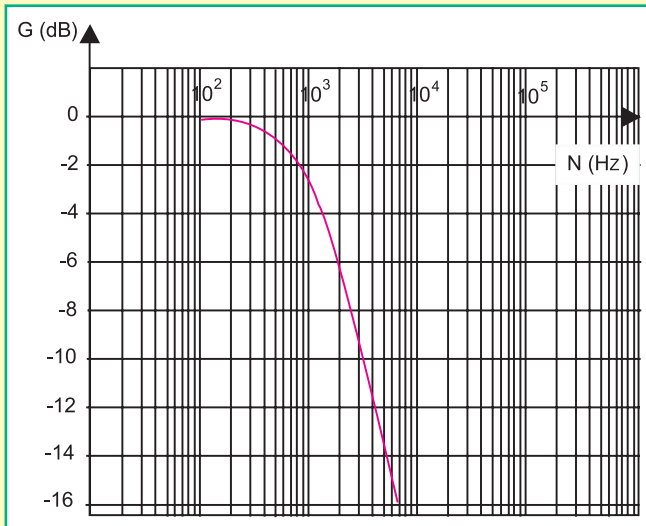


Fig.2



**SOLUTION**

1°) Un filtre RC est un quadripôle constitué par l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C. L'entrée du filtre est aux bornes de l'association RC tandis que la sortie est aux bornes du condensateur (fig.3).

2°) a- A travers un filtre passif, la tension d'entrée subit une atténuation plus ou moins appréciable. Par conséquent, la tension dont l'amplitude est la plus grande correspond à  $u_E(t)$ . Ainsi, l'oscillogramme 2 correspond au signal de sortie  $u_S(t)$ , tandis que l'oscillogramme 1 correspond au signal d'entrée  $u_E(t)$ .

Autre méthode : on peut se baser sur le signe du déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E$ .

b- A travers un filtre RC, le signal d'entrée ne subit aucune modification au niveau de la forme et de la fréquence.

En effet, à partir d'une tension sinusoïdale de fréquence N, on obtient, à la sortie du filtre, une tension sinusoïdale de même fréquence d'où le filtre est dit linéaire. D'autre part, le filtre RC est dit passif car il est constitué d'éléments passifs R et C.

3°) a- Un filtre est passant dans le domaine de fréquences où le gain G est supérieur ou égale à  $G_0 - 3$  dB.

b- La fréquence de coupure  $N_h$  d'un filtre est l'abscisse correspondant à un gain  $G = G_0 - 3$  dB. D'après la courbe de réponse, à l'ordonnée  $G_0 - 3$  dB correspond la fréquence  $N_h = 1$  kHz.

**Autre méthode**

On trace l'asymptote ( $\Delta$ ) confondue avec la partie oblique et rectiligne de la courbe  $G(N)$  du filtre (Fig. 4). Cette asymptote coupe l'axe de fréquence en  $N = N_h$ .

La bande passante du filtre est :  $[0 - 1 \text{ kHz}]$ .

c- Tout signal dont la fréquence N appartient à la bande passante du filtre sera transmis pratiquement sans atténuation appréciable. Dans notre cas, le filtre est transparent pour le signal ( $S_1$ ) et opaque pour le signal ( $S_2$ ).

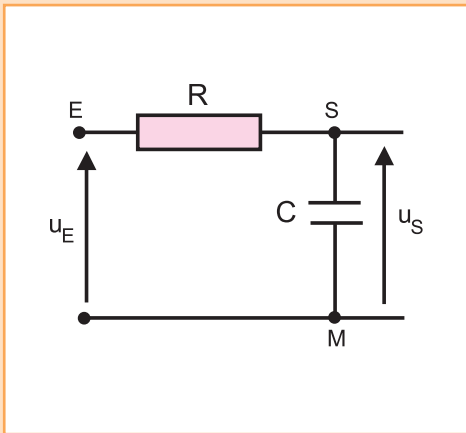


Fig.3 : Schéma d'un filtre RC

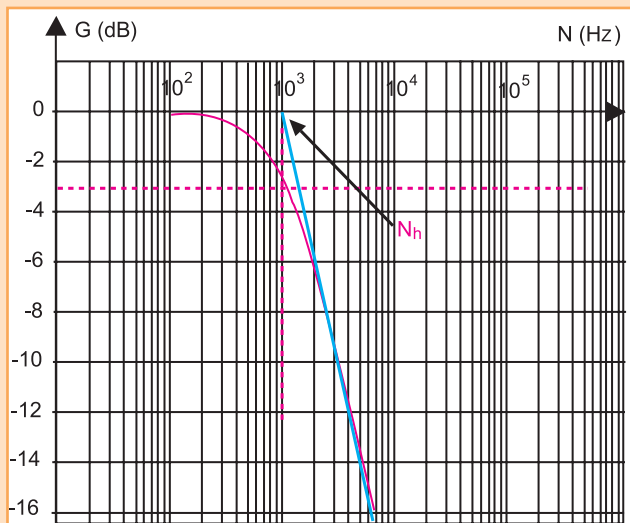


Fig.4



# Exercices à résoudre



## Tests rapides des acquis

### 1

#### Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

- 1°) Un filtre électrique est un exemple de quadripôle.  
 2°) Le filtrage est une opération de traitement d'un signal, indépendamment de sa fréquence.  
 3°) Un filtre électrique supprime toutes les fréquences qui sont supérieures à sa fréquence de coupure haute.  
 4°) La bande passante d'un filtre RC est l'intervalle de fréquences  $[0, N_p]$ .  
 5°) La fonction de transfert d'un filtre est l'inverse de sa transmittance  $T$ .

6°) Un filtre RC transmet, sans atténuation, les signaux de fréquences élevées.

7°) La fréquence de coupure d'un filtre RC

correspond à une transmittance :  $T = \frac{T_0}{2}$ .

8°) La valeur maximale de la fonction de transfert d'un filtre passif est égale à 1.

9°) La bande passante d'un filtre correspond à un gain  $G \leq G_0 - 3\text{dB}$ .

10°) Un filtre passif assure le filtrage et l'amplification du signal d'entrée.

### 2

#### Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la(ou les) proposition(s) juste(s).

1°) Un filtre électrique RC est un quadripôle qui transmet un signal électrique :

- a- en modifiant uniquement sa forme,  
 b- en amplifiant son amplitude,  
 c- sans atténuation, si sa fréquence est faible.

2°) La bande passante d'un filtre est l'intervalle de fréquences pour lequel :

- a- le gain  $G$  est maximal,  
 b- le gain  $G$  est supérieur ou égal à  $G_0 - 3\text{dB}$ ,  
 c- le gain  $G$  est inférieur ou égal à  $G_0 - 3\text{dB}$ .

3°) La valeur de la transmittance  $T$  d'un filtre RC pour les fréquences élevées vaut :

- a-  $T = 0$ ,  
 b-  $T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ ,  
 c-  $T = 1$ .

4°) Pour les fréquences élevées, la courbe de réponse en gain d'un filtre RC est confondue avec une asymptote oblique de pente :

- a-  $p = -20\text{dB} / \text{décade}$ ,  
 b-  $p = -6\text{dB} / \text{décade}$ ,  
 c-  $p = 20\text{dB} / \text{décade}$ .

5°) Le gain  $G$  d'un filtre pour une transmittance

$T = \frac{T_0}{2}$  est :

- a-  $G = 0$ ,  
 b-  $G = G_0 - 3\text{dB}$ ,  
 c-  $G = G_0 - 6\text{dB}$ .

## Exercices d'application

**3** On alimente un filtre électrique avec une tension sinusoïdale de fréquence  $N$  réglable et d'amplitude constante  $U_{Em} = 4,00V$ . Pour différentes valeurs de la fréquence  $N$ , on note la valeur maximale  $U_{Sm}$  de la tension de sortie. On donne dans le tableau ci-dessous, la variation de  $U_{Sm}$  pour quelques valeurs de  $N$  :

$N(\text{Hz})$	10	100	200	500	$10^3$	$2.10^3$	$5.10^3$
$U_{Sm}(\text{V})$	3,96	3,92	3,56	2,84	1,80	0,80	0,40
$T$							

**1°) a-** Rappeler l'expression de la transmittance  $T$  d'un filtre.

**b-** Donner l'expression du gain  $G$  d'un filtre.

**2°) a-** Reproduire puis compléter le tableau ci-dessus.

**b-** Représenter, sur une feuille de papier semi-logarithmique, la courbe de réponse en gain  $G = f(N)$  du filtre considéré.

**3°) Déterminer graphiquement :**

- la (ou les) fréquence(s) de coupure à  $-3$  dB du filtre,

- la pente de l'asymptote, confondue à la courbe  $G(N)$ , pour les fréquences élevées.

**4** On donne la courbe de réponse en gain  $G = h(N)$  d'un filtre électrique (Fig.1).

Par exploitation graphique de la courbe de réponse :

**1°)** Justifier qu'il s'agit bien d'un filtre passif.

**2°)** Préciser, l'effet du filtrage sur l'amplitude du signal d'entrée pour les faibles et les hautes fréquences.

**3°)** Déterminer la fréquence de coupure  $N_h$  du filtre et en déduire la largeur de sa bande passante.

**4°)** Donner la valeur de la pente de l'asymptote confondue à la courbe de réponse pour les fréquences élevées ?

**5°)** Pour la fréquence  $N_1 = 1\text{kHz}$ , calculer la valeur de la transmittance  $T$  et en déduire la valeur maximale  $U_{Sm}$  de la tension de sortie. On donne  $U_{Em} = 4\sqrt{2}$  V.

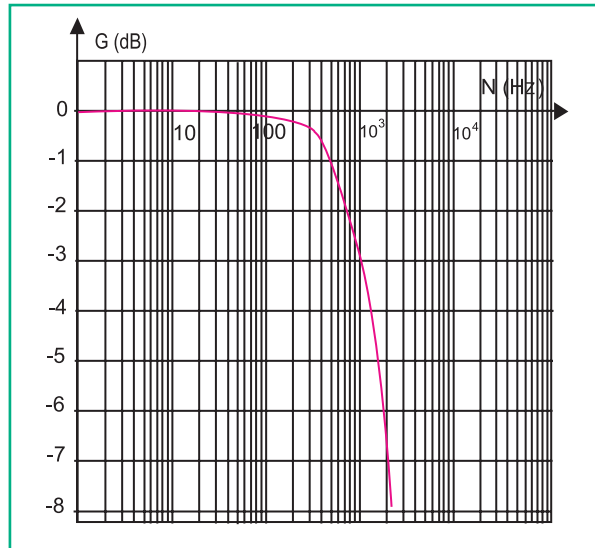


Fig.1 : Courbes de réponse en gain.

## Exercice de synthèse

**5** On réalise le montage schématisé par la figure 1 et constitué par un filtre RC, un interrupteur  $K_1$  et un conducteur ohmique de résistance  $R_1$ . Un générateur basse fréquence, délivrant une tension sinusoïdale d'amplitude  $U_m$   $U_m = 4$  V et de fréquence réglable, alimente l'entrée du filtre RC. Les tensions d'entrée et de sortie du filtre sont respectivement  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$ .

**A-** Dans une première étape, on fait l'étude du filtre sans charge, c'est-à-dire  $K$  ouvert.

La réponse en gain  $G = h(N)$  du filtre est donnée par la courbe 1 de la figure 2.

**1°)** Donner la valeur de l'amplitude  $U_{Sm}$  de la tension de sortie du filtre, pour les basses fréquences.

**2°)** Déterminer la valeur de la fréquence de coupure  $N_h$  de ce filtre et sa bande passante.

**3°)** Quelle est la valeur de la pente  $p$  de l'asymptote de la courbe de réponse, pour les hautes fréquences.

**4°)** Préciser, la valeur de l'amplitude  $U_{Sm}$  pour une fréquence  $N$  du GBF égale à  $N_h$ .

**B-** Dans une seconde étape, on fait l'étude du filtre avec une charge, c'est-à-dire  $K$  fermé (Fig.1). La réponse en gain du filtre est donnée par la courbe 2 de la figure 2.

1°) Déterminer la valeur de la transmittance maximale  $T_0'$  du filtre et sa nouvelle fréquence de coupure  $N'_h$ .

2°) Quelle est la valeur de la pente  $p'$  de l'asymptote de la courbe de réponse  $G(N)$  pour les fréquences élevées.

3°) Préciser, l'effet de la charge sur le fonctionnement d'un filtre passif.

Pour assurer le bon fonctionnement de ces appareils et éviter les perturbations, on utilise les blocs multiprises ou filtres secteur (Fig. 1). Ce sont des excellents systèmes de filtrage contre les perturbations. Les filtres secteur sont conçus pour atténuer les signaux électriques de fréquences supérieures à 50 Hz (fréquence du secteur).

L'origine des perturbations enregistrées sur le courant du secteur 230 V / 50 Hz proviennent de l'utilisation d'appareils électriques tels que : les tubes fluorescents, les lampes, les moteurs électriques...

D'après: [www.hellopro.fr](http://www.hellopro.fr)

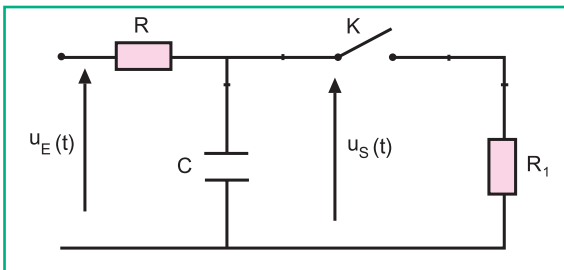


Fig.1: Filtre RC

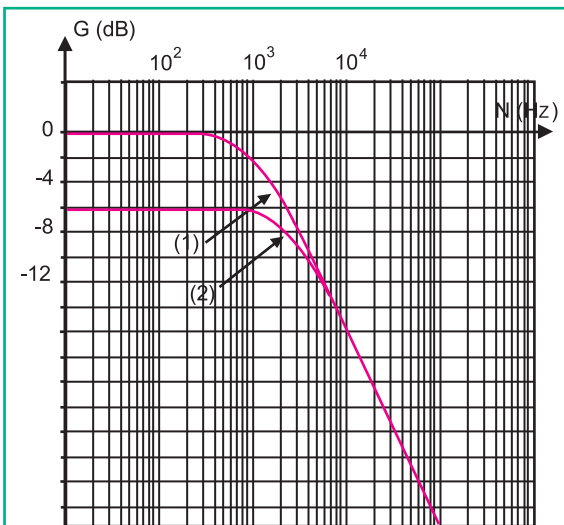


Fig.2: Courbes de réponse en gain

### Questions

1°) Préciser les différentes perturbations qui peuvent nuire au fonctionnement d'appareils électriques.

2°) Préciser la plage de fréquences pour laquelle le filtre secteur est opaque.

3°) Le filtre secteur est un exemple de filtre passif. Justifier cette affirmation.

## Document scientifique

### Bloc multiprises

**6** Les surtensions du secteur, les parasites radioélectriques et les effets de la foudre sont des perturbations qui peuvent nuire au fonctionnement d'appareils électriques tels que: ordinateur, imprimante, modem, photocopieur, téléphone, répondeur, téléviseur, magnéto-scope...



Fig.1: Bloc multiprises

# En savoir plus

## Les filtres répartiteurs des enceintes acoustiques

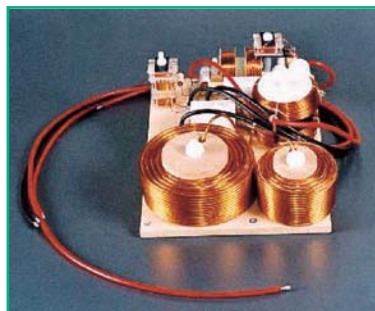
Dans une enceinte acoustique d'une chaîne Hi-fi, les haut-parleurs sont spécialisés dans la reproduction du son, soit grave (la fréquence en dessous de 650 Hz), soit médium (la fréquence s'étend de 650 à 3000 Hz), soit aigu (la fréquence est de plus de 3000 Hz). Chaque haut-parleur est spécialisé dans la reproduction d'une bande fréquentielle particulière. Le signal fourni par amplification, à l'entrée de l'enceinte, ne sait pas "d'instinct" vers quel haut-parleur de l'enceinte doit-il s'acheminer ?

Afin de guider le signal contenant les fréquences graves, par exemple, vers l'haut-parleur de grave, il faut interposer entre ce dernier et la sortie de l'amplificateur un filtre d'aiguillage ou filtre répartiteur. Celui-ci forme, d'une manière plus ou moins efficace, un barrage pour les signaux dont la fréquence est supérieure à 650Hz.

De la même manière, les signaux dont les fréquences s'étendent de 650 à 3000 Hz, sont orientés vers le haut-parleur de médium. Enfin, ceux de plus de 3000 Hz sont dirigés vers le haut-parleur d'aigu. Ainsi, chacun des haut-parleurs d'une enceinte est prévu et construit pour une certaine plage de fréquences. Les filtres répartiteurs, dans une enceinte acoustique, permettent donc de sélectionner les composantes sinusoïdales du signal fourni par l'amplification et de les répartir en trois domaines de fréquences avant de les transmettre aux haut-parleurs adéquats.



Haut-parleur de grave-médium



Filtre répartiteur d'une enceinte acoustique

## Objectifs

- ◆ Réaliser un filtre électrique (passe-bas, passe-haut et passe-bande).
- ◆ Etablir l'expression de la fonction de transfert  $T$  d'un filtre électrique.
- ◆ Calculer le gain d'un filtre électrique.
- ◆ Tracer la courbe de réponse  $T = f(N)$  ou  $G = h(N)$  d'un filtre électrique.
- ◆ Déterminer la (ou les) fréquence(s) de coupure et la bande passante d'un filtre.
- ◆ Distinguer un filtre électrique actif d'un filtre électrique passif.

## Prérequis

SAVOIR	SAVOIR FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Définir un quadripôle.</li> <li>◆ Caractériser une grandeur sinusoïdale par sa période, son amplitude et sa phase initiale.</li> <li>◆ Ecrire la relation entre la valeur maximale et la valeur efficace d'une tension sinusoïdale.</li> <li>◆ Rappeler l'expression du facteur de surtension <math>Q</math> d'un circuit RLC série.</li> <li>◆ Définir, en décibels, le gain d'un filtre.</li> <li>◆ Définir la fréquence de coupure d'un filtre électrique.</li> <li>◆ Définir la bande passante d'un filtre.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Distinguer entre l'entrée et la sortie d'un filtre électrique.</li> <li>◆ Visualiser simultanément deux tensions électriques à l'oscilloscope.</li> <li>◆ Mesurer à l'aide d'un oscilloscope la valeur maximale et le déphasage de deux tensions sinusoïdales.</li> <li>◆ Appliquer la loi des mailles.</li> <li>◆ Appliquer la loi des nœuds.</li> <li>◆ Utiliser les propriétés d'un amplificateur opérationnel idéal.</li> <li>◆ Faire une construction de Fresnel.</li> </ul>

# EXEMPLES DE FILTRES ELECTRIQUES

# 8



Un égaliseur (égaliseur en anglais) ou correcteur, est un outil utilisé aussi bien pour l'enregistrement sonore, le mixage ou la sonorisation, afin d'augmenter ou de diminuer le volume sonore de certaines bandes de fréquences d'un son.

- ◆ Les filtres sont indissociables de l'acoustique, de la radiophonie et de plusieurs autres domaines.
- ◆ Les filtres sont utilisés dans la conception des chaînes Hifi, des émetteurs, des récepteurs et des tables de mixage, etc.
- ◆ Dans le domaine des asservissements, les filtres utilisés sont appelés des correcteurs. Comment fonctionnent ces filtres en acoustique ?

# EXEMPLES DE FILTRES ÉLECTRIQUES

Dans une enceinte acoustique, chaque haut-parleur est spécialisé dans la reproduction d'une bande de fréquences particulière. Pour pouvoir sélectionner la bande fréquentielle adaptée à chaque haut-parleur, on utilise différents types de filtres. Parmi ces filtres, il y a ceux qui laissent passer les fréquences basses en s'opposant au passage des fréquences élevées. D'autres filtres sont transparents pour les signaux de hautes fréquences. Comment faut-il choisir le filtre adéquat ? Peut-on expliquer les différentes réponses, en gain, de deux filtres ayant les mêmes composants ?

## 1 FILTRE PASSE-BAS PASSIF

### 1.1- ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

A l'aide d'un conducteur ohmique de résistance  $R = 318 \Omega$  et d'un condensateur de capacité  $C = 0,47 \mu\text{F}$ , on réalise le filtre RC d'entrée  $u_E(t)$  et de sortie  $u_S(t)$ , comme le montre la figure 1. Un générateur basse fréquence, délivrant une tension sinusoïdale de fréquence  $N$  réglable, alimente ce filtre. Pour suivre l'évolution des tensions  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$ , on relie respectivement les points E et S du filtre aux voies  $Y_1$  et  $Y_2$  de l'oscilloscope comme le montre la figure 1, et on ferme l'interrupteur K.

La tension d'entrée du filtre est sinusoïdale et de la forme :

$$u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E).$$

L'expérience consiste à faire varier la fréquence  $N$  de la tension d'entrée  $u_E(t)$ , avec  $U_{Em} = 5 \text{ V}$ . Pour chaque valeur de  $N$ , on note la valeur maximale  $U_{Sm}$  de la tension de sortie. Pour trois fréquences différentes  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  de  $N$  et avec les mêmes sensibilités des deux voies de l'oscilloscope, on obtient les oscillogrammes des figures 2a, 2b et 2c.

Par exploitation des résultats de l'étude expérimentale, décrite précédemment, on trace la courbe de réponse en gain  $G(N)$  du filtre RC, donnée par la figure 3.

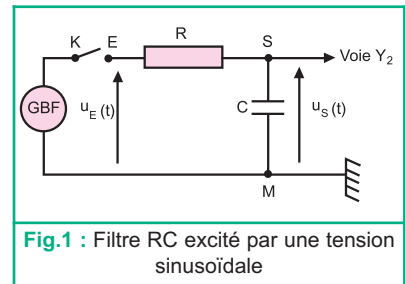


Fig.1 : Filtre RC excité par une tension sinusoïdale

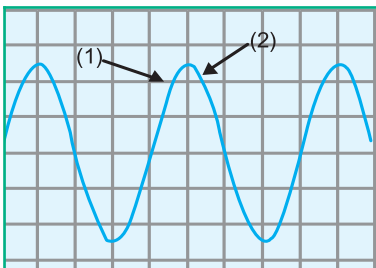


Fig.2a :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_1 = 50 \text{ Hz}$

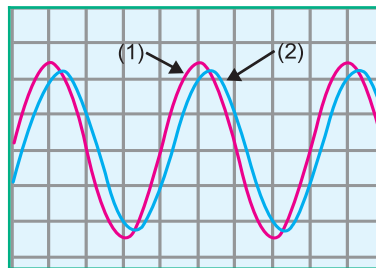


Fig.2b :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_2 = 500 \text{ Hz}$

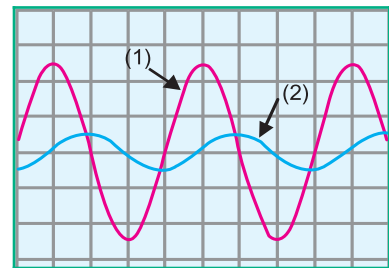


Fig.2c :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_3 = 5 \text{ kHz}$



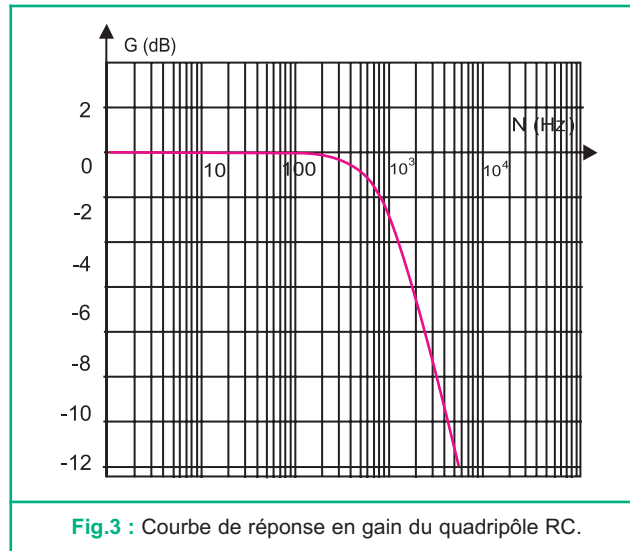


Fig.3 : Courbe de réponse en gain du quadripôle RC.

### Questions

- 1°) A l'aide des oscillogrammes des figures 2b et 2c :
  - vérifier que  $u_s(t)$  est en retard de phase par rapport à  $u_E(t)$ ,
  - comparer la valeur de  $U_{Sm}$  à celle de  $U_{Em}$ .
- 2°) Par exploitation de la courbe de réponse  $G(N)$  de la figure 3 :
  - a- déterminer graphiquement, la fréquence de coupure  $N_c$  du filtre.  
En déduire la largeur de sa bande passante.
  - b- Justifier le comportement du filtre pour les hautes fréquences.

### Constatations

La tension d'entrée  $u_E(t)$  est transmise, à travers le filtre, avec conservation de la forme et de la fréquence. Ainsi, le filtre RC est linéaire.

D'autre part, le filtre est passant pour les faibles fréquences ( $N < 1000$  Hz). Par contre, il est non passant pour les fréquences élevées ( $N > 1$  kHz).

En effet, d'après la figure 3 on a le gain  $G$  qui vérifie :  $G \geq G_0 - 3$  dB pour  $N < 1000$  Hz.

Par conséquent, dans cette plage de fréquences, le signal d'entrée est transmis sans

atténuation appréciable car on a :  $U_{Sm} \geq \frac{U_{Em}}{\sqrt{2}}$ .

### Remarque

Aux hautes fréquences,  $u_s(t)$  est en quadrature retard de phase par rapport à  $u_E(t)$ .

### Conclusion

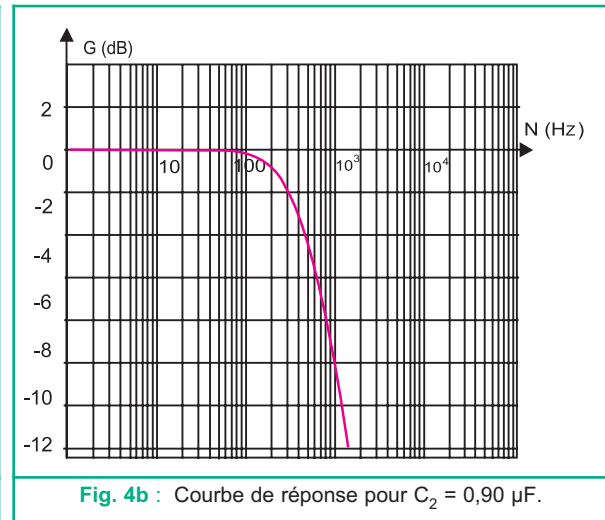
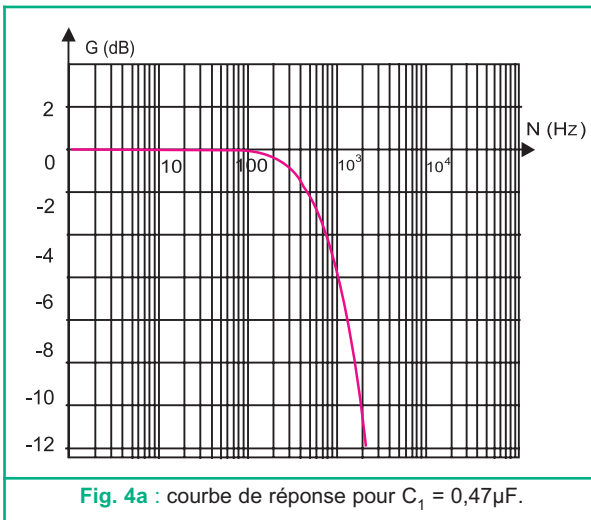
Le filtre RC est appelé filtre passe-bas, car il est passant pour les faibles fréquences et non passant pour les grandes fréquences. Un filtre passe-bas est caractérisé par sa fréquence de coupure haute  $N_h$ .

## 1.2- FRÉQUENCE DE COUPURE ET BANDE PASSANTE D'UN FILTRE PASSE-BAS

On se propose d'étudier expérimentalement l'effet de la variation de la valeur de l'une des grandeurs d'un filtre passe-bas (R ou C) sur la bande passante et la fréquence de coupure.

### Expérience 1

Dans le montage de la figure 1, avec la même valeur de  $R = 318 \Omega$  et deux valeurs  $C_1 = 0,47 \mu\text{F}$  et  $C_2 = 0,90 \mu\text{F}$  de la capacité C du condensateur, on réalise deux filtres RC. Pour chaque filtre, on fait varier la fréquence N du signal d'entrée et on trace la courbe de réponse en gain. Les courbes de réponse sont données par les figures 4a et 4b.



### Questions

- 1°) Déterminer, graphiquement, les fréquences de coupures  $N_{h1}$  et  $N_{h2}$  obtenues respectivement avec  $C_1$  et  $C_2$ .
- 2°) Préciser l'effet de la variation de la capacité C sur la largeur de la bande passante d'un filtre RC.

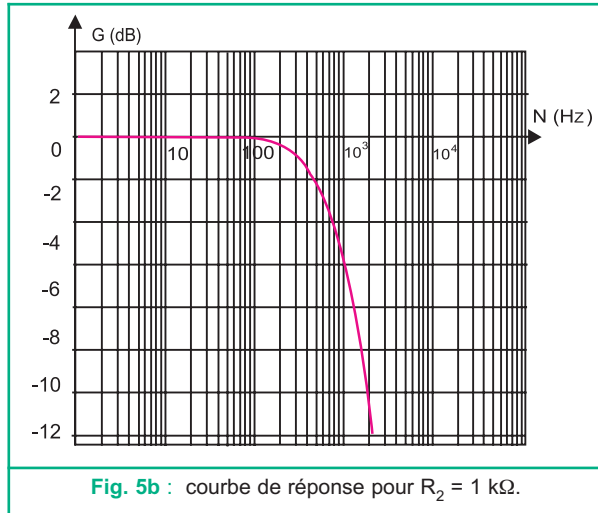
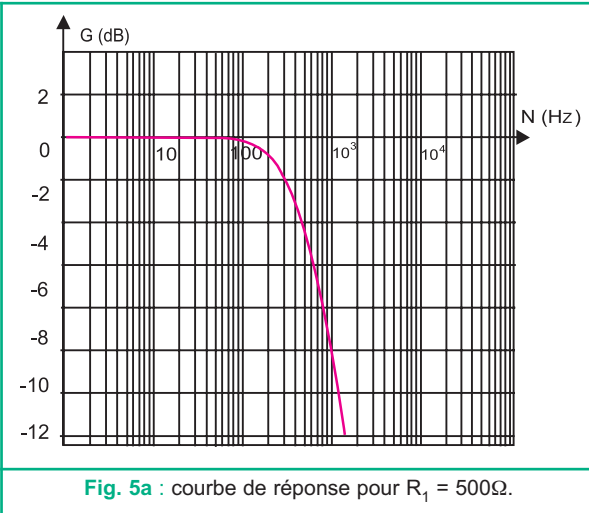
### Constatations

Avec la même valeur de  $R = 318 \Omega$ , la fréquence de coupure  $N_{h1}$  du filtre est égale à 1060Hz pour  $C_1 = 0,47 \mu\text{F}$ . Cette fréquence prend la valeur  $N_{h2} = 552 \text{ Hz}$  pour une valeur de  $C_2 = 0,90 \mu\text{F}$ . Ainsi, l'augmentation de la valeur de la capacité C du condensateur fait diminuer la fréquence de coupure haute  $N_h$  du filtre.

### Expérience 2

Dans le montage de la figure 1, avec la même valeur de  $C_1 = 0,47 \mu\text{F}$  et deux valeurs  $R_1 = 500 \Omega$  et  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ , de la résistance R du conducteur ohmique, on réalise deux filtres RC. Pour chaque filtre, on fait varier la fréquence N du signal d'entrée et on trace la courbe de réponse en gain :  $G = f(N)$ .

Les deux courbes de réponse sont données par les figures 5a et 5b.



### Questions

- 1°) Déterminer, graphiquement, les fréquences de coupures  $N'_{h1}$  et  $N'_{h2}$  du filtre obtenues respectivement avec  $R_1$  et  $R_2$ .
- 2°) Préciser l'effet de variation de la valeur de la résistance  $R$  du conducteur ohmique sur la largeur de la bande passante du filtre.

### Constatations

Avec la même valeur  $C_1 = 0,47\mu\text{F}$  de la capacité  $C$ , la fréquence de coupure  $N'_{h1} = 670\text{ Hz}$  pour  $R_1 = 500\ \Omega$ . Cette fréquence prend la valeur  $N'_{h2} = 340\text{ Hz}$  pour une valeur de  $R_2 = 1\text{ k}\Omega$ . Ainsi, l'augmentation de la valeur de la résistance  $R$  du conducteur ohmique fait diminuer la fréquence de coupure haute  $N_h$  du filtre.

### Conclusion

L'augmentation de la valeur de la résistance  $R$  du conducteur ohmique ou de la capacité  $C$  du condensateur a pour effet la diminution de la fréquence de coupure haute  $N_h$  du filtre RC, et par suite la diminution de la largeur de sa bande passante.

## 1.3- ETUDE THÉORIQUE

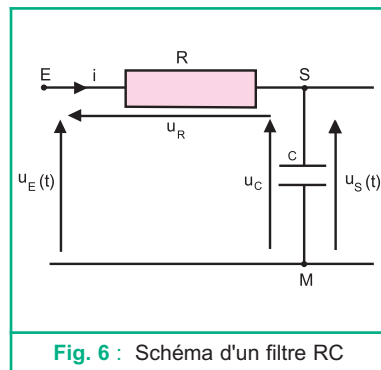
### Mise en équation

L'application de la loi des mailles au schéma du circuit de la figure 6, donne:  $u_R(t) + u_S(t) - u_E(t) = 0$ .

Par suite :  $u_R(t) + u_S(t) = u_E(t)$ , avec  $u_S(t) = u_C(t)$ .

D'autre part on a:

- $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$  où  $q(t)$  est la charge du condensateur,
- $u_R(t) = R i(t)$  avec  $i(t) = \frac{dq}{dt}$  et  $q(t) = C \cdot u_C(t)$ .
- $u_R(t) = RC \frac{du_S}{dt}$ .



## Equation différentielle en $u_s$

En exprimant  $u_R(t)$  en fonction de  $u_S(t)$ , on a :  $RC \frac{du_S}{dt} + u_S = u_E$  (1)

La tension d'entrée étant sinusoïdale et de la forme :  $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E)$ , l'équation différentielle (1) admet une solution particulière de la forme :  $u_S(t) = U_{Sm} \sin(2\pi Nt + \varphi_S)$ .

## Fonction de transfert T

Pour établir l'expression de la fonction de transfert T du filtre, on fait recours à la construction de Fresnel.

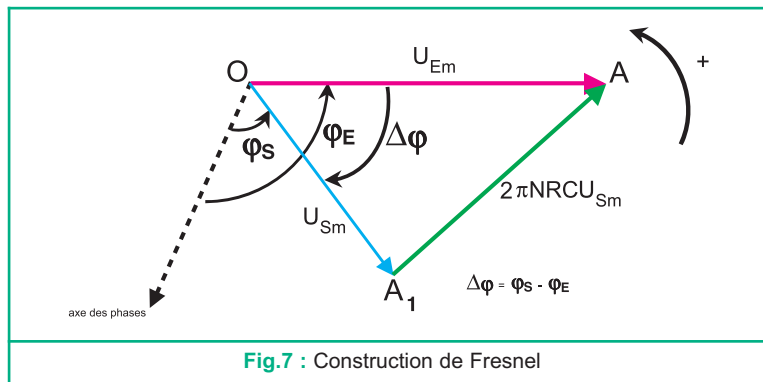
Pour cela, on associe, aux termes :  $u_S(t)$ ,  $RC \frac{du_S}{dt}$  et  $u_E(t)$  respectivement les vecteurs de

Fresnel :  $\vec{OA}_1$ ,  $\vec{OA}_2$  et  $\vec{OA}$ .

On obtient ainsi :

$\vec{OA}_1 [ U_{Sm}, \varphi_S ]$ ,  $\vec{OA}_2 [ 2\pi NRCU_{Sm}, \varphi_S + \frac{\pi}{2} ]$  et  $\vec{OA} [ U_{Em}, \varphi_S ]$ , avec  $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 = \vec{OA}$ .

Ce qui donne la construction de Fresnel de la figure 7.



Par application du théorème de Pythagore à la construction de Fresnel on obtient :

$$U_{Em}^2 = U_{Sm}^2 + (2\pi NRC)^2 U_{Sm}^2 \cdot \text{Par suite: } \frac{U_{Sm}^2}{U_{Em}^2} = \frac{1}{1+(2\pi NRC)^2}.$$

$$\text{Ainsi, la transmittance } T = \frac{U_{Sm}}{U_{Em}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi NRC)^2}}. \quad (2)$$

### Remarque

Aux très basses fréquences, le terme  $2\pi NRC$  tend vers zéro, par suite :  $T \approx 1$ , c'est la valeur maximale  $T_0$  de T.

### Gain du filtre

Sachant que le gain G du filtre est:  $G = 20 \log T$ , par exploitation de la relation (2), on obtient:

$$G = 20 \log \left[ \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi NRC)^2}} \right], \text{ ce qui donne : } G = -10 \log [ 1 + (2\pi NRC)^2 ]. \quad (3)$$

### Remarque

Aux très basses fréquences le gain G du filtre RC atteint sa valeur maximale:  $G_0 \approx 0$ .

### Fréquence de coupure et bande passante

Le filtre RC est passant pour toute fréquence  $N$  tel que:  $G \geq G_0 - 3 \text{ dB}$ , avec  $G_0$  la valeur maximale de  $G$ .

D'où :  $-10 \log [ 1 + (2\pi NRC)^2 ] \geq -3 \text{ dB}$ .

Par suite :  $\log [ 1 + (2\pi NRC)^2 ] \leq 0,3$ .

Ainsi :  $[ 1 + (2\pi NRC)^2 ] \leq 10^{0,3}$ , d'où :  $2\pi NRC \leq \sqrt{10^{0,3} - 1}$

Par conséquent, le filtre RC est passant pour toute fréquence  $N$  telle que :  $N \leq \frac{1}{2\pi RC}$ .

Cette fréquence limite notée  $N_h = \frac{1}{2\pi RC}$  est appelée la fréquence de coupure haute du filtre.

Le filtre RC est passant pour les signaux dont la fréquence  $N$  est comprise entre zéro et  $N_h$ .

Par suite, la bande passante de ce filtre passe-bas est :  $[0, N_h]$ .

#### Remarque

On peut déterminer la valeur de la fréquence de coupure d'un filtre ainsi que sa bande passante en se basant sur l'expression de la fonction de transfert  $T$ .

### Déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée

Aux hautes fréquences, le déphasage entre les signaux de sortie et d'entrée du filtre est appréciable. Les oscillogrammes des figures 2 et 7 confirment ce fait. D'une manière générale, la tension de sortie  $u_S(t)$  évolue, toujours, en retard de phase par rapport à la tension d'entrée  $u_E(t)$ .

Par exploitation de la figure 7, on obtient :  $\text{tg}\Delta\varphi = -2\pi NRC$ , avec  $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E$ .

Par suite on a :  $\text{tg}\Delta\varphi = -\frac{N}{N_h}$  . (4)

Ainsi, le déphasage  $\Delta\varphi$  dépend de la fréquence  $N$ . En effet, pour:

- les faibles fréquences , on a :  $\Delta\varphi \approx 0$ ,
- les fréquences élevées,  $N \gg N_h$ , on a:  $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ ,
- la fréquence  $N = N_h$ , le déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ .

### Conclusion

Le quadripôle RC, est un filtre passe-bas passif caractérisé par :

- une transmittance  $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + (2\pi NRC)^2}}$  avec  $T_0 = 1$ ,

- un gain  $G = -10 \log [ 1 + (2\pi NRC)^2 ]$ ,

- une fréquence de coupure haute :  $N_h = \frac{1}{2\pi RC}$ ,

- une bande passante :  $[0, N_h]$ .

## 2 FILTRE PASSE-BAS ACTIF

### 2.1- ETUDE EXPÉRIMENTALE

On réalise le montage de la figure 8, constitué d'un condensateur de capacité  $C_1 = 0,47 \mu\text{F}$ , de deux conducteurs ohmiques de résistances respectives  $R_1 = 318 \Omega$  et  $R_2 = 180 \Omega$ , et d'un amplificateur opérationnel ( $\mu\text{A} 741$ ).

Le quadripôle est alimenté par un générateur BF de fréquence  $N$  réglable. La tension d'entrée du quadripôle est :

$u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E)$ , tandis que sa tension de sortie est  $u_S(t)$ . Un oscilloscope bicourbe, convenablement branché, permet de visualiser, simultanément, la tension d'entrée  $u_E(t)$  sur la voie  $Y_1$  et la tension de sortie  $u_S(t)$  sur la voie  $Y_2$ .

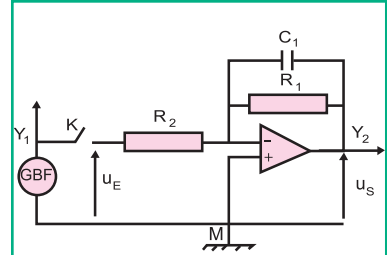


Fig.8 : Quadripôle avec un A.O.P

#### Expérience 1

Pour trois fréquences différentes  $N_1, N_2$  et  $N_3$  de  $N$  et avec les mêmes sensibilités des deux voies de l'oscilloscope, on obtient les oscillogrammes donnés par les figures 9a, 9b et 9c.

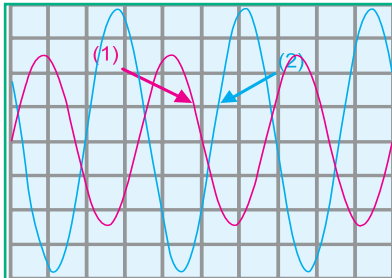


Fig.9a :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_1 = 600 \text{ Hz}$

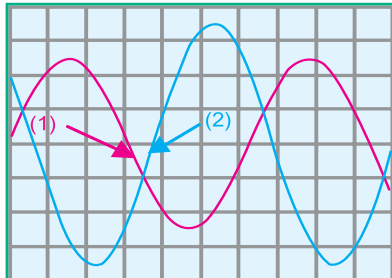


Fig.9b :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_2 = 800 \text{ Hz}$

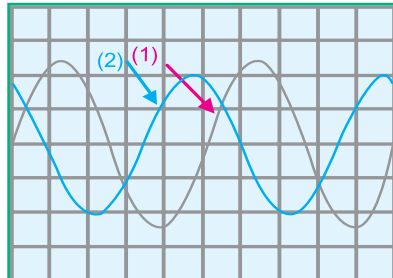


Fig.9c :  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour  $N_3 = 2 \text{ kHz}$

#### Expérience 2

On fait varier la fréquence  $N$  de  $u_E(t)$ , tout en maintenant  $U_{Em}$  constante. Pour chaque valeur de  $N$ , on note la valeur maximale  $U_{Sm}$  de  $u_S(t)$ . Par exploitation des résultats de mesures, on obtient la courbe de réponse  $G(N)$  donnée par la figure 10.

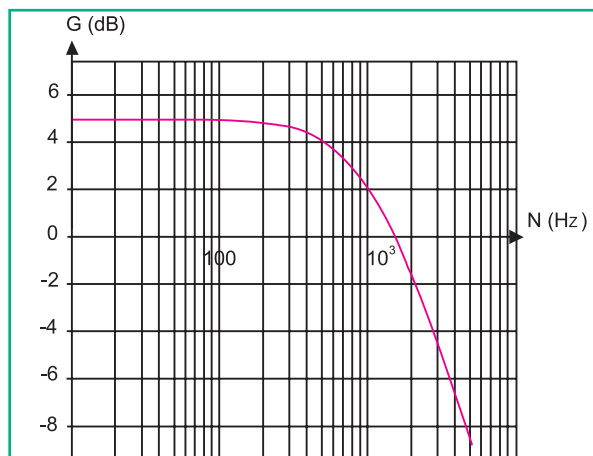


Fig.10 : Courbe de réponse en gain du quadripôle

### Questions

- 1°) Par exploitation des oscillogrammes des figures 9a, 9b et 9c :
  - a- montrer que le quadripôle considéré est linéaire,
  - b- comparer les amplitudes des tensions  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$ , pour les fréquences faibles ( $N < 1\text{kHz}$ ),
  - c- préciser le signe du déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E$ .
- 2°) A l'aide de la courbe de réponse de la figure 10, déterminer la valeur maximale  $G_0$  de  $G$  et en déduire la valeur maximale  $T_0$  de  $T$ .
- 3°) Préciser le comportement du quadripôle pour les faibles et les grandes fréquences.

### Interprétation

Le quadripôle constitué de dipôles passifs:  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C_1$ , autour d'un amplificateur opérationnel, est linéaire. En effet, à partir d'une tension sinusoïdale  $u_E(t)$  de fréquence  $N$  appliquée à l'entrée de quadripôle, on obtient une tension sinusoïdale de même fréquence. Pour les fréquences inférieures à 1060 Hz le quadripôle est passant. En effet on a :  $G \geq G_0 - 3 \text{ dB}$ , avec  $G_0$  la valeur maximale du gain  $G$  du quadripôle. Par contre, pour les fréquences supérieures à 1060 Hz, le quadripôle est non passant.

Ainsi, le comportement de ce quadripôle, pour les faibles et les hautes fréquences (Fig.10), justifie qu'il s'agit d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure haute  $N_h$ . Ce filtre est dit actif car il renferme, en plus des composants passifs ( $R$  et  $C$ ), un amplificateur opérationnel comme composant actif.

Les figures 9 et 10 confirment qu'un filtre passe-bas actif peut assurer, à coté de la filtration, l'amplification du signal d'entrée. En effet, on note un gain  $G$  de valeur maximale :  $G_0 = 5 \text{ dB}$ , par conséquent, une transmittance de valeur maximale :  $T_0 > 1$ .

### Conclusion

Le quadripôle constitué de deux conducteurs ohmiques de résistances respectives  $R_1$  et  $R_2$  et d'un condensateur de capacité  $C$ , autour d'un amplificateur opérationnel, convenablement polarisé, est un filtre passe-bas actif.

Le filtrage moyennant un filtre passe-bas actif peut être accompagné d'une amplification de la tension d'entrée ( $G_0 > 1$ ).

## 2.2- DÉPHASAGE ET FRÉQUENCE

La courbe de la figure 11, traduit l'évolution du déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E$  en fonction de la fréquence  $N$  du signal d'entrée d'un filtre passe-bas actif.

A partir de cette courbe, on peut préciser que :

- $u_S(t)$  est en avance de phase par rapport à  $u_E(t)$ ,
- $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E = 180^\circ$ , pour les faibles fréquences,
- $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E \approx 90^\circ$  pour les fréquences élevées,
- $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E = 135^\circ$  pour  $N = N_h$ .

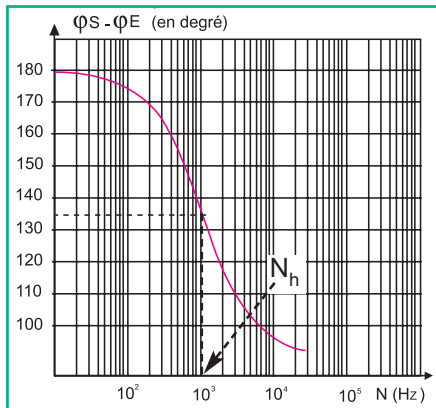


Fig.11 : Variation du déphasage  $\Delta\varphi = f(N)$

## 2.3- FACTEURS DONT DÉPEND LA FRÉQUENCE DE COUPURE D'UN FILTRE ACTIF

On se propose d'étudier expérimentalement les facteurs dont dépend la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas actif.

### Expérience 1

On reprend le montage de la figure 8, constitué, essentiellement de deux conducteurs ohmiques de résistances respectives  $R_1 = 318 \Omega$  et  $R_2 = 180 \Omega$ , d'un condensateur de capacité  $C$  réglable et d'un A.O.P. supposé idéal. Pour les mêmes valeurs de  $R_1$  et  $R_2$  et pour deux valeurs  $C_1 = 0,47 \mu\text{F}$  et  $C_2 = 0,94 \mu\text{F}$  de  $C$ , on réalise deux filtres passe-bas passifs (Fig.12).

Pour chaque filtre, on fait varier la fréquence  $N$  et on trace la courbe de réponse en gain  $G = f(N)$ . Les deux courbes de réponse sont données par les figures 13.a et 13.b.

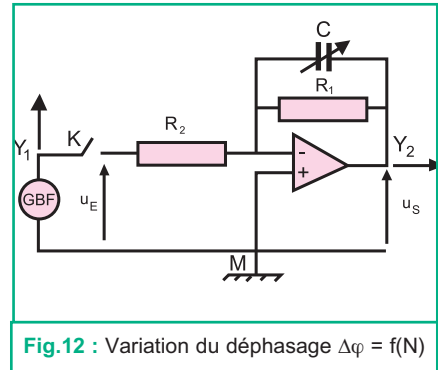


Fig.12 : Variation du déphasage  $\Delta\varphi = f(N)$

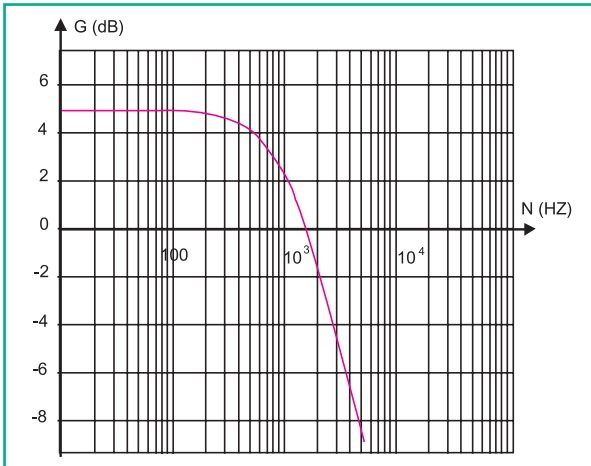


Fig.13a : Courbe de réponse pour  $C_1 = 0,47 \mu\text{F}$

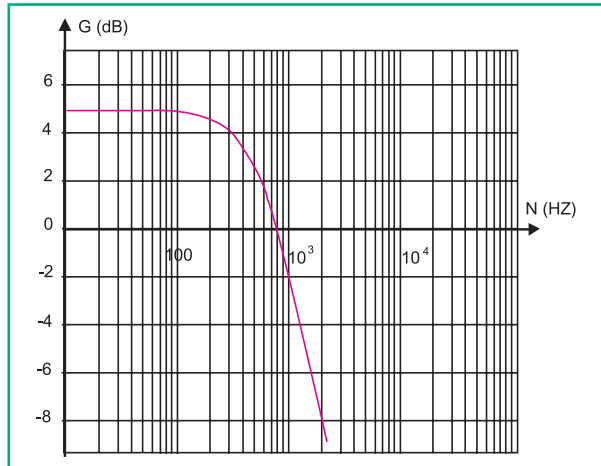


Fig.13b : Courbe de réponse pour  $C_2 = 0,94 \mu\text{F}$

### Questions

- 1°) Par exploitation graphique des figures 13.a et 13.b, déterminer, pour chaque filtre:
  - a- le gain maximal  $G_0$  et la fréquence de coupure haute  $N_h$ ,
  - b- déduire la valeur de la bande passante,
  - c- la pente de l'asymptote oblique de la courbe de réponse.
- 2°) Préciser l'effet de l'augmentation de la valeur de la capacité  $C$  sur la fréquence de coupure  $N_h$  d'un filtre passe-bas actif.

### Constatations

Pour les mêmes valeurs de  $R_1$  et  $R_2$ , et pour une valeur  $C_1 = 0,47 \mu\text{F}$ , on a une fréquence de coupure haute  $N_{h1} = 1060 \text{ Hz}$  et un gain maximal  $G_0 = 5 \text{ dB}$ .



Cependant, la fréquence de coupure haute prend la valeur  $N_{h2} = 530 \text{ Hz}$  pour une valeur  $C_2 = 0,94 \mu\text{F}$  de  $C$ , tandis que  $G_0$  garde la valeur 5 dB. Ainsi, une augmentation de la valeur de  $C$  fait diminuer la valeur de la fréquence  $N_h$  du filtre sans pour autant affecter le gain maximal  $G_0$ .

**Remarque**

La valeur de la pente de l'asymptote oblique de la courbe de réponse reste constante et égale à (- 20 dB) par décade pour les valeurs  $C_1$  et  $C_2$  de  $C$ .

**Expérience 2**

On réalise le montage de la figure 14, constitué d'un A.O.P, d'un conducteur ohmique de résistance  $R_1 = 318 \Omega$ , d'un condensateur de capacité  $C_1 = 0,47 \mu\text{F}$  et d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  réglable.

Pour les mêmes valeurs de  $R_1$  et de  $C_1$ , et pour deux valeurs  $R_2 = 180 \Omega$  et  $R'_2 = 318 \Omega$  de  $R$ , on réalise deux filtres passe-bas actifs. Pour chaque filtre, on fait varier la fréquence  $N$  du signal d'entrée et on trace la courbe de réponse en gain  $G = f(N)$ . Les deux courbes de réponse sont données par les figures 15.a et 15.b.

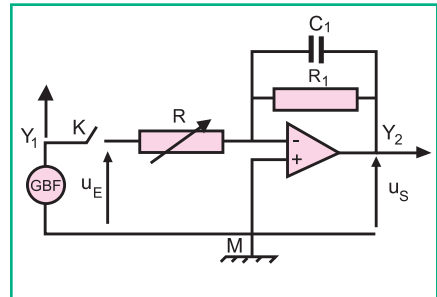


Fig.14 : Filtre passe-bas actif.

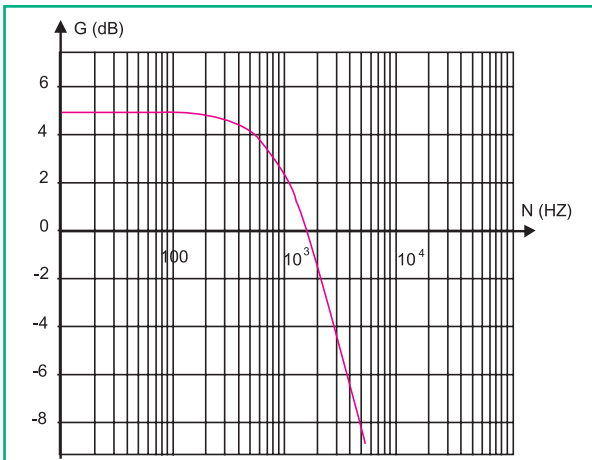


Fig.15a : Courbe de réponse du filtre pour  $R_2 = 180 \Omega$

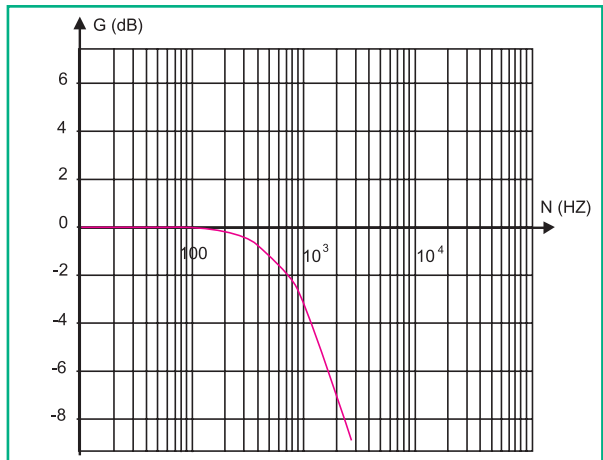


Fig.15b : Courbe de réponse du filtre pour  $R'_2 = 318 \Omega$

**Questions**

- 1°) Par exploitation des courbes de réponse données par les figures 15.a et 15.b, déterminer, graphiquement, pour chaque filtre:
  - a- le gain maximal  $G_0$  et la fréquence de coupure  $N_h$ ,
  - b- déduire la largeur de la bande passante du filtre.
- 2°) La valeur de  $N_h$  dépend-elle de la valeur de la résistance  $R$  du filtre ?
- 3°) Préciser, l'effet de la variation de la valeur de la résistance  $R$  sur le gain maximal  $G_0$  du filtre.

## Constatations

Pour une valeur  $R_2 = 180 \Omega$  de  $R$ , on a une fréquence de coupure  $N_{h1} = 1060 \text{ Hz}$  et un gain maximal  $G_0 = 5 \text{ dB}$ . Cependant, pour une valeur  $R'_2 = 318 \Omega$  de  $R$ , la fréquence de coupure haute  $N_h$  reste inchangée ( $N_{h2} = 1060 \text{ Hz}$ ). Par contre, le gain maximal  $G_0 = 0 \text{ dB}$ . Ainsi, une augmentation de la valeur de la résistance  $R$  ne fait que diminuer le gain maximal  $G_0$  du filtre sans changer la valeur de sa fréquence de coupure  $N_h$ .

## Expérience 3

On réalise le montage de la figure 16, constitué d'un A.O.P, d'un conducteur ohmique de résistance  $R_2 = 180 \Omega$ , d'un condensateur de capacité  $C_1 = 0,47 \mu\text{F}$  et d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  réglable. Pour les mêmes valeurs de  $R_2$  et de  $C_1$ , et pour deux valeurs  $R_1 = 318 \Omega$  et  $R'_1 = 636 \Omega$  de  $R$ , on réalise deux filtres. Pour chaque filtre, on fait varier la fréquence  $N$  du signal d'entrée et on trace la courbe de réponse en gain  $G = f(N)$ . Les deux courbes de réponse sont données par les figures 17.a et 17.b.

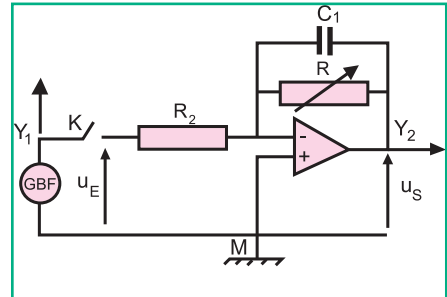


Fig.16: Filtre passe-bas actif avec  $R$  réglable.

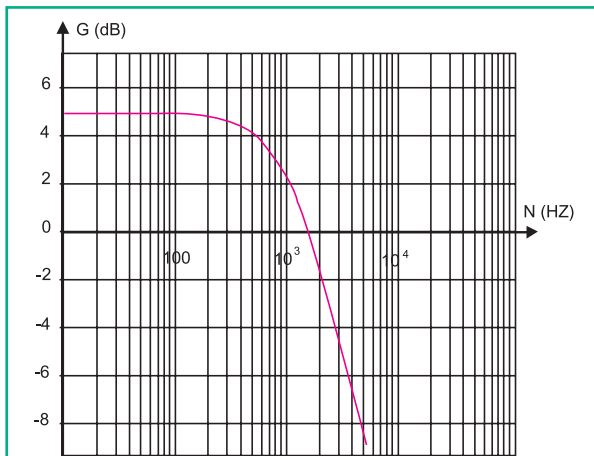


Fig.17a : Courbe de réponse du filtre pour  $R_1 = 318 \Omega$

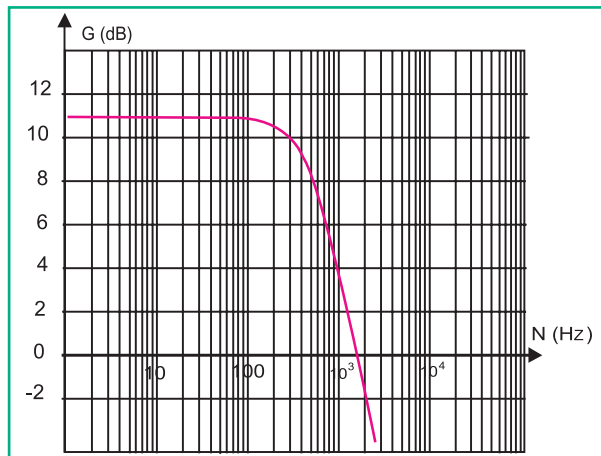


Fig.17b : Courbe de réponse du filtre pour  $R'_1 = 636 \Omega$

## Questions

- 1°) Déterminer, par exploitation des figures 17.a, 17.b et pour chaque filtre :
  - a- le gain maximal  $G_0$ ,
  - b- la fréquence de coupure  $N_h$  et la bande passante.
- 2°) Préciser l'effet de la variation de la valeur de la résistance  $R$ , placée en parallèle avec le condensateur de capacité  $C$  :
  - a- sur le gain maximal  $G_0$  du filtre,
  - b- sur la valeur de la fréquence de coupure  $N_h$ .
- 4°) En se basant sur les résultats des expériences 1, 2 et 3, préciser les facteurs dont dépend la fréquence de coupure haute  $N_h$  d'un filtre actif passe-bas.

## Constatations

Pour une valeur  $R_1 = 318 \Omega$  de  $R$ , on a une fréquence de coupure  $N_{h1} = 1060$  Hz et un gain maximal  $G_0 = 5$  dB. Cependant, pour une valeur  $R'_1 = 636 \Omega$  de  $R$ , on a une fréquence de coupure  $N_{h2} = 532$  Hz et un gain maximal  $G_0 = 11$  dB.

Ainsi, l'augmentation de la valeur de la résistance  $R$ , a pour effet une diminution de la valeur de la fréquence de coupure haute  $N_h$  du filtre et une augmentation de la valeur du gain maximal  $G_0$ .

## Conclusion

La fréquence de coupure  $N_h$  d'un filtre passe-bas actif dépend de la valeur du dipôle RC, parallèle, rebouclé sur l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel.

Le gain maximal  $G_0$  d'un filtre actif est indépendant de la valeur de la capacité du condensateur. Toutefois, ce gain  $G_0$  dépend des valeurs des résistances des conducteurs ohmiques qui constituent le filtre.

## 2.4- ETUDE THÉORIQUE

La figure 18 représente le schéma d'un filtre passe-bas actif alimenté par une tension sinusoïdale:  $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E)$ . On se propose de déterminer l'expression de la fonction de transfert  $T$  de ce filtre. L'amplificateur opérationnel utilisé est supposé idéal.

Ainsi, on a :  $i_+ = i_- = 0$  et  $\varepsilon = 0$ .

D'après la loi des nœuds au point A, on peut écrire :

$$i_2 = i_1 + i_C + i_- \text{ avec } i_- = 0,$$

$$\text{d'où : } i_2 = i_1 + i_C \quad (1)$$

D'autre part, on a :

- $u_C = \frac{q}{C_1}$
- $u_{R1} = R_1 \cdot i_1$ ,
- $u_{R2} = R_2 \cdot i_2$ ,
- $i_C = \frac{dq}{dt}$

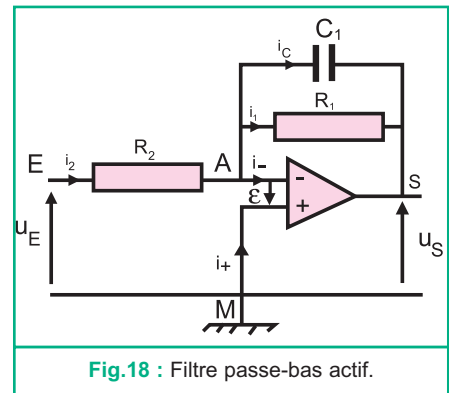


Fig.18 : Filtre passe-bas actif.

En tenant compte de la relation :  $u_C = \frac{q}{C_1}$ , l'expression de  $i_C$  devient :  $i_C = C_1 \frac{du_C}{dt}$ .

Pour la maille d'entrée (EAME), on peut écrire:  $u_E - u_{R2} + \varepsilon = 0$ , avec  $\varepsilon = 0$ .

$$\text{On a donc : } u_E = u_{R2}, \text{ par suite : } i_2 = \frac{u_{R2}}{R_2} \quad (2)$$

Pour la maille de sortie (SAMS) comportant  $R_1$ , on peut écrire :  $u_S + u_{R1} + \varepsilon = 0$

$$\text{Avec } \varepsilon = 0, \text{ on a ainsi : } u_S = -u_{R1}, \text{ par suite : } i_1 = -\frac{u_S}{R_1} \quad (3)$$

Pour la maille de sortie (SAMS) comportant  $C_1$ , on peut écrire :  $u_S + u_C + \varepsilon = 0$

$$\text{Avec } \varepsilon = 0, \text{ on a : } u_S = -u_C, \text{ par suite : } i_C = -C_1 \frac{du_S}{dt} \quad (4)$$

En remplaçant les expressions (2), (3) et (4) dans l'équation (1), on obtient :

$$\frac{u_E}{R_2} = -\frac{u_S}{R_1} - C_1 \frac{du_S}{dt} \quad (5)$$

En multipliant l'équation (5) par  $-(R_2)$ , on aura :  $\frac{R_2}{R_1} u_S + R_2 C_1 \frac{du_S}{dt} = -u_E$  (6)

Etant donné que  $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E)$ , l'équation (6) admet une solution particulière de la forme :  $u_S(t) = U_{Sm} \sin(2\pi Nt + \varphi_S)$ . Afin de déterminer l'expression de la fonction de transfert (ou la transmittance)  $T$  du filtre, on exprime  $u_S$  et  $u_E$ , dans l'équation (6), en fonction du temps et on fait recours à la construction de Fresnel. Ainsi, on aura :

$$\frac{R_2}{R_1} U_{Sm} \sin(2\pi Nt + \varphi_S) + 2\pi N R_2 C_1 U_{Sm} \sin(2\pi Nt + \varphi_S + \frac{\pi}{2}) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E + \pi).$$

Aux termes  $\frac{R_2}{R_1} u_S$ ,  $R_2 C_1 \frac{du_S}{dt}$  et  $(-u_E)$  on associe respectivement les vecteurs de Fresnel :

$\vec{OA}_1$ ,  $\vec{OA}_2$  et  $\vec{OA}$

Ainsi :  $\vec{OA}_1 [ \frac{R_2}{R_1} U_{Sm}, \varphi_S ]$ ,  $\vec{OA}_2 [ 2\pi N R_2 C_1 U_{Sm}, \varphi_S + \frac{\pi}{2} ]$ ,  $\vec{OA} [ U_{Em}, \varphi_E + \pi ]$ .

Avec :  $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 = \vec{OA}$ , on obtient la construction de Fresnel de la figure 19.

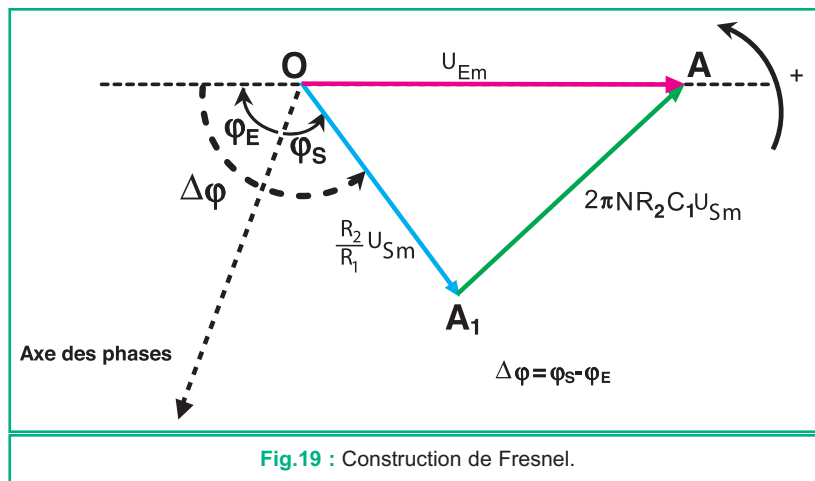


Fig.19 : Construction de Fresnel.

### Expression de la transmittance T

Le triangle  $OA_1A$  est rectangle en  $A_1$ , d'après Pythagore on a :

$$U_{Em}^2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 U_{Sm}^2 + (2\pi N R_2 C_1)^2 U_{Sm}^2, \text{ ce qui donne :}$$

$$U_{Em} = \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + (2\pi N R_2 C_1)^2} \cdot U_{Sm}$$

$$T = \frac{U_{Sm}}{U_{Em}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + (2\pi NR_2 C_1)^2}}$$

$$\text{D'où : } T = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi NR_1 C_1)^2}} \quad (7)$$

Pour les faibles fréquences, on néglige le terme  $2\pi NR_1 C_1$  devant l'unité.

Ainsi, la transmittance  $T$  du filtre atteint sa valeur maximale :  $T_0 = \frac{R_1}{R_2}$

$$\text{Par conséquent, l'expression de } T \text{ prend la forme : } T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + (2\pi NR_1 C_1)^2}} \quad (8)$$

### Expression du gain $G$

A partir de l'expression de la transmittance  $T$ , on peut déduire celle du gain  $G$  du filtre.

Sachant que  $G = 20 \log T$  et en remplaçant  $T$  par son expression (8), on aura :

$$G = 20 \log T_0 - 10 \log [1 + (2\pi NR_1 C_1)^2]. \quad (9)$$

L'expression de la valeur maximale  $G_0$  de  $G$  est :  $G_0 = 20 \log T_0$ , avec,  $T_0 = \frac{R_1}{R_2}$ .

$$\text{Ainsi, } G \text{ peut se mettre sous la forme : } G = G_0 - 10 \log [1 + (2\pi NR_1 C_1)^2]. \quad (10)$$

### Remarque

Le rapport  $\frac{R_1}{R_2}$  peut être supérieur à l'unité et par suite, on peut avoir un gain maximal  $G_0$  positif.

### Fréquence de coupure et bande passante

Le filtre est passant pour toute fréquence  $N$  telle que :  $T \geq \frac{T_0}{\sqrt{2}}$  ou bien  $G \geq G_0 - 3 \text{ dB}$ .

$$\text{Or, } G = G_0 - 10 \log [1 + (2\pi NR_1 C_1)^2],$$

$$\text{d'où : } G_0 - 10 \log [1 + (2\pi NR_1 C_1)^2] \geq G_0 - 3 \text{ dB.}$$

$$\text{Par suite : } 10 \log [1 + (2\pi NR_1 C_1)^2] \leq 3, \text{ par suite : } 2\pi NR_1 C_1 \leq 1.$$

$$\text{Ce qui implique : } N \leq \frac{1}{2\pi R_1 C_1}.$$

Ainsi, le filtre est passant pour toute fréquence  $N \leq N_h$  avec  $N_h = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$ .

$N_h$  est appelée la fréquence de coupure haute du filtre. L'étude théorique permet de confirmer qu'il s'agit bien d'un filtre passe-bas actif dont la bande passante à 3 dB, est :  $[0, N_h]$ .

### Conclusion

Avec des composants passifs (R,C) et un amplificateur opérationnel, convenablement polarisé, on peut réaliser un filtre passe-bas actif caractérisé par:

- une transmittance  $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + (2\pi N R_1 C_1)^2}}$ ,
- un gain  $G = G_0 - 10 \log [1 + (2\pi N R_1 C_1)^2]$ , avec  $G_0 = 20 \log \frac{R_1}{R_2}$ ,
- une fréquence de coupure haute  $N_h = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$ , avec  $R_1$  la résistance du conducteur ohmique rebouclé sur l'entrée inverseuse de l'A.O.P.

Contrairement à un filtre passif, un filtre actif peut assurer un filtrage accompagné d'une amplification du signal d'entrée.

## 3 FILTRE PASSE-HAUT

On sait qu'un quadripôle RC est un filtre passe-bas passif.

Cependant, qu'en est-il d'un quadripôle CR ?

Un tel quadripôle est-il un filtre électrique ?

### 3.1- ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

On réalise le montage schématisé par la figure 20, constitué d'un condensateur de capacité  $C = 0,47\mu\text{F}$  et d'un conducteur ohmique de résistance  $R = 318 \Omega$ . Un GBF délivrant une tension sinusoïdale de fréquence  $N$  réglable alimente l'entrée du quadripôle.

La tension d'entrée du quadripôle CR est :

$$u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi N t + \varphi_E).$$

Tandis que  $u_S(t)$  est la tension de sortie du quadripôle.

Un oscilloscope bicourbe, convenablement branché (Fig.20), permet de visualiser la tension d'entrée  $u_E(t)$  sur la voie  $Y_1$  et la tension de sortie  $u_S(t)$  sur la voie  $Y_2$ .

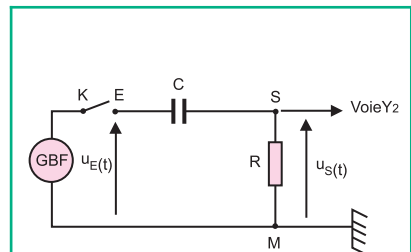


Fig.20 : Quadripôle CR excité par une tension sinusoïdale.

### Expérience 1

On règle l'amplitude du GBF à la valeur  $U_{Em} = 5V$ . Sur l'écran de l'oscilloscope, on visualise, simultanément, les tensions  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$ .

Pour deux fréquences  $N_1 = 700$  Hz et  $N_2 = 1200$  Hz du GBF, on obtient les chronogrammes des figures 21a et 21b.

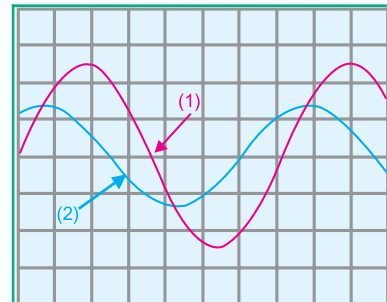


Fig.21.a :  $u_E$  et  $u_S$  pour  $N_1 = 700$  Hz

### Expérience 2

On fait varier la fréquence  $N$  du GBF et pour différentes valeurs de  $N$ , on note l'amplitude  $U_{Sm}$  de la tension de sortie  $u_S(t)$ .

Par exploitation des résultats de mesures, on trace les courbes  $G(N)$  et  $\Delta\varphi = f(N)$ , données par les figures 22 et 23.

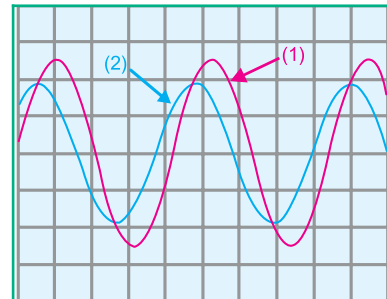


Fig.21.a :  $u_E$  et  $u_S$  pour  $N_2 = 1200$  Hz

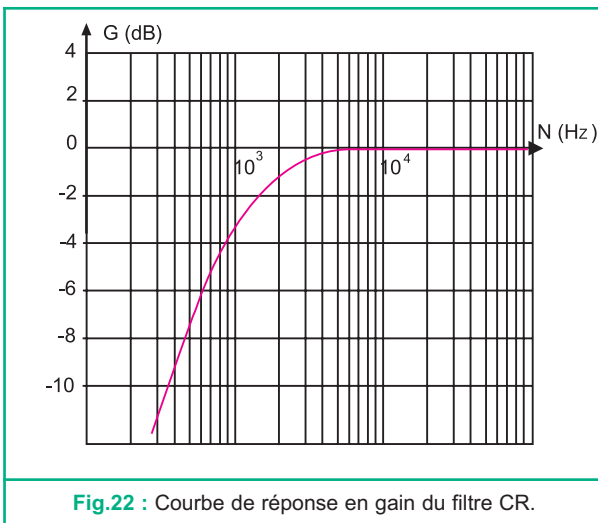


Fig.22 : Courbe de réponse en gain du filtre CR.

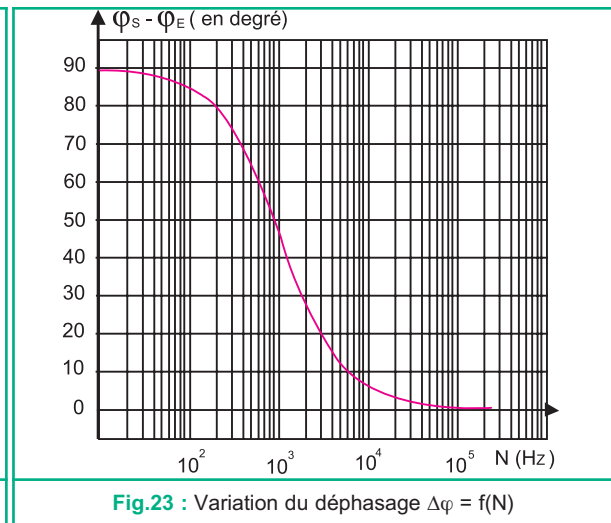


Fig.23 : Variation du déphasage  $\Delta\varphi = f(N)$

### Questions

1°) Par exploitation des oscillogrammes des figures 21a et 21b :

- a- montrer que le quadripôle considéré est linéaire,
- b- comparer les amplitudes des tensions  $u_E(t)$  et  $u_S(t)$  pour les fréquences  $N_1$  et  $N_2$ ,
- c- préciser le signe du déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E$ , où  $\varphi_S$  est la phase initiale de  $u_S(t)$ .

2°) A l'aide de la courbe de réponse de la figure 22 :

- a- préciser le comportement du quadripôle CR pour les basses et les hautes fréquences,
- b- déterminer la valeur maximale  $G_0$  de  $G$  et en déduire la valeur maximale  $T_0$  de  $T$ .

## Interprétation

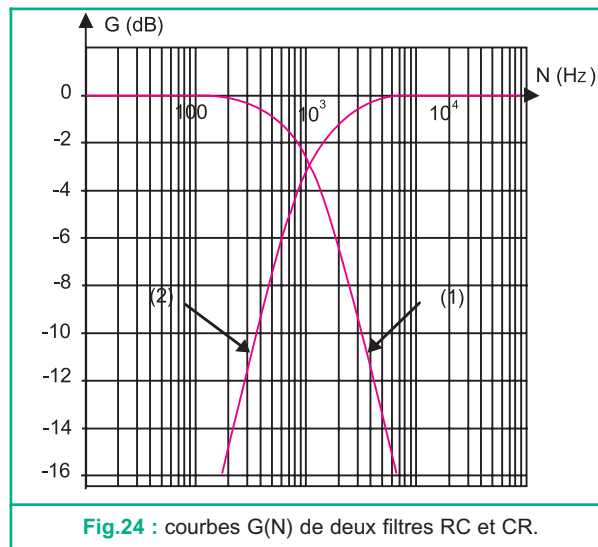
Le quadripôle CR est linéaire. En effet, à partir d'une tension d'entrée sinusoïdale  $u_E(t)$  de fréquence  $N$ , on obtient à travers ce quadripôle, une tension de sortie  $u_S(t)$  sinusoïdale et de même fréquence  $N$ . D'autre part, le comportement du quadripôle CR pour les faibles et les hautes fréquences justifie bien qu'il s'agit d'un filtre électrique. L'exploitation de la courbe de réponse en gain (fig.22), confirme que le gain  $G$  du quadripôle dépend de la fréquence  $N$  du signal d'entrée. Le gain  $G$  du filtre CR est maximal ( $G_0 = 0$  dB) pour les fréquences élevées ( $N \geq 10^4$  Hz). Cependant, pour les faibles fréquences ( $N < 10^3$  Hz), le gain  $G$  du filtre est inférieur à:  $G_0 - 3$  dB.

Ainsi, le filtre CR est passant pour les hautes fréquences et il est transparent pour les basses fréquences. Un tel filtre est dit filtre passif passe-haut. Il est caractérisé par une fréquence de coupure basse  $N_b$  et une bande passante :  $[N_b, \infty [$ .

Pour un filtre passe-haut, la tension de sortie  $u_S(t)$  est en avance de phase par rapport à  $u_E(t)$ . Aux hautes fréquences, ce déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E$  tend vers zéro (Fig. 23).

## Remarques

- A la fréquence de coupure la valeur du déphasage  $\Delta\varphi = 45^\circ$ .
- La fréquence de coupure haute  $N_h$  d'un filtre RC passe-bas est égale à la fréquence de coupure basse  $N_b$  d'un filtre CR passe-haut, dans le cas où les deux filtres sont réalisés avec les mêmes composants  $R$  et  $C$  (Fig.24).



## 3.2- ÉTUDE THÉORIQUE

### Expression de $u_S(t)$

La figure 25 représente le schéma simplifié d'un filtre passe-haut .

On désigne par  $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E)$  la tension d'entrée du filtre, et par  $u_S(t)$  sa tension de sortie. On se propose de déterminer l'expression de la transmittance  $T$  d'un tel filtre.



Par application de la loi des mailles on a :

$$u_R(t) + u_C(t) - u_E(t) = 0 \quad (1)$$

D'autre par on a :

$$\bullet u_s = Ri,$$

$$\bullet i = \frac{u_s}{R}, \quad (2)$$

$$\bullet u_C = \frac{q}{C} \quad (3)$$

$$\bullet q = \int i dt \quad (4)$$

$$\text{A partir de la relation (2) on obtient: } q = \frac{1}{R} \int u_s dt. \quad (5)$$

Ainsi, la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur s'écrit :

$$u_C = \frac{1}{RC} \int u_s dt. \quad (6)$$

Afin d'établir l'équation différentielle, on exprime l'équation (1)

$$\text{en fonction de } u_s, \text{ on obtient : } u_s + \frac{1}{RC} \int u_s dt = u_E \quad (7)$$

Comme  $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E)$ , l'équation différentielle (7)

admet une solution particulière de la forme :

$$u_s(t) = U_{sm} \sin(2\pi Nt + \varphi_s). \quad (8)$$

En remplaçant  $u_s$  par son expression (8), l'équation différentielle (7) devient :

$$U_{sm} \sin(2\pi Nt + \varphi_s) + \frac{U_{sm}}{2\pi NRC} \sin(2\pi Nt + \varphi_s - \frac{\pi}{2}) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E). \quad (9)$$

### Expression de la transmittance T

Pour établir l'expression de  $U_{sm}$  et par suite, celle de la transmittance T, on fait recours à la construction de Fresnel.

Aux fonctions sinusoïdales suivantes:

$$U_{sm} \sin(2\pi Nt + \varphi_s), \quad \frac{U_{sm}}{2\pi NRC} \sin(2\pi Nt + \varphi_s - \frac{\pi}{2}) \text{ et } U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E),$$

on associe respectivement les vecteurs de Fresnel :

$$\vec{OA}_1, \vec{OA}_2 \text{ et } \vec{OA}. \text{ On aura ainsi : } \vec{OA}_1 [U_{sm}, \varphi_s],$$

$$\vec{OA}_2 \left[ \frac{U_{sm}}{2\pi NRC}, \varphi_s - \frac{\pi}{2} \right] \text{ et } \vec{OA} [U_{Em}, \varphi_E].$$

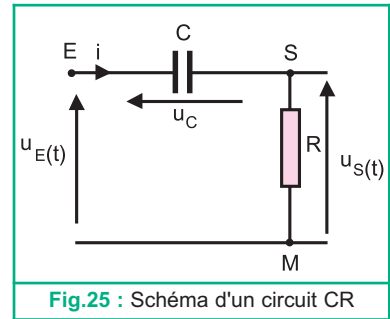
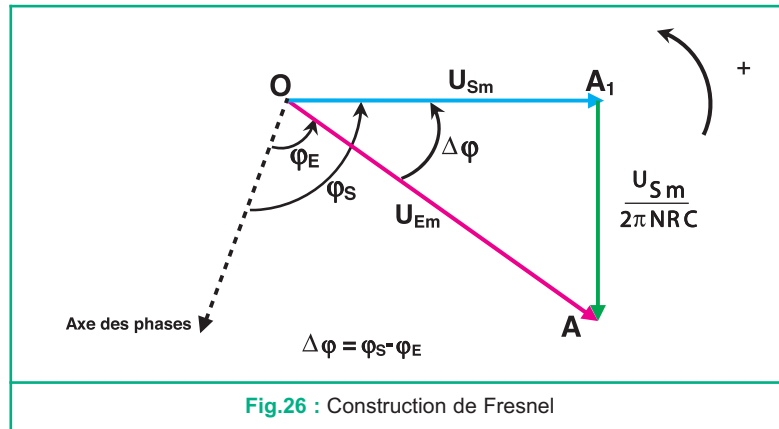


Fig.25 : Schéma d'un circuit CR

On obtient la construction de Fresnel de la figure 26, avec  $\vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 = \vec{OA}$ .



Pour le triangle  $OA_1A$ , rectangle en  $A_1$ , on peut écrire :

$$(U_{Em})^2 = (U_{Sm})^2 + \left( \frac{U_{Sm}}{2\pi NRC} \right)^2$$

ce qui donne :

$$U_{Em} = \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2\pi NRC} \right)^2} \cdot U_{Sm}$$

D'où :

$$T = \frac{U_{Sm}}{U_{Em}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2}}}$$

Aux hautes fréquences, la transmittance  $T$  prend sa valeur maximale  $T_0 = 1$ . Par conséquent, l'expression de  $T$  peut se mettre sous la forme :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2}}}, \text{ avec } T_0 = 1. \quad (10)$$

### Expression du gain

Sachant que  $G = 20 \log T$ , l'exploitation de l'expression (10) donne :

$$G = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2}}}$$

L'expression simplifiée du gain est :

$$G = -10 \log \left( 1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2} \right) \quad (11)$$

L'expression (11), permet de confirmer que pour toute valeur de  $N$  le gain  $G$  du filtre CR prend une valeur négative ou nulle ( $G \leq 0$ ). Aux hautes fréquences, il atteint sa valeur maximale ( $G_0 = 0$ ).

## Bande passante

La bande passante à 3 dB de ce filtre est telle que :  $G \geq G_0 - 3 \text{ dB}$ .

$$\text{Ainsi : } \log\left(1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2}\right) \leq 0,3, \text{ d'où } N \geq \frac{1}{2\pi RC}.$$

Par conséquent, le filtre est passant pour toute fréquence  $N \geq N_b$ , avec  $N_b = \frac{1}{2\pi RC}$ .

$N_b$  est appelée la fréquence de coupure basse du filtre passe-haut CR. Par suite, la bande passante de ce filtre est :  $[N_b, \infty[$ .

## Déphasage de $u_S(t)$ par rapport à $u_E(t)$

D'après la construction de Fresnel, le déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E$  est positif ( $0 < \Delta\varphi < 90^\circ$ ). Ainsi, pour un filtre passe-haut, la tension de sortie  $u_S(t)$  évolue en avance de phase par rapport à la tension d'entrée  $u_E(t)$ .

$$\text{En effet, par exploitation de la figure 26, on obtient : } \operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\overrightarrow{\|A_1A\|}}{\overrightarrow{\|OA_1\|}}.$$

$$\text{Ainsi : } \operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{1}{2\pi NRC} = \frac{N_b}{N}, \text{ avec } N_b = \frac{1}{2\pi RC}.$$

## Conclusion

Le quadripôle CR est un filtre passe-haut passif. Il est caractérisé par :

- une transmittance  $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2}}}$ , avec  $T_0 = 1$ ,
- un gain  $G = -10 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2}\right)$ ,
- une fréquence de coupure basse :  $N_b = \frac{1}{2\pi RC}$ .

La tension de sortie d'un filtre passif passe-haut est toujours en avance de phase par rapport à sa tension d'entrée.

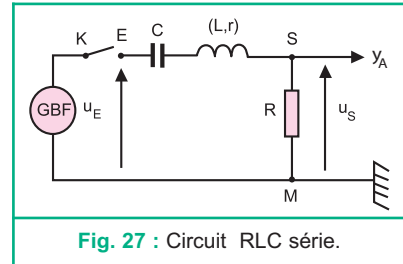
## 4 FILTRE PASSE-BANDE

On sait qu'un quadripôle CR est un filtre passe-haut passif. Cependant, quel serait l'effet de l'insertion d'une bobine sur la réponse d'un tel filtre.

### 4.1- ETUDE EXPÉRIMENTALE

On considère le montage du circuit électrique série, schématisé par la figure 27, constitué d'un condensateur de capacité  $C = 0,47 \mu\text{F}$ , d'une bobine d'inductance  $L = 0,2 \text{ H}$  et de résistance interne  $r = 12 \Omega$  et d'un conducteur ohmique de résistance  $R = 50 \Omega$ .

Ce circuit est considéré comme étant un quadripôle de tension d'entrée  $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_E)$  et de tension de sortie  $u_S(t)$ . Un GBF, de fréquence  $N$  réglable alimente l'entrée EM de ce quadripôle.

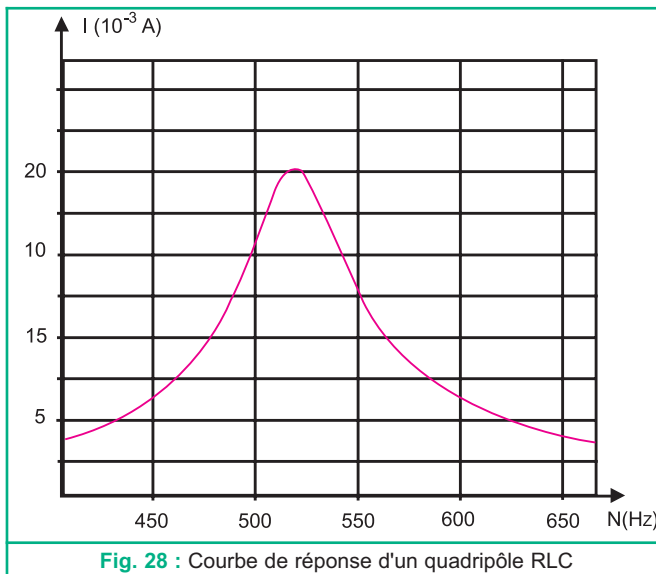


#### Remarque

La figure 27 représente le montage d'un circuit RLC série soumis à une tension excitatrice sinusoïdale (chapitre 6).

#### Expérience

Pour une tension d'entrée d'amplitude constante  $U_{Em} = 2\text{V}$ , on fait varier la fréquence  $N$  et pour chaque valeur de  $N$  on relève la tension efficace  $U_R$  aux bornes de  $R$ . L'exploitation des résultats de l'expérience permettent de tracer la courbe de réponse, donnée par la figure 28, traduisant l'évolution de l'intensité efficace  $I$  du courant électrique en fonction de  $N$ .



**Questions**

1°) Par exploitation de la figure 28 :

- a- décrire, brièvement, l'allure de la courbe de réponse  $I = f(N)$ .
- b- déduire que le quadripôle RLC est un filtre électrique.
- c- compléter le tableau suivant :

<b>N en Hz</b>	450	475	500	525	550	575	600	650
<b>I en mA</b>								
<b>U<sub>s</sub> en V</b>								
<b>T</b>								

2°) Tracer la courbe  $T = h(N)$ .

- 3°) a- Déterminer les fréquences pour lesquelles on a :  $T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$
- b- Déduire de ce qui précède la nature de ce filtre.

**Interprétation**

La courbe de réponse  $I = f(N)$  du quadripôle RLC atteint sa valeur maximale pour une fréquence  $N$  égale à la fréquence propre  $N_0$  du circuit; c'est la résonance d'intensité.

Dans un quadripôle RLC et pour une tension d'entrée  $U_{Em}$  constante, l'intensité efficace  $I$  du courant et par suite l'amplitude  $U_{Sm}$  de la tension de sortie varient en fonction de la fréquence  $N$  (fig.28). Ainsi, le quadripôle RLC se comporte comme un filtre.

Ce filtre est passant pour les fréquences proches de  $N_0$  (centrées sur  $N_0$ ). Cependant, pour les faibles et les grandes fréquences, il est non passant. Par conséquent, un tel filtre est appelé : filtre passe-bande.

**4.2- BANDE PASSANTE ET FRÉQUENCES DE COUPURE**

En se basant sur le fait que  $U_R = R.I$ , d'une part et que  $T = \frac{U_{Sm}}{U_{Em}}$ , d'autre part, on obtient la courbe de réponse  $T = f(N)$  du filtre RLC, donnée par la figure 29.

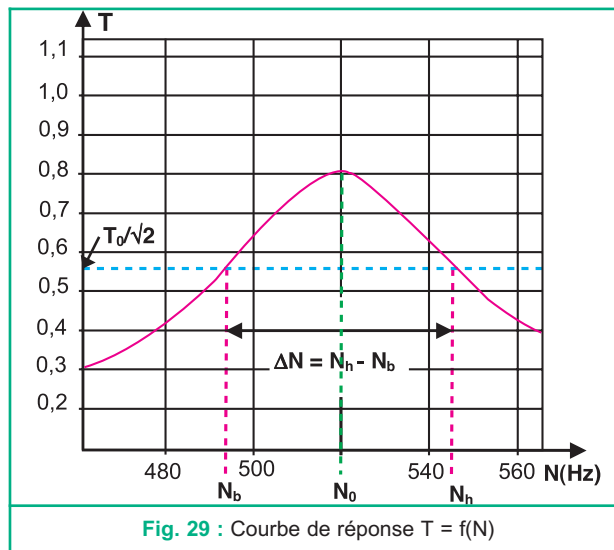


Fig. 29 : Courbe de réponse  $T = f(N)$

Le filtre RLC est caractérisé par deux fréquences de coupure notés  $N_b$  et  $N_h$  pour lesquelles la transmittance est :  $T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ . Les fréquences  $N_b$  et  $N_h$  sont respectivement les fréquences de coupure basse et haute du filtre.

Par conséquent, le filtre RLC est appelé filtre passe-bande, car il est passant dans le domaine de fréquences limité par  $N_b$  et  $N_h$ . Par suite, sa bande passante est :  $[N_b, N_h]$ .

### Remarque

La détermination des valeurs des fréquences de coupure et celle de la bande passante d'un filtre passe-bande peut se faire par exploitation de la courbe de réponse  $I = f(N)$ .

## 4.3- CARACTÉRISTIQUES D'UN FILTRE PASSE-BANDE

Un filtre RLC passe-bande est caractérisé par :

- une transmittance  $T = \frac{T_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{N}{N_0} - \frac{N_0}{N}\right)^2}}$  avec  $T_0 = \frac{R}{R+r}$  et  $r$  la résistance de la bobine,
- une fréquence propre:  $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ,
- une fréquence de coupure basse:  $N_b = \frac{N_0}{2Q} \left[-1 + \sqrt{1+4Q^2}\right]$ ,
- une fréquence de coupure haute:  $N_h = \frac{N_0}{2Q} \left[1 + \sqrt{1+4Q^2}\right]$ .

Dans ces expressions,  $Q$  est le facteur de surtension du circuit.

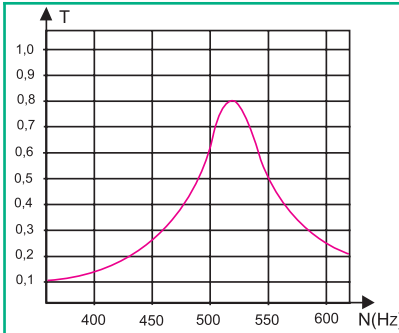
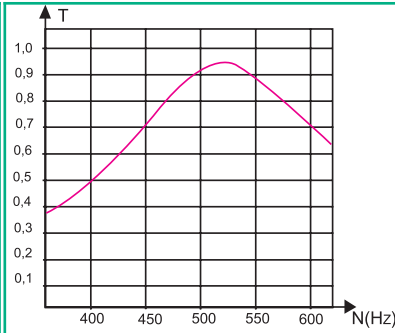
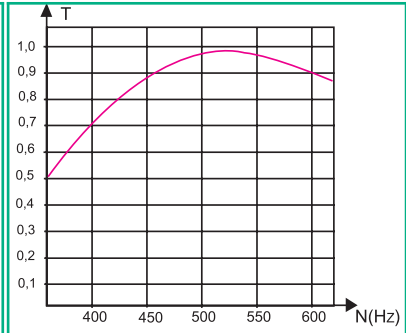
La transmittance  $T$  du filtre est maximale pour  $N = N_0$  et a pour expression :  $T_0 = \frac{R}{R+r}$ .

Par conséquent  $T \leq 1$  pour toute valeur de  $N$ . Ainsi, le filtre RLC passe-bande est généralement un atténuateur de tension.

## 4.4- SÉLECTIVITÉ D'UN FILTRE

### Expérience

On reprend le montage de la figure 27, et on change la valeur de la résistance  $R$  du circuit. Pour chacune des valeurs :  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$  et  $R_3 = 800 \Omega$ , de  $R$ , on fait varier la fréquence  $N$  du GBF et on trace la courbe de réponse  $T = f(N)$  du filtre ainsi constitué. Les courbes de réponse sont données par les figures 30a, 30b et 30c.


**Fig.30a** :  $T = f(N)$  pour  $R_1 = 50 \Omega$ 

**Fig.30b** :  $T = f(N)$  pour  $R_2 = 200 \Omega$ 

**Fig.30c** :  $T = f(N)$  pour  $R_3 = 800 \Omega$ 

### Questions

- 1°) Exprimer la largeur de la bande passante  $\Delta N = N_h - N_b$  en fonction de  $N_0$  et  $Q$ .
- 2°) Par exploitation des courbes de réponse, déterminer graphiquement pour chaque valeur de  $R$ , la fréquence propre  $N_0$  et la largeur de la bande passante  $\Delta N = N_h - N_b$ .
- 3°) Calculer le rapport  $\frac{N_0}{N}$ , pour chaque valeur de  $R$ .
- 4°) Préciser l'effet de la valeur de la résistance sur le rapport  $\frac{N_0}{N}$ .

### Constatations

La courbe de réponse  $T = f(N)$  du filtre RLC, pour une fréquence  $N_0 = 520$  Hz et une résistance  $R_1 = 50 \Omega$ , est étroite. Ainsi, le filtre est passant dans un domaine étroit de fréquences ( $N_b = 495$  Hz,  $N_h = 545$  Hz). La résonance d'intensité, dans ce cas, est dite aigue et le filtre est dit sélectif. Cependant, pour la même fréquence  $N_0$  et pour une résistance  $R_3 = 800 \Omega$ , la courbe de réponse  $T = f(N)$  du filtre est aplatie. Dans ce cas, le filtre est caractérisé par une bande passante dont la largeur est grande par rapport à  $N_0$  ( $N_b = 288$  Hz,  $N_h = 935$ Hz). Par suite, le filtre est dit non sélectif.

### Définition

Un filtre électrique passe-bande est dit sélectif lorsque la largeur de sa bande passante  $\Delta N = N_h - N_b$  est nettement petite par rapport à sa fréquence propre  $N_0$  :  $\Delta N \ll N_0$ .

A partir des expressions de  $N_b$  et  $N_h$  en fonction de  $N_0$  et  $Q$ , on montre que :  $\Delta N = \frac{N_0}{Q}$ ,

avec  $\Delta N$  la largeur de la bande passante et  $N_0$  la fréquence propre du filtre. Pour  $N_0$  donné, on peut confirmer que la largeur de la bande passante du filtre est d'autant plus étroite que le terme  $Q$  est grand. Par conséquent, le filtre est plus sélectif.

En effet, pour  $Q \gg 1$ , on a :  $\Delta N \ll N_0$

En conclusion, le facteur de surtension  $Q$ , appelé aussi facteur de qualité du filtre, caractérise l'acuité de la résonance. En effet pour :

- $Q \gg 1$ , le circuit est sélectif et la résonance est aigue,
- $Q \approx 1$ , le circuit n'est pas sélectif et la résonance est floue.

**Remarque**

Le facteur de qualité  $Q$  d'un filtre passe-bande à pour expression:  $Q = \frac{2\pi N_0 L}{R_t} = \frac{1}{2\pi N_0 R_t C}$ .  
 $R_t$  est la résistance totale du filtre RLC.

**Conclusion**

Le quadripôle RLC série, monté de façon que la tension de sortie soit aux bornes du résistor, est un filtre passe-bande. Il est caractérisé par une fréquence de coupure basse  $N_b$  et une fréquence de coupure haute  $N_h$ . Ce filtre est passant dans un domaine de fréquences limité par  $N_b$  et  $N_h$ . La largeur de sa bande passante est :  $\Delta N = N_h - N_b$ .

Un filtre électrique est sélectif lorsque la valeur du facteur de qualité  $Q$  est grande devant l'unité. Pour une valeur de  $Q$  inférieure ou égale à l'unité le filtre est non sélectif, et ne privilégie aucune fréquence.

## 5 APPLICATIONS DES FILTRES

Les applications des filtres électriques sont nombreuses et multiples dans plusieurs domaines. En effet, en acoustique, en télécommunication, en électronique et en mécanique les filtres électriques font partie des fonctions très employées. On cite essentiellement l'émission et la réception radio ou télévision, la correction audio ou vidéo, l'analyse des spectres, l'antiparasitage, la distortiométrie et la production de signaux. Sans filtre ADSL (liaison numérique à débit asymétrique), le téléphone reçoit directement toutes les fréquences. Ainsi, sur la même ligne téléphonique, peuvent passer, simultanément, une conversation téléphonique (basses fréquences audibles) et le signal IP (Internet Protocol) provenant d'un serveur de sites web, à haut débit.

Le filtre ADSL va séparer les fréquences et ne donner au téléphone que les fréquences qui le concerne, c'est-à-dire les fréquences basses. De même, il ne va donner au modem ADSL que les fréquences hautes.

En acoustique, les filtres passe-bas et passe-haut sont utilisés comme atténuateurs des composantes graves et aigües d'un signal audio. Les filtres passe-bande sont utilisés pour éliminer le bruit d'un signal.

En radiocommunication, un filtre passe-bande permet de sélectionner la fréquence radio écoutée. On l'utilise aussi pour la sélection des vibrations sonores à détecter par un microphone.

En Hi Fi, les filtres sont à la base des égaliseurs et des tables de mixage pour la correction, la diminution ou l'augmentation du volume sonore de certaines bandes de fréquences d'un son.

De même, la reproduction fidèle des sons, grâce à l'emploi de plusieurs haut-parleurs différents (puisque'un seul ne peut reproduire que les sons compris dans un domaine restreint de fréquences), devient possible à l'aide des filtres qui séparent les fréquences correspondant, par exemple, aux graves, aux médiums, aux aigus. Ces fréquences peuvent être amenées facilement à des haut-parleurs distincts.





# L'essentiel

- Les filtres passifs sont caractérisés par une transmittance  $T \leq 1$  et un gain  $G \leq 0$ ,  $\forall N$ .
- Un filtre actif peut avoir un gain positif et assurer une amplification du signal d'entrée.
- Un filtre passe-bas est passant pour les fréquences inférieures à sa fréquence de coupure haute  $N_h$ .
- Le filtre RC est un filtre passe-bas passif, caractérisé par :

- une transmittance  $T = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi NRC)^2}}$ ,

- une fréquence de coupure haute  $N_h = \frac{1}{2\pi RC}$ .

- Un filtre passe-bas actif est caractérisé par :

- une transmittance  $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + (2\pi NR_1C_1)^2}}$  avec  $T_0 = \frac{R_1}{R_2}$

- une fréquence de coupure haute :  $N_h = \frac{1}{2\pi R_1C}$ .

- Un filtre passe-haut élimine les fréquences inférieure à sa fréquence de coupure basse  $N_b$ .
- Le filtre CR est un filtre passe-haut passif caractérisé par :

- une transmittance :  $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2}}}$ , avec  $T_0 = 1$ ,

- une fréquence de coupure basse :  $N_b = \frac{1}{2\pi RC}$ .

- Un filtre passe-bande est caractérisé par une fréquence de coupure basse  $N_b$  et une fréquence de coupure haute  $N_h$ .
- La largeur de la bande passante d'un filtre passe-bande est :  $\Delta N = N_h - N_b$ .
- Un filtre électrique est sélectif pour:  $\Delta N \ll N_0$ .

# Exercices

## Exercice résolu

### ÉNONCÉ

On considère le montage de la figure 1, constitué d'un filtre CR, dont la tension d'entrée est  $u_E(t)$  et la tension de sortie  $u_S(t)$ . Un générateur BF, impose à l'entrée du filtre une tension sinusoïdale :  $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt + \frac{\pi}{2})$ , d'amplitude constante. On donne :  $R = 320 \Omega$  et  $C = 0,47 \mu\text{F}$ .

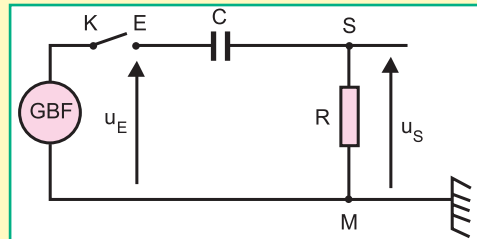


Fig. 1

- 1°) Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de  $u_S(t)$ .
- 2°) a- Déterminer l'expression de la transmittance  $T$  et du gain  $G$  à  $-3 \text{ dB}$  du filtre.  
b- Montrer qu'il s'agit d'un filtre passe-haut.
- 3°) Pour  $U_{Em} = 2\text{V}$ , on fait varier la fréquence  $N$  de la tension d'entrée et on note la valeur  $U_{Sm}$  de la tension de sortie. Par exploitation du tableau de valeurs, on trace la courbe de réponse en gain du filtre, donnée par la figure 2.

Déterminer, graphiquement :

- a- le gain maximal  $G_0$  de  $G$  et en déduire la valeur de  $T_0$ ,
- b- la fréquence de coupure  $N_b$  du filtre et justifier sa nature.
- 4°) Déterminer pour  $N = 10^3 \text{ Hz}$ , la valeur de l'amplitude  $U_{Sm}$  et celle de la phase initiale  $\varphi_S$  de  $u_S(t)$ .
- 5°) Préciser, l'effet de l'augmentation de la valeur de la résistance du conducteur ohmique sur la réponse du filtre.

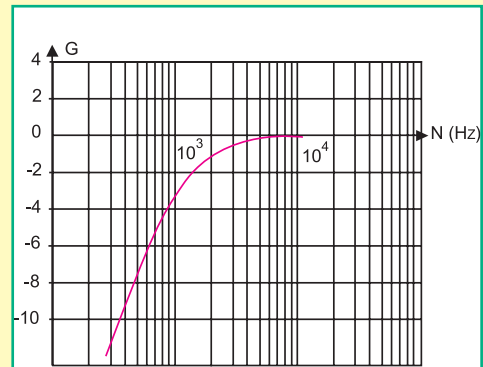


Fig. 2

**SOLUTION**
**Etude théorique**

1°) Par application de la loi des mailles au schéma de la figure 3, on obtient :  $u_R(t) + u_C(t) - u_E(t) = 0$

D'autre part on a :  $u_S = Ri$ , ce qui donne  $i = \frac{u_S}{R}$ .

L'expression de  $q$  en fonction de  $i$  est  $q = \int i dt$ .

Ce qui donne :  $q = \frac{1}{R} \int u_S dt$ .

Par suite, la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur s'écrit :  $u_C = \frac{1}{RC} \int u_S dt$ .

En exprimant les différentes tensions en fonction de  $u_S(t)$  on obtient :  $u_S + \frac{1}{RC} \int u_S dt = u_E$ .

2°) Pour déterminer l'expression de la transmittance, on fait recours à la construction de Fresnel.

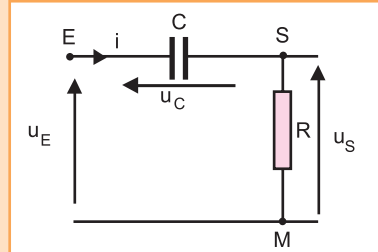


Fig. 3 : Schéma du filtre CR

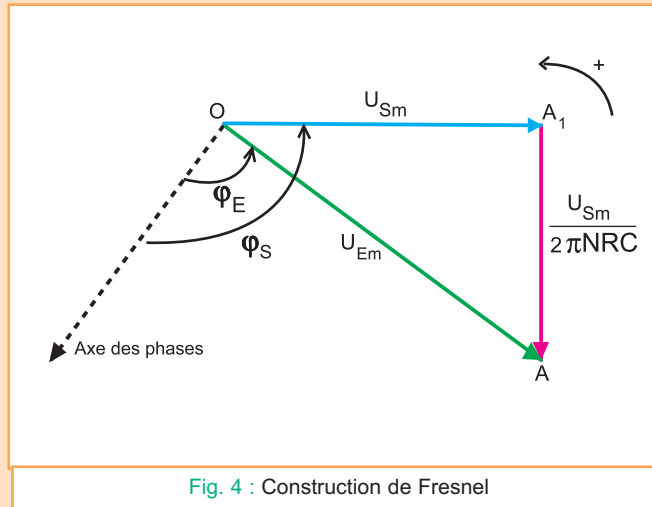


Fig. 4 : Construction de Fresnel

Dans le triangle  $OA_1A$ , on peut écrire :  $(U_{Em})^2 = (U_{Sm})^2 + \left(\frac{U_{Sm}}{2\pi NRC}\right)^2$ ,

ce qui donne :  $U_{Em} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi NRC}\right)^2} \cdot U_{Sm}$ .

D'où :  $T = \frac{U_{Sm}}{U_{Em}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2}}}$ .

D'autre part, le gain  $G$  est par définition  $G = 20 \log T$ , ce qui donne en remplaçant  $T$  par son expression :  $G = -10 \log \left( 1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2} \right)$ .

D'après l'expression de  $T$  et pour les faibles valeurs de  $N$ , le terme  $\frac{1}{(2\pi NRC)^2}$  est grand devant l'unité. Par suite,  $T$  tend vers zéro et l'atténuation du signal d'entrée est importante.

Pour les grandes valeurs de  $N$ , le terme  $\frac{1}{(2\pi NRC)^2}$  est négligeable devant l'unité.

Par suite, la transmittance  $T$  tend vers 1, le signal ne subit pratiquement pas d'atténuation appréciable. Ainsi, il s'agit d'un filtre opaque (non passant) pour les faibles fréquences et transparent (passant) pour les fréquences élevées, c'est un filtre est passe-haut.

3°) a-  $G_0 = 0$  dB et par suite  $T_0 = 1$ .

b- la fréquence de coupure basse  $N_b = 1020$  Hz. En effet, il s'agit d'un filtre passe-haut, puisque pour les faibles fréquences on a un gain  $G < G_0 - 3$  dB. Par contre pour  $N > N_b$ , le gain  $G$  vérifie :  $G > G_0 - 3$  dB.

4°) Pour  $N = 10^3$  Hz, on a un gain  $G$  pratiquement égale à -3 dB. Ainsi,  $20 \log T = -3$  dB.

Cela donne :  $T = \frac{U_{Sm}}{U_{Em}} = 0,71$ . De cette expression, on tire :  $U_{Sm} = T \cdot U_{Em} = 1,42$  V .

On a :  $\varphi_S = \Delta\varphi + \frac{\pi}{2}$ , d'autre part,  $\text{tg}(\Delta\varphi) = \text{tg}(\varphi_S - \varphi_E) = \frac{1}{2\pi NRC}$  .

$\text{tg}(\Delta\varphi) = 1,06 \Rightarrow \Delta\varphi = 46,6^\circ$  d'où  $\varphi_S = 136,6^\circ$ .

5°) la fréquence de coupure basse du filtre a pour expression :  $N_b = \frac{1}{2\pi RC}$  .

Par conséquent, une augmentation de  $R$  a pour effet la diminution de la valeur de la fréquence de coupure  $N_b$ . Par suite, une augmentation de la largeur de la bande passante du filtre.

# Exercices à résoudre

## Tests rapides des acquis

### 1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux

- 1°) Les quadripôles dont la fonction de transfert dépend de la fréquence sont appelés filtres.
- 2°) Le filtre RC est un filtre passant pour les signaux de faibles fréquences.
- 3°) La fréquence de coupure d'un filtre correspond à la fréquence où l'atténuation du signal d'entrée atteint 3 dB.
- 4°) La fréquence de coupure  $N_h$  d'un filtre passe-bas est indépendante de la valeur de sa capacité C.
- 5°) Le filtrage, moyennant un filtre actif est assuré, toujours, avec une amplification de la tension d'entrée.
- 6°) La tension de sortie  $u_S(t)$ , d'un filtre passif passe-haut CR, est toujours en avance de phase par rapport à sa tension d'entrée  $u_E(t)$ .
- 7°) Un filtre est dit sélectif lorsque la largeur de sa bande passante est comparable à sa fréquence propre  $N_0$ .
- 8°) La bande passante, d'un filtre passe-bande, est d'autant plus étroite que le facteur de qualité Q du circuit est petit.

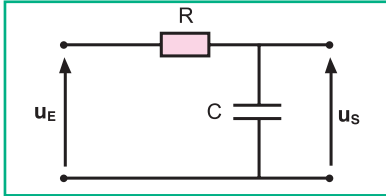
### 2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la (ou les ) proposition(s) juste(s).

- 1°) Un filtre électrique est passant si l'amplitude  $U_{Sm}$  de la tension de sortie est :
- a-  $U_{Sm} > \frac{U_{Em}}{\sqrt{2}}$
  - b-  $U_{Sm} > \frac{U_{Em}}{2}$
  - c-  $(U_{Sm})^2 > \frac{(U_{Em})^2}{\sqrt{2}}$
- 2°) La transmittance T d'un filtre RC a pour expression :
- a-  $T = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi NRC)^2}}$
  - b-  $T = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\pi NRC}}$
  - c-  $T = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{2\pi NRC})^2}}$
- 3°) Le déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_S - \varphi_E$ , dans le cas d'un filtre passe-bas actif et pour  $N = N_h$ , vaut :
- a-  $\Delta\varphi = -90^\circ$ ,
  - b-  $\Delta\varphi = 135^\circ$ ,
  - c-  $\Delta\varphi = 180^\circ$ .
- 4°) Un filtre électrique est sélectif pour :
- a-  $\Delta N \gg N_0$ ,
  - b-  $\frac{N_0}{\varphi} \gg 1$ ,
  - c-  $Q \gg 1$ .

## Exercices d'application

**3** On considère le filtre RC représenté par la figure suivante.



La tension d'entrée du filtre est :

$$u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt),$$

avec  $R = 1,6 \text{ k}\Omega$  et  $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$ .

**1°) a-** Sachant que le filtre est linéaire, écrire l'expression de la tension de sortie  $u_S$  en fonction du temps.

**b-** Etablir l'équation différentielle caractérisant ce filtre.

**c-** En déduire l'expression de la transmittance  $T$ .

**d-** Déduire l'expression du gain  $G$  du filtre ;

**2°) a-** Reproduire et compléter le tableau suivant :

N en Hz	10	100	200	500	$10^3$	$10^4$	$10^5$
G en dB							

**b-** Tracer la courbe de réponse en gain  $G = f(N)$  du filtre.

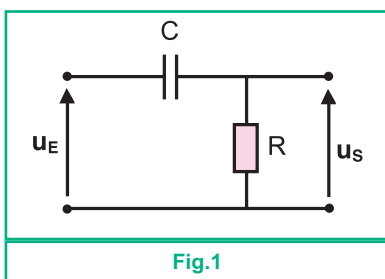
**c-** Déterminer, graphiquement, la fréquence de coupure du filtre et en déduire la largeur de la bande passante.

**d-** Justifier la nature de ce filtre.

**3°)** Déterminer la valeur du déphasage  $\Delta\varphi$  de  $u_S(t)$  par rapport à  $u_E(t)$  et en déduire l'expression de la tension de sortie  $u_S(t)$  en fonction du temps.

**4** On considère le filtre schématisé par la figure 1, avec  $R = 1 \text{ k}\Omega$  et  $C = 10 \text{ nF}$ .

A l'entrée du filtre est appliquée une tension sinusoïdale d'amplitude constante et de fréquence  $N$  réglable.



**1°)** Préciser la nature du filtre.

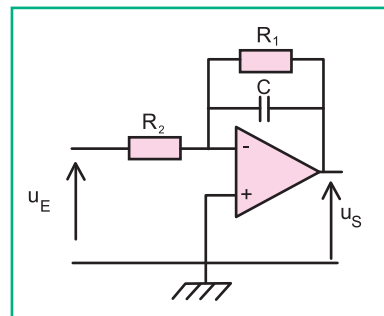
**2°)** Ecrire l'équation différentielle relative à ce filtre.

**3°)** Etablir l'expression de sa fonction de transmittance  $T$  et déterminer sa valeur pour les fréquences élevées.

**4°)** Calculer la fréquence de coupure  $N_C$  du filtre et en déduire sa bande passante.

**5°)** Représenter l'allure de la courbe de réponse  $G = f(N)$ .

**5** On considère le filtre électrique de la figure suivante. A l'entrée du filtre, on applique une tension  $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt)$ , d'amplitude  $U_{Em} = 2 \text{ V}$  et de fréquence  $N$  réglable.



La tension de sortie est :  $u_S(t) = U_{Sm} \sin(2\pi Nt + \varphi)$ .

L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et polarisé à  $\pm 15 \text{ V}$ .

**1°)** Etablir l'équation différentielle régissant les variations de la tension de sortie  $u_S(t)$  du filtre pour une tension d'entrée  $u_E(t)$ .

**2°)** Faire la construction de Fresnel relative à l'équation différentielle régissant les variations de  $u_S(t)$ .

**3°)** En exploitant cette construction, déterminer l'expression de la transmittance  $T$  du filtre.

**4°) a-** Montrer que l'expression du gain  $G$  du filtre peut se mettre sous la forme :

$$G = 20 \log \left( \frac{R_1}{R_2} \right) - 10 \log (1 + (2\pi N R_1 C)^2).$$

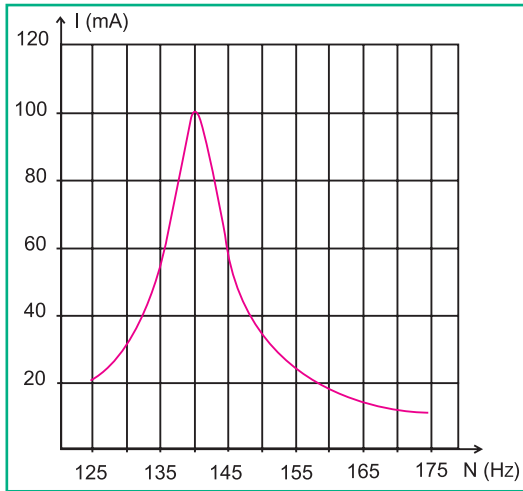
**b-** Déduire le comportement du filtre pour les faibles et les hautes fréquences.

**5°) a-** Déterminer l'expression et la valeur du gain maximal  $G_0$ . On donne  $R_2 = 2R_1$ .

**b-** Quelle condition doit satisfaire le gain  $G$  pour que le filtre soit passant ?

**c-** Calculer la valeur de la fréquence  $N_h$  du filtre pour  $R_2 = 318 \text{ }\Omega$  et  $C = 0,47 \text{ }\mu\text{F}$ .

**6** On étudie un circuit RLC constitué d'un condensateur de capacité  $C$ , d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance négligeable, d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  et d'un générateur. Ce dernier délivre une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U = 2 \text{ V}$  et de fréquence  $N$  réglable. On mesure l'intensité efficace  $I$  du courant qui traverse le circuit pour différentes valeurs de la fréquence. Les résultats de mesures permettent de tracer le graphique suivant.



- 1°) Préciser, pour  $N = 140 \text{ Hz}$ , le phénomène dont le circuit y est le siège. Justifier la réponse.
- 2°) Calculer, à l'aide du graphique et sans démonstration, les valeurs de la résistance  $R$  et de l'inductance  $L$  pour  $C = 4 \text{ }\mu\text{F}$ .
- 3°) a- Déterminer, graphiquement, la bande passante de ce circuit.  
b- Calculer le facteur de qualité  $Q$  de ce filtre.

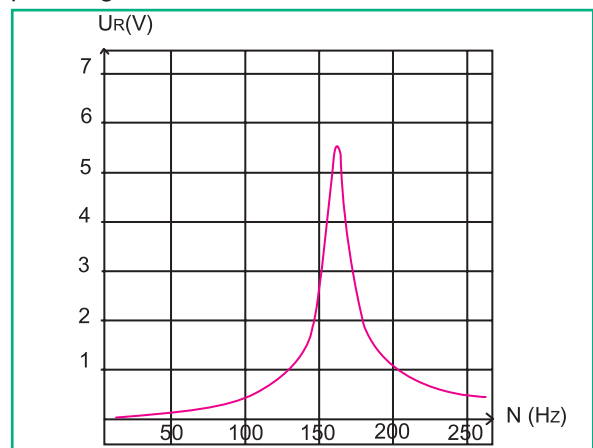
### Exercices de synthèse

**7** Un circuit série AB comprend une bobine d'inductance  $L$  et de résistance négligeable, un condensateur de capacité  $C$  et un conducteur ohmique de résistance  $R$ . On applique entre A et B une tension alternative sinusoïdale de fréquence  $N$  réglable et de valeur efficace maintenue constante  $U_E = 5 \text{ V}$ . Lorsqu'on fait varier la fréquence  $N$ , on constate, d'une part que l'intensité efficace du courant passe par un maximum  $I_0 = 20 \text{ mA}$  pour une valeur particulière  $N_0$  de la fréquence.

D'autre part, en dehors de ce cas particulier, il existe toujours deux valeurs de la fréquence pour lesquelles l'intensité  $I$  du courant est la même.

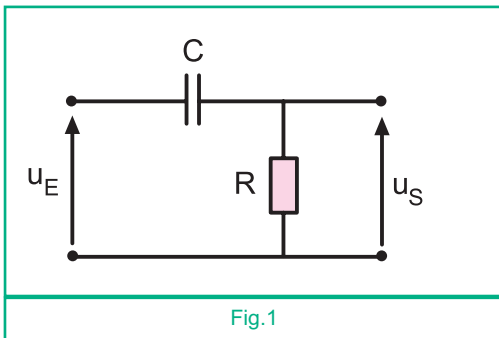
- 1°) a- Interpréter brièvement ces constatations et préciser le phénomène en question.  
b- Justifier, à partir de ces constatations qu'il s'agit d'un filtre électrique passe-bande.
- 2°) L'intensité efficace est  $I = 14 \text{ mA}$  pour deux fréquences  $N_1 = 900 \text{ Hz}$  et  $N_2 = 2500 \text{ Hz}$ .  
a- Justifier que  $N_1$  et  $N_2$  sont les fréquences de coupure basse et haute du filtre. En déduire la largeur de la bande passante.  
b- Déterminer la valeur de la fréquence  $N_0$  et le facteur de qualité  $Q$  du filtre.
- 3°) a- Calculer la valeur de la résistance  $R$  du conducteur ohmique et l'inductance  $L$  de la bobine.  
b- Déduire la valeur de la capacité  $C$  du condensateur.  
c- Proposer une méthode pratique permettant d'augmenter la sélectivité de ce filtre.

**8** On considère le circuit électrique constitué d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $r$ , d'un conducteur ohmique de résistance  $R = 60 \text{ }\Omega$  et d'un condensateur de capacité  $C$ , montés en série. Le circuit est alimenté par un générateur maintenant entre ses bornes une tension sinusoïdale de valeur efficace  $U_E = 6 \text{ V}$  et de fréquence  $N$  réglable entre 20 et 300 Hz. On fait varier  $N$  et pour chaque valeur de  $N$  on relève la valeur de l'intensité efficace  $I$  du courant électrique et on trace la courbe  $U_R = f(N)$  donnée par la figure suivante.



- 1°) Déterminer, graphiquement, la valeur de la fréquence  $N_0$  de l'oscillateur.
- 2°) Calculer la valeur de la résistance  $R_0 = R + r$ . En déduire la valeur de  $r$ .
- 3°) Justifier qu'il s'agit d'un filtre passe-bande. Déterminer la largeur de la bande passante.
- 4°) Déterminer la valeur du facteur de qualité  $Q$  du circuit. En déduire la valeur de la tension efficace aux bornes du condensateur à la résonance d'intensité.
- 5°) Calculer la valeur de l'inductance  $L$  de la bobine et celle de la capacité  $C$  du condensateur.
- 6°) Schématiser la nouvelle allure de la courbe de réponse  $U_R = f(N)$ , dans le cas où on refait la même expérience après avoir augmenté la valeur de la résistance du conducteur ohmique.

**9** Un générateur basse fréquence délivrant une tension sinusoïdale de valeur maximale constante, alimente un filtre CR constitué d'un condensateur de capacité  $C$  réglable et d'un conducteur ohmique de résistance  $R$ , comme le montre la figure 1.



On désigne par  $u_E(t)$  la tension d'entrée du filtre et par  $u_S(t)$  sa tension de sortie, avec:  
 $u_E(t) = U_{Em} \sin(2\pi Nt)$  et  $u_S(t) = U_{Sm} \sin(2\pi Nt + \varphi)$ .  
 Pour une tension maximale  $U_{Em}$  donnée, on fait varier la fréquence  $N$  de la tension d'entrée.  
 Pour chaque valeur de  $N$ , on mesure la tension maximale  $U_{Sm}$ . Par suite, on trace la courbe de réponse en gain  $G(N)$  donnée par la figure 2.

- 1°) a- Définir un filtre électrique.
  - b- Préciser, en le justifiant, si le filtre considéré est :
    - actif ou passif,
    - passe-haut ou passe-bas.

2°) a- Rappeler la condition pour qu'un filtre électrique soit passant.

b- Déterminer graphiquement la valeur de la fréquence de coupure  $N_c$  du filtre et en déduire sa bande passante.

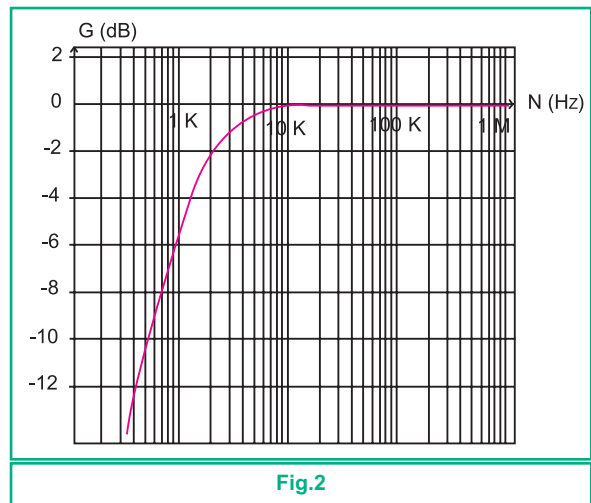
c- On considère deux signaux ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) de fréquences respectives  $N_1 = 1$  kHz et  $N_2 = 2$  kHz. Lequel des deux signaux est transmis par le filtre? Justifier.

3°) a- Montrer que la fréquence de coupure du

filtre est donnée par la relation :  $N_C = \frac{1}{2\pi RC}$ .

b- Calculer la valeur de  $N_C$  pour :  $R = 10$  kΩ et  $C = 10$  nF.

c- Calculer la valeur limite  $C_0$  de la capacité  $C$  permettant la transmission des deux signaux ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ).



D'après bac 2008

**10** Un circuit série AB, alimenté par une tension sinusoïdale  $u_E(t) = u_{Em} \sin(2\pi Nt + \varphi_u)$  de fréquence  $N$  réglable, comprend en série : une bobine d'inductance  $L$ , un condensateur de capacité  $C$  et un conducteur ohmique de résistance  $R$ . L'expression de l'intensité du courant qui circule dans le circuit est :

$$i(t) = I_m \sin(2\pi Nt).$$

**Partie A**

1°) Donner les expressions des tensions instantanées aux bornes de la bobine et aux bornes du condensateur.



2°) Etablir l'équation différentielle régissant l'intensité instantanée du courant  $i(t)$ .

3°) Faire la construction de Fresnel relative à cette équation différentielle.

4°) Déterminer, par exploitation de la construction, les expressions de l'amplitude  $I_m$  de  $i(t)$  et du déphasage  $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ .

### Partie B

On ferme le circuit et on fait varier la fréquence  $N$  de la tension d'entrée. Pour chaque valeur de  $N$ , on note l'intensité efficace  $I$  du courant qui circule dans le circuit. On donne :

$U = 20 \text{ V}$  ;  $L = 0,5 \text{ H}$  ;  $R = 50 \ \Omega$  et  $C = 10 \ \mu\text{F}$ .

1°) Préciser la valeur  $N_0$  de  $N$ , pour laquelle l'impédance du circuit est minimale.

2°) Calculer, dans ces conditions:

a- l'intensité efficace maximale  $I_0$  du courant,

b- la tension efficace  $U_b$  aux bornes de la bobine,

3°) Déterminer la valeur du facteur de qualité ou facteur de surtension  $Q$ .

4°) a- Donner l'allure de la courbe de variation de l'intensité du courant  $I = f(N)$ .

b- Montrer qu'il existe deux fréquences  $N_1$  et

$N_2$  pour lesquelles on a :  $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ .

Nommer ces deux fréquences.

5°) Calculer la largeur  $\Delta N$  de la bande passante.

6°) Préciser le dipôle à remplacer dans le circuit pour doubler la largeur de la bande passante sans modifier la valeur de la fréquence centrale  $N_0$ .



## Document scientifique

**11** Un filtre passif se caractérise par l'usage exclusif de composants passifs (bobines, résistances, condensateurs). Par conséquent, le gain d'un tel filtre ne peut excéder l'unité. Toute fois, il ne peut qu'atténuer en partie les signaux sans les amplifier.

Les réalisations les plus simples sont basées sur des circuits RC, RL, LC ou circuit RLC. Les filtres passifs sont rarement sujet à des phénomènes de saturation, d'où par exemple leur usage dans les enceintes des haut-parleurs. Toutefois, un même circuit peut difficilement couvrir à lui seul une très large gamme de fréquences car le choix d'un type de bobine ou de condensateur dépend de la fréquence. En effet, une bobine est constituée d'un fil et est donc très conductrice en basse fréquence. Par contre, elle s'oppose au passage des hautes fréquences. Les condensateurs font l'inverse (isolant en basse fréquence, conducteur en haute fréquence).

### Questions

1°) A partir du texte, indiquer les caractéristiques d'un filtre passif.

2°) Décrire le comportement d'une bobine d'inductance  $L$ , pour les faibles et les hautes fréquences.

3°) Justifier le fait que les filtres actifs sont sujets à des phénomènes de saturation.

# En savoir plus

## Egaliseur et égalisation

Les fréquences audibles, théoriquement, par une oreille jeune et en bonne santé s'échelonnent de 20 Hz à 20 kHz. Cependant, il faut signaler qu'avec l'âge, on a tendance à "perdre" les aigus. Cette plage de fréquences audibles, peut-être arbitrairement découpée en quatre bandes : les graves, les bas-médiums, les haut-médiums et les aigus. Ce découpage n'étant pas normalisé et n'ayant rien de scientifique. Très approximativement, les graves vont de 20 à 150 Hz, les bas-médiums, de 150 à 800 Hz, les hauts-médiums, de 800 Hz à 4 kHz et les aigus, de 4000 à 20000 Hz.



Quelle que soit son type, quelle que soit sa forme, quelle que soit la technologie employée, l'égaliseur, ou correcteur, remplit invariablement la même fonction : celle d'atténuer ou d'amplifier certaines fréquences d'un signal, ou de modifier son timbre. Les applications qui découlent de cette fonction sont diverses et variées. Un sonorisateur, par exemple, se servira d'un égaliseur pour compenser les défauts d'une salle de spectacle. Dans les studios de mixage, on utilisera un égaliseur pour changer ou modeler le timbre d'un instrument de musique. Ainsi, avec un égaliseur, on peut renforcer le coup d'archet d'un violon, conférer plus de corps à une caisse claire, donner plus de brillance à une voix... Un égaliseur est utilisé, aussi, pour faire en sorte que les instruments, au mixage, se mélangent harmonieusement et ne se perturbent pas les uns les autres. Ainsi, on peut ôter les graves d'une contrebasse envahissante qui se mélangent avec le bruit de grosse caisse. Pour compenser les défauts d'un micro ou de sa position, pour pallier l'absence de telles ou telles fréquences d'un signal donné, on utilise des égaliseurs.

Pour régler les graves et les aigus, on utilise les égaliseurs de type "shelving". C'est ce type de correcteurs que l'on rencontre sur les chaînes hifi, les autoradios, etc. Dans les graves, l'égaliseur permet, au moyen d'un potentiomètre d'atténuer ou d'amplifier tout ce qui se situe en deçà d'une certaine fréquence. Même principe pour les aigus, l'égaliseur affectant cette fois tout ce qui se situe au-delà d'une certaine fréquence. Sur les petites consoles de home studio, la section d'égalisation se résume bien souvent à ce réglage sommaire des graves et des aigus.

D'après MacMusic.org

# Fiche technique

## Détermination des fréquences de coupure d'un filtre électrique

### Méthode pratique

Les fréquences de coupure d'un filtre peuvent se mesurer à l'aide d'un décibel-mètre (c'est un voltmètre électronique pour lequel il existe une échelle et des calibres en décibels en regard d'une échelle et des calibres en volts), il suffit dans ce cas de mesurer les fréquences pour lesquelles le gain est égal au gain maximal  $G_0$  moins 3 dB. Elles peuvent se mesurer également à l'aide d'un voltmètre ou de l'oscilloscope. En effet, si la tension d'entrée  $U_{Em}$  est

maintenue constante, les fréquences de coupure s'obtiennent pour :  $U_{Sm} = \frac{(U_{Sm})_{max}}{\sqrt{2}}$ .

On peut, par exemple, ajuster l'amplitude crête à crête de la tension de sortie maximale (au milieu de la bande passante) sur sept carreaux de l'oscilloscope, les fréquences de coupure s'obtiennent, alors, lorsque l'amplitude crête à crête de la tension de sortie prend, sur

l'écran de l'oscilloscope, une distance de cinq carreaux  $\left(\frac{7}{\sqrt{2}} \approx 5\right)$ .

### Choix des points de mesure

- Dans un premier temps, il faut balayer toute la plage de fréquences pour évaluer  $T_0$  ou  $G_0$  et situer la ou les fréquence(s) de coupure.
- Dans un deuxième temps, il faut déterminer avec le maximum de précision les fréquences pour lesquelles la fonction de transfert (ou le gain  $G$ ) prend la valeur  $T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$  (ou bien  $G = G_0 - 3$  dB).
- Pour terminer, il faut ajouter des points de mesure pour tracer la courbe d'évolution de la fonction de transfert  $T$  ou du gain  $G$ .

D'après : Génie électronique

## Objectifs

- ◆ Distinguer entre une onde transversale et une onde longitudinale.
- ◆ Reconnaître que la propagation d'une onde est due à une propagation d'énergie sans transport de matière.
- ◆ Réaliser une expérience illustrant la propagation d'une onde sinusoïdale dans un milieu homogène et isotrope.
- ◆ Identifier dans un milieu de propagation donné, les propriétés dont dépend la célérité d'une onde.
- ◆ Etablir l'équation horaire du mouvement d'un point donné du milieu de propagation connaissant celle de la source d'onde progressive et représenter graphiquement le diagramme du mouvement de ce point.
- ◆ Représenter graphiquement l'aspect à un instant donné, du milieu (ou d'une coupe du milieu) de propagation d'une onde progressive.
- ◆ Reconnaître la double périodicité d'une onde sinusoïdale.

## Prérequis

SAVOIR	SAVOIR FAIRE
<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Définir un phénomène périodique.</li> <li>◆ Définir la période <math>T</math> et la fréquence <math>N</math> d'un phénomène périodique.</li> <li>◆ Ecrire la relation <math>N = \frac{1}{T}</math>.</li> <li>◆ Définir une grandeur sinusoïdale.</li> <li>◆ Définir la pulsation et l'amplitude d'une grandeur sinusoïdale.</li> <li>◆ Ecrire la relation <math>T = \frac{2\pi}{\omega}</math> (ou <math>N = \frac{\omega}{2\pi}</math>)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◆ Utiliser l'oscilloscope.</li> <li>◆ Appliquer les relations :  <math display="block">N = \frac{1}{T} \text{ et } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ (ou } \omega = 2\pi N \text{).}</math> </li> <li>◆ Représenter graphiquement une grandeur sinusoïdale en fonction du temps.</li> <li>◆ Mesurer les durées et les vitesses à l'aide de photocapteurs.</li> </ul>

# ONDES MECANIQUES PROGRESSIVES

# 9



Les vagues constituent un exemple de propagation d'ondes dans un milieu élastique.

- ◆ D'où provient l'énergie des vagues ?
- ◆ Le déferlement des vagues correspond-il à un déplacement de matière ou d'énergie ?
- ◆ Nos oreilles perçoivent des sons. Qu'est-ce qui fait qu'ils nous parviennent et pourquoi les sons émis et ceux qu'on perçoit sont les mêmes ?

# ONDES MECANIQUES PROGRESSIVES

En jetant un caillou dans une nappe d'eau calme, on provoque une déformation de courte durée à la surface d'impact. Cette déformation donne naissance à des rides qui s'élargissent progressivement, tandis que la surface d'impact reprend sa forme initiale.

Comment peut-on expliquer l'élargissement progressif de ces rides circulaires qui prennent naissance à la surface de l'eau suite au lancement du caillou ?

## 1 PROPAGATION D'UN EBRANLEMENT

La déformation de courte durée, imposée par le caillou à une nappe d'eau calme est un ébranlement. Etant un milieu élastique, la nappe d'eau joue le rôle de milieu de propagation de l'ébranlement. On appelle milieu élastique, tout milieu qui reprend de lui-même sa forme initiale après avoir subi une déformation brève.

### 1.1- PROPAGATION D'UN EBRANLEMENT DANS UN MILIEU UNIDIMENTIONNEL

#### Manipulation

##### ◆ Expérience 1

On considère une longue corde élastique tendue horizontalement sur le sol. On imprime à l'extrémité O de la corde un mouvement de va-et-vient rapide. On observe la portion de la corde voisine de O qui se déforme pour reprendre par la suite sa forme initiale pendant que la déformation touche la portion suivante de la corde. De proche en proche, la déformation ou l'ébranlement touche tous les points de la corde comme le montre la figure 1.

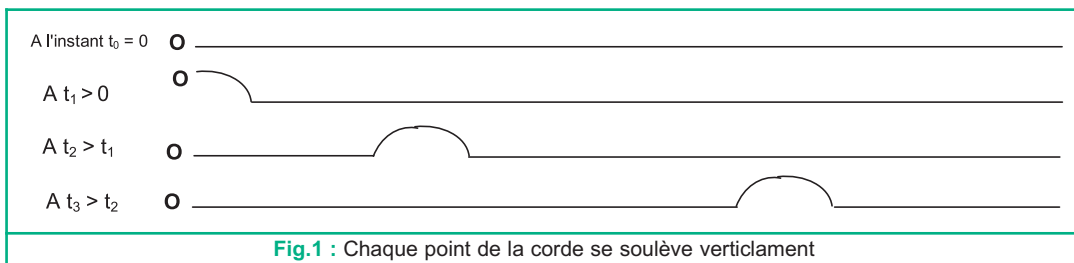


Fig.1 : Chaque point de la corde se soulève verticalement

##### ◆ Expérience 2

On comprime les premières spires non jointives d'un ressort tendu horizontalement et on les lâche brusquement. On constate que les spires comprimées reprennent leurs positions d'équilibre, tandis que les spires voisines se rapprochent à leur tour. De proche en proche, toutes les spires subissent la déformation ou l'ébranlement, comme le montre la figure 2.

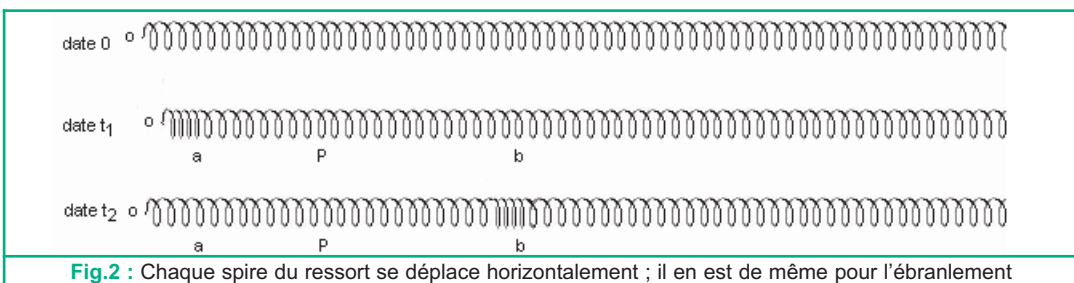


Fig.2 : Chaque spire du ressort se déplace horizontalement ; il en est de même pour l'ébranlement

### Questions

- 1°) Comparer la direction du déplacement de l'ébranlement dans l'expérience 1 à celle du déplacement des différents points matériels de la corde.  
 2°) Dans l'expérience 2, comparer la direction du déplacement de l'ébranlement (ou déformation) à celle du déplacement des spires.

### Interprétation

L'ébranlement imposé à l'extrémité O se déplace de proche en proche aux autres points de la corde. Chaque point de la corde atteint par l'ébranlement reproduit le mouvement de l'extrémité O avec un certain retard. La direction d'évolution de l'ébranlement sur la corde est perpendiculaire à la direction de déplacement des points matériels de cette corde : l'ébranlement est ainsi dit **transversal**.

En comprimant les premières spires du ressort, parallèlement à son axe et en les lâchant, on crée ainsi une déformation locale du ressort. Cette déformation (ou ébranlement) va se déplacer de proche en proche aux autres spires du ressort qui sont au repos.

Au passage de l'ébranlement par une zone, chaque spire de celle-ci prend une élongation  $y$  par rapport à sa position d'équilibre semblable à celle du point O et suivant une direction confondue avec celle de l'axe du ressort. Un tel ébranlement est dit longitudinal.

## 1.2- PROPAGATION D'UN EBRANLEMENT DANS UN MILIEU BIDIMENTIONNEL

### Manipulation

On laisse tomber une goutte d'eau sur la surface libre d'une cuve à ondes contenant de l'eau au repos. La déformation donne naissance à une ride circulaire qui se propage telle quelle à partir du point d'impact de la goutte vers l'extérieur comme dans la figure 3.

En mettant un petit morceau de liège en un point M de la surface de l'eau, au passage de l'ébranlement par le point M, le morceau de liège fait un petit déplacement vertical sur place, sans s'éloigner de sa position initiale.

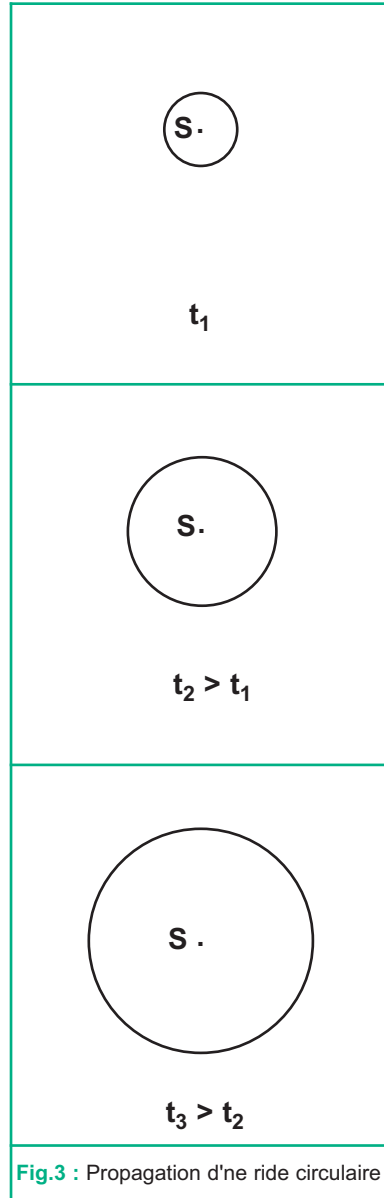


Fig.3 : Propagation d'une ride circulaire

### Questions

- 1°) Cet ébranlement qui se propage à la surface de l'eau est-il transversal ou longitudinal ?  
 2°) Telle quelle, sa propagation se fait dans combien de directions ?  
 3°) Au cours de la propagation de l'ébranlement, y a-t-il déplacement d'une quantité d'eau à partir du point d'impact S ?

## Interprétation

La chute d'une goutte d'eau dans une cuve à ondes donne naissance à une ride circulaire qui se propage à partir du point d'impact  $S$  de la surface de l'eau vers l'extérieur. Ainsi, la déformation locale (ou l'ébranlement) se propage dans toutes les directions de la surface de l'eau. Un point quelconque de la surface de l'eau peut être repéré par deux coordonnées  $x$  et  $y$  dans le plan. Il s'agit donc d'un ébranlement à deux dimensions. La forme circulaire de la ride montre que tous les points de celle-ci sont atteints par l'ébranlement issu de la source  $S$  au même instant. Le déplacement vertical du morceau de liège sur place, lors du passage de l'ébranlement à son niveau, montre que la propagation de ce dernier se fait avec une transmission d'énergie, sans déplacement de matière. C'est pour cette raison qu'il est impropre de parler de déplacement d'un ébranlement.

## 1.3- PROPAGATION D'UN EBRANLEMENT DANS UN MILIEU TRIDIMENTIONNEL

### Exemples

- ♦ Un acteur situé sur la scène d'un théâtre chante une note. Les auditeurs ayant pris place au balcon, à l'avant de la scène, ou encore dans les coulisses, entendent cette note grâce à sa propagation dans toutes les directions.
- ♦ Lorsqu'on crée du vide sous une cloche où est placé un petit poste radio, le son émanant de celui-ci devient inaudible.

### Questions

- 1°) L'ébranlement sonore est-il transversal ou longitudinal ? Justifier la réponse.
- 2°) Le son se propage-t-il dans le vide? Justifier la réponse.

### Interprétation

Les vibrations longitudinales des molécules de gaz (l'air par exemple) permettent la transmission du son depuis la source sonore jusqu'au tympan de l'oreille de l'auditeur. Dans le vide, le son ne peut pas se propager. Ainsi, sa propagation nécessite un support.

### Conclusion

Un ébranlement est une déformation de courte durée imposée localement à un milieu élastique.

Le milieu de propagation d'un ébranlement peut être unidimensionnel (corde élastique, ressort), bidimensionnel (surface d'un liquide) ou tridimensionnel (l'air ou tout autre fluide).

Selon sa direction de propagation et celle du déplacement des points matériels du milieu de propagation, un ébranlement peut être transversal ou longitudinal.

La propagation d'un ébranlement est due à une transmission d'énergie d'un point du milieu de propagation vers d'autres.



## 1.4- CELERITÉ D'UN ÉBRANLEMENT

La propagation d'un ébranlement se fait avec une vitesse  $v$  appelée vitesse de propagation ou célérité de l'ébranlement. Du fait que cette propagation ne correspond pas à un déplacement de matière mais plutôt à un transport d'énergie, la célérité  $v$  correspond à une vitesse de propagation **d'énergie**.

Pour mesurer la célérité  $v$  d'un ébranlement, on utilise par exemple l'échelle de perroquet, dispositif constitué essentiellement d'un fil de torsion (fixé à deux supports), auquel sont accrochés des barreaux. Sur ces barreaux, peuvent coulisser des masselottes. Ainsi, on peut varier l'inertie du système par la variation des positions des masselottes (Fig.4).

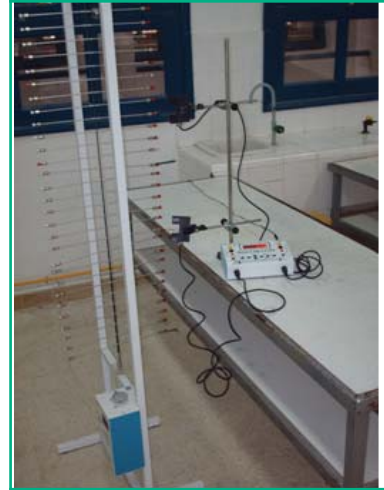


Fig.4 : Echelle de perroquet

### Manipulation

- ♦ On place les masselottes de l'échelle de perroquet à 2 cm par exemple de l'axe principal de l'échelle. Ensuite, on place un capteur devant chacun de deux barreaux de l'échelle, séparés par une distance  $d$ . Les deux capteurs sont reliés à un mesureur de vitesse (Fig.5)

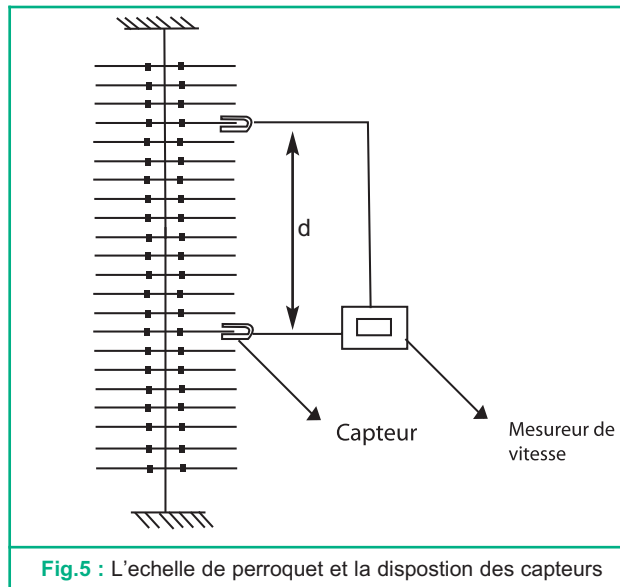


Fig.5 : L'échelle de perroquet et la disposition des capteurs

On fait tourner le barreau situé à l'extrémité supérieure de l'échelle dans son plan d'un angle  $\alpha$ , puis on l'abandonne à lui même.

En mesurant la célérité  $v$  de l'ébranlement pour différentes valeurs de la distance  $d$ , on obtient une série de mesures rassemblées dans le tableau suivant :

$d$ (m)	0,23	0,30	0,40	0,54
$v$ (m.s <sup>-1</sup> )	0,48	0,49	0,48	0,49

- ◆ On refait l'expérience mais en tournant cette fois-ci le même barreau de l'échelle d'un angle  $\alpha'$  plus grand que  $\alpha$ .

On constate que les valeurs du tableau précédent restent pratiquement les mêmes.

- ◆ On refait de nouveau la même expérience mais en faisant varier cette fois-ci les positions des masselottes tout en les maintenant symétriques les unes des autres par rapport à l'axe de l'échelle, ce qui entraîne une variation de l'inertie du système.

Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

<b>d (m)</b>	0,23	0,30	0,40	0,54
<b>v ( m.s<sup>-1</sup>)</b>	0,28	0,29	0,28	0,28

### Questions

1°) A l'aide des résultats des expériences précédentes réalisées avec l'échelle de perroquet et de ceux de l'expérience du sous paragraphe 1.2, montrer que les ébranlements se propagent dans ces milieux homogènes avec une célérité constante.

2°) En s'appuyant sur les résultats expérimentaux obtenus avec l'échelle de perroquet, préciser avec justification si la célérité d'un ébranlement dépend de :

- son amplitude ;
- des caractéristiques du milieu de propagation.

### Interprétation

La forme circulaire des rides créées à la surface d'une nappe d'eau (expérience du sous paragraphe 1.2) ainsi que l'obtention de la même valeur de célérité au niveau des différents barreaux de l'échelle de perroquet montrent que la propagation d'un ébranlement se fait dans ces milieux homogènes avec une célérité constante. D'autre part, le non changement de la célérité de l'ébranlement même si l'on augmente l'écartement du barreau supérieur de l'échelle de perroquet par rapport à sa position d'équilibre montre son indépendance de l'amplitude. Cependant, la variation de la célérité  $v$  avec la modification des positions des masselottes s'explique par sa dépendance de l'inertie de l'échelle de perroquet.

### Autres constatations

- ◆ On peut montrer aussi que la célérité de l'ébranlement augmente avec la valeur de la tension du fil de torsion portant les barreaux de l'échelle de perroquet.
- ◆ On montre que la vitesse de propagation du son dépend de la compressibilité du milieu. Elle est plus grande dans les solides que dans les liquides et les gaz.
- ◆ A partir du tableau de valeurs ci-dessous, on peut dégager l'influence de la nature du milieu de propagation sur la célérité d'un ébranlement.

Type d'ébranlement	Célérité (m.s <sup>-1</sup> )
Ebranlement à la surface de l'eau	0,3
Ebranlement le long d'une échelle de perroquet	1
Ebranlement le long d'une corde	10
Ebranlement sonore dans l'air à 20°C	342
Ebranlement sonore dans l'eau à 20°C	1500
Ebranlement sonore dans l'acier	5000
Ebranlement sismique	8000

**Conclusion**

La célérité d'un ébranlement dépend de la nature du milieu matériel dans lequel il se propage et de ses propriétés. Ainsi, le long d'une corde élastique, la célérité d'un ébranlement est d'autant plus grande que la corde est plus tendue. Plus l'inertie d'un milieu de propagation est grande, plus la célérité de l'ébranlement est faible.

**Remarque**

La propagation d'un ébranlement diffère du déplacement d'un mobile, en voici quelques exemples :

Déplacement d'un mobile	Propagation d'un ébranlement
Il se fait selon une trajectoire bien précise.	Il se fait, à partir d'une source, dans toutes les directions possibles.
Il correspond à un transport de matière.	Il ne correspond pas à un transport de matière mais d'énergie
Le mouvement d'un mobile est ralenti par les frottements avec le milieu matériel.	Dans un milieu matériel, un ébranlement peut être amorti, mais cet amortissement porte davantage sur son amplitude que sur sa célérité .
Un mobile se déplace plus facilement dans le vide que dans un gaz et plus facilement dans un gaz que dans un liquide. Le mouvement dans les solides est impossible,	Un ébranlement mécanique ne se propage pas dans le vide. Il se propage plus vite dans les liquides que dans les gaz et fréquemment plus vite dans les solides que dans les liquides.
Il se fait à une vitesse qui dépend des conditions initiales (vitesse et accélération initiales).	Il se fait avec une célérité qui dépend des propriétés du milieu de propagation.

**2****PROPAGATION D'UNE ONDE SINUSOÏDALE ENTRETENUE**

Il est très rare de rencontrer dans la nature ou au laboratoire des phénomènes qui résultent d'un seul ébranlement. Les houles de l'océan, les vagues, le son et les tremblements de terre, sont des exemples parmi d'autres grands phénomènes qui résultent d'une émission plus ou moins régulière d'ébranlements identiques dans un milieu élastique, ce sont des ondes.

**2.1- GÉNÉRALITÉS SUR L'ONDE ENTRETENUE****Définition**

On appelle onde (du latin unda) le phénomène résultant de la propagation d'une succession d'ébranlements dans un milieu donné.

### Célérité d'une onde mécanique

Comme dans le cas d'un seul ébranlement, l'onde est caractérisée par une célérité  $v$  (ou vitesse de propagation) qui dépend des propriétés du milieu élastique homogène.

Plus précisément, la célérité  $v$  d'une onde est celle des ébranlements qui la constituent.

### Onde transversale et onde longitudinale

Le caractère transversal ou longitudinal d'une onde est fonction de celui des ébranlements correspondants. Les ébranlements transversaux constituent des ondes transversales et les ébranlements longitudinaux constituent des ondes longitudinales.

### Ondes progressives

Lorsque le milieu de propagation est ouvert, c'est-à-dire illimité, les ondes progressent en s'éloignant indéfiniment de la source. De telles ondes sont dites progressives.

Du fait qu'au laboratoire, on ne peut disposer que de milieux finis, on limite ces milieux par une matière absorbante (coton, feutre, plaque métallique cintrée ...) afin de pouvoir les assimiler à des milieux ouverts.

## 2.2- ONDE PROGRESSIVE LE LONG D'UNE CORDE ELASTIQUE TENDUE

### Etude expérimentale

#### Mise en évidence

#### Manipulation

On tend une corde élastique souple de faible raideur, entre un vibreur et un support fixe. Ainsi, son extrémité O est attachée au vibreur, tandis que l'autre extrémité A est reliée au support fixe à travers une pelote de coton.

Le vibreur est une lame d'acier excitée par un électro-aimant alimenté par une tension alternative sinusoïdale (Fig.6).

En mettant le vibreur en marche, la corde paraît sous forme d'une bandelette rectangulaire floue de largeur double de l'amplitude de vibration de l'extrémité O. En essayant de la frôler, on sent partout un picotement au doigt.

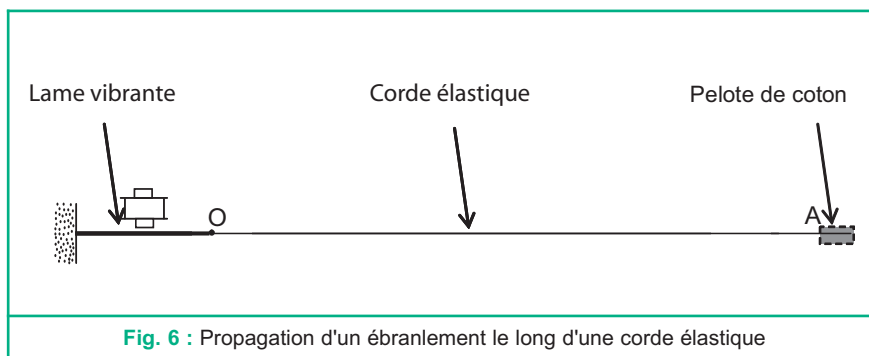


Fig. 6 : Propagation d'un ébranlement le long d'une corde élastique

### Questions

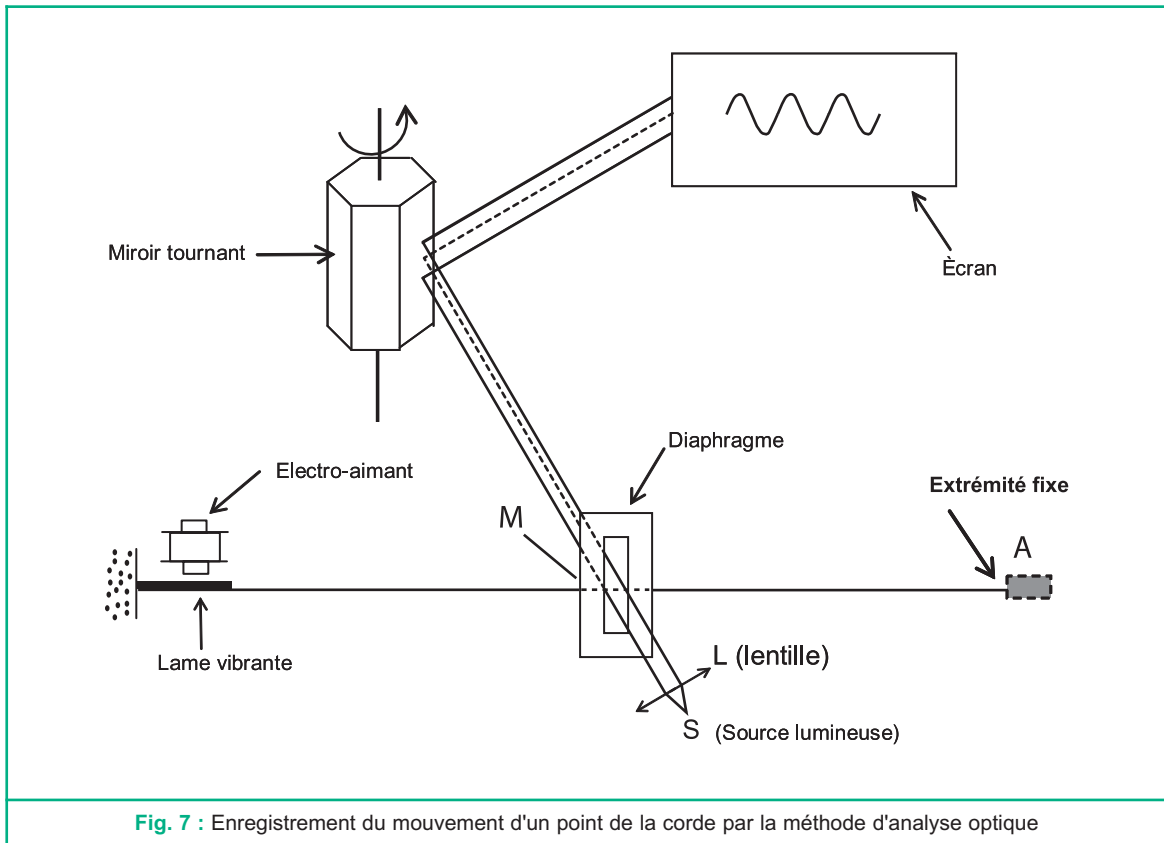
- 1°) Expliquer l'apparition de la corde sous forme de bandelette floue.
- 2°) Quel est le rôle de la pelote de coton ?
- 3°) Justifier la qualification de l'onde qui se propage le long de la corde comme étant une onde transversale.

### Interprétation

Les vibrations imposées à l'extrémité O de la corde élastique tendue sont transmises telles quelles aux différents autres points de celle-ci.

### Mouvement d'un point donné de la corde

Afin de pouvoir étudier le mouvement d'un point donné M de la corde, on utilise la méthode d'analyse optique dont le principe est expliqué dans la fiche technique n.1 de fin du chapitre. Parallèlement à la corde et au niveau du point M, on place un diaphragme unifente sur lequel tombe un faisceau lumineux parallèle. Le faisceau émergent entoure l'ombre portée du point M de la corde. A la suite de la réflexion sur le miroir tournant à vitesse constante, cette ombre prend sur l'écran l'aspect d'une sinusoïde comme le montre la figure 7.



### Questions

- 1°) Que représente la sinusoïde d'ombre observée sur l'écran?
- 2°) Comparer le mouvement d'un point quelconque de la corde à celui de l'extrémité O attachée au vibreur.

### Interprétation

Au cours de la propagation d'une onde transversale sinusoïdale le long d'une corde élastique, chacun de ses points (à part l'extrémité fixe A) reproduit le mouvement de la source O avec la même amplitude et avec un certain retard.

### Conclusion

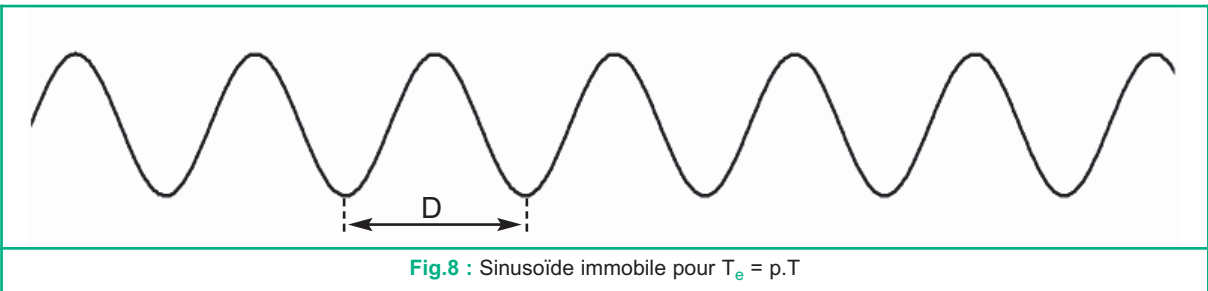
Les vibrations imposées à l'extrémité d'une corde élastique tendue sont transmises aux différents points de celle-ci. Le phénomène qui en résulte constitue une onde transversale. Au cours de la propagation d'une onde transversale sinusoïdale le long d'une corde élastique, chacun des points de cette corde (à part l'extrémité fixe A) vibre sinusoïdalement avec la même amplitude que la source (en négligeant l'amortissement).

### Aspect instantané de la corde

#### Manipulation

On éclaire la corde excitée par le vibreur avec un stroboscope électronique de période réglable  $T_e$  (voir fiche technique n.2 à la fin du chapitre).

- Avec  $T_e = p.T$  ;  $p \in \mathbb{N}^*$ , T étant la période du vibreur, la corde paraît immobile sous forme d'une sinusoïde de période égale à une longueur D (Fig.8).



- Aux périodes  $T_e$  légèrement supérieures à  $p.T$ , la corde paraît toujours sous forme d'une sinusoïde mais en mouvement apparent lent dans le sens réel de propagation.
- Aux périodes  $T_e$  légèrement inférieures à  $p.T$ , on observe le même mouvement apparent lent de la corde, mais dans le sens contraire du sens réel de propagation.

### Questions

Expliquer :

- a- l'immobilité apparente de la corde,
- b- le mouvement apparent de la corde avec  $T_e$  légèrement supérieure ou inférieure à  $p.T$ .

## Interprétation

### ■ Pour $T_e = p.T$

Si la corde est apparemment immobile, c'est parce que chacun de ses points est toujours éclairé à son passage par la même position et dans le même sens entre deux éclairs successifs. Cela veut dire que pendant la durée  $T_e$ , tout point de la corde effectue en réalité  $p$  oscillations complètes. Donc, la période d'oscillation des différents points de la corde est égale à la période  $T$  du vibreur.

Cette sinusoïde apparemment immobile représente bien l'aspect de la corde à un instant  $t$  donné. Elle est caractérisée par une périodicité le long de la direction de propagation, c'est-à-dire une périodicité spatiale.

Tous les points équidistants de  $k.D$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) ont le même état de mouvement.

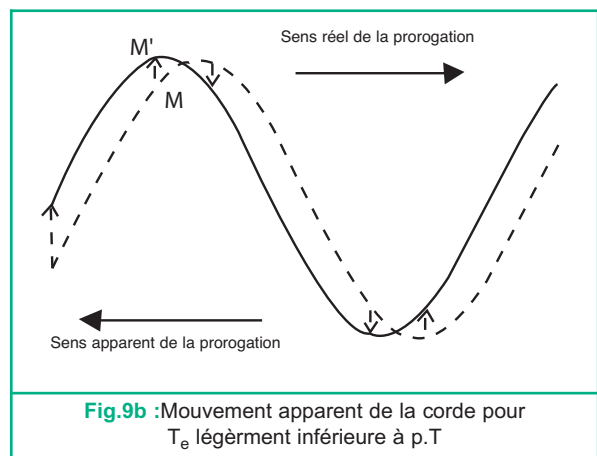
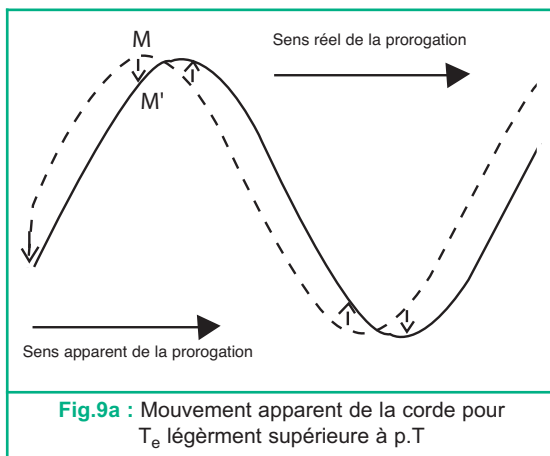
La distance  $D$  représentant la période de la sinusoïde est la période spatiale de l'onde. On l'appelle longueur d'onde du fait qu'elle est égale à la distance parcourue par l'onde pendant une période  $T$  et on la note  $\lambda$ .

### ■ Pour $T_e$ légèrement supérieure à $p.T$

Entre deux éclairs successifs, tout point de la corde effectue  $p$  oscillations complètes et une très petite fraction d'oscillation. Mais apparemment, c'est comme si chaque point accomplit dans le sens réel la très petite fraction d'oscillation engendrant le déplacement  $MM'$  (Fig.9a). Ainsi, on a l'impression d'une progression lente de la sinusoïde dans le sens réel de propagation de l'onde. C'est bien ce qui se passe en réalité mais à la vitesse de propagation  $v$ , d'où le nom d'onde progressive.

### ■ Pour $T_e$ légèrement inférieure à $p.T$

Entre deux éclairs successifs, tout point de la corde effectue un tout petit peu moins que  $p$  oscillations complètes (il manque une très petite fraction de la  $p$ ème oscillation). Mais, apparemment c'est comme si chaque point effectue cette très petite fraction d'oscillation  $MM'$  dans le sens contraire du sens réel (Fig.9b).



## Conclusion

La propagation d'une onde est caractérisée par deux périodicités à la fois :

- une périodicité dans le temps appelée périodicité temporelle. La période  $T$  est celle de la source.
- une périodicité dans l'espace, appelée périodicité spatiale. La période spatiale  $\lambda$ , contrairement à la période  $T$ , ne dépend pas seulement de la source mais dépend aussi du milieu de propagation. La période spatiale  $\lambda$  est la longueur d'onde, elle représente la distance parcourue par l'onde pendant une durée égale à la période temporelle  $T$ .

$$\lambda = v \cdot T, \text{ soit } \lambda = \frac{v}{N}$$

En effet, la période temporelle  $T$  de l'onde est la durée au bout de laquelle l'onde se propage d'une longueur  $\lambda$  telle que tous les points du milieu de propagation se retrouvent dans le même état vibratoire, d'où le nom de longueur d'onde.

## Etude théorique

### Equation horaire du mouvement d'un point de la corde

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le repère par rapport auquel on fera l'étude. L'origine  $O$  est confondue avec l'extrémité de la corde attachée au vibreur du montage de la figure 6.

$\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont respectivement les vecteurs directeurs unitaires de l'axe horizontal ayant la direction de la corde et de l'axe vertical servant à mesurer les élongations  $y$  des différents points de la corde. Considérons un point  $M$  de la corde d'abscisse  $x$  sur l'axe  $(O, \vec{i})$  (Fig.10).

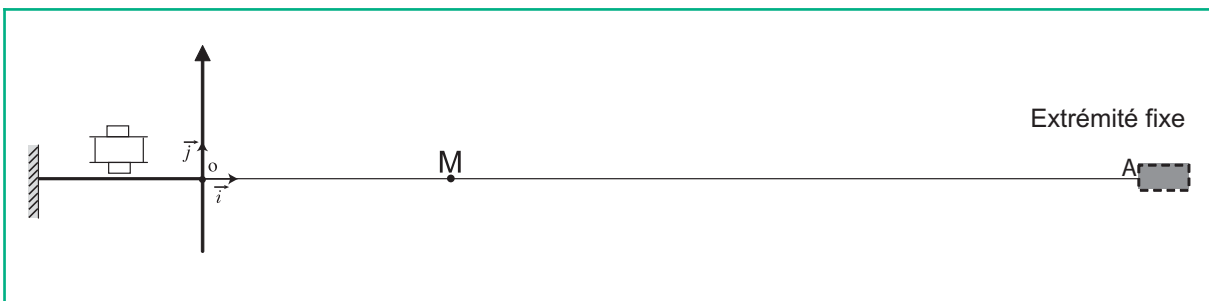


Fig. 10 : Chaque point  $M$  de la corde est caractérisé par son abscisse  $x$  par rapport à la source

A tout instant  $t$ , l'onde qui se propage le long de la corde impose au point  $M$  une élongation  $y(t)$  égale à l'élongation qu'a eue l'extrémité source  $S$  à l'instant  $(t - \theta)$  ; l'amortissement étant supposé nul.

La durée  $\theta$  désigne le temps mis par l'onde pour se propager de  $S$  à  $M$ .

$$y_M(t) = y_s(t - \theta), \text{ or } y_s(t) = a \sin(\omega t + \varphi_s)$$

Avec un choix convenable de l'origine des temps, on aura  $\varphi_s = 0$ .

Ainsi,  $y_s(t) = a \sin(\omega t)$ , d'où  $y_M(t) = a \sin \omega(t - \theta)$  pour  $t \geq \theta$ .



Avec  $\theta = \frac{x}{v}$ ,  $v$  = célérité de l'onde,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et  $T$  la période de l'onde.

$$\text{Ainsi : } y_M(t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{vT} \right) \right].$$

$$\text{Or : } \lambda = v.T, \text{ d'où : } y_M(t) = a \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right], \text{ pour } t \geq \theta.$$

### Conclusion

Au cours de la propagation d'une onde sinusoïdale entretenue le long d'une corde élastique, tout point  $M$  de la corde, d'abscisse  $x$  par rapport à la source, vibre sinusoïdalement avec une période  $T$  égale à celle de la source  $S$ , mais avec une phase initiale dont la valeur est fonction de sa position sur la corde.

### Déphasage par rapport à la source

Si la source commence à vibrer à  $t = 0$  en allant dans le sens positif des élongations :

$$y_s(t) = a \sin(\omega t)$$

$$y_M(t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \text{ de la forme } y_M(t) = a \sin(\omega t + \varphi_M) \text{ avec } \varphi_M = -\frac{2\pi x}{\lambda}.$$

$$\text{Le déphasage entre les élongations } y_M(t) \text{ et } y_s(t) \text{ noté } \Delta \varphi \text{ est } (\varphi_M - \varphi_s) = -\frac{2\pi x}{\lambda}.$$

### Remarque

Ce résultat reste valable dans le cas général où l'amortissement n'est pas négligeable et où la phase initiale n'est pas nulle.

$$\text{En effet, pour } y_s(t) = a_o \sin(\omega t + \varphi_s) \text{ on a : } y_M(t) = a \sin\left(\omega t + \varphi_s - \frac{2\pi x}{\lambda}\right); \text{ avec } a < a_o.$$

Ainsi,  $\Delta \varphi$  est une fonction de l'abscisse  $x$  du point  $M$  par rapport à la source.

### ■ Points de la corde vibrant en concordance de phase avec la source

Un point  $M$  de la corde vibre en phase avec la source lorsque son élongation  $y_M(t)$  est liée à celle de la source par la relation :

$$\frac{y_s(t)}{a_s} = \frac{y_M(t)}{a}, \text{ soit : } \sin(\omega t + \varphi_s) = \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s\right) \forall t,$$

$$\text{ce qui donne } \varphi_s = \varphi_M + 2k\pi; \text{ avec } \varphi_M = -\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_s \text{ (k : entier),}$$

soit  $\Delta \varphi = -2k\pi$ , ce qui conduit à :  $x = k\lambda$ , où  $k$  est un entier positif.

Soit  $\ell$  la longueur de la corde au repos, on a :  $x < \ell$ , par suite  $k < \frac{\ell}{\lambda}$ .

Les points de la corde qui vibrent en phase avec la source sont situés, au repos, à des distances égales à un nombre entier de longueur d'onde de la source S. Leur nombre est limité par la longueur  $\ell$  de la corde.

### Question

Déterminer les abscisses des points de la corde vibrant en opposition de phase avec la source.

#### ■ Points de la corde vibrant en quadrature avance de phase avec la source

Un point M de la corde vibre en quadrature avance de phase la source lorsqu' à tout instant t, son élongation est telle que :  $y_s(t) = y_M(t - T/4)$ ,

soit :  $a \sin(\omega t + \varphi_s) = a \sin[\omega(t - T/4) + \varphi_M]$ , ce qui donne

$\varphi_s = \varphi_M - \pi/2 + 2k\pi$ , avec k un entier positif.

D'où :  $\Delta\varphi = - (4k - 1) \pi/2$ , ce qui conduit à :  $x = (4k - 1)\lambda/4$ , avec k un entier positif.

Les points de la corde qui vibrent en quadrature avance de phase par rapport à la source sont situés au repos à  $\lambda/4$  avant les points qui vibrent en phase avec la source.

### Questions

Montrer que les points de la corde vibrant en quadrature retard de phase par rapport à la source sont définis par leur position de repos d'abscisse :

$$x = (4k + 1) \lambda/4, \text{ avec } k \in \mathbb{N} .$$

#### Aspect de la corde à un instant t donné

Pour un point M donné, à tout instant t on a :

$y_M(t) = a \sin(\omega t - 2\pi x/\lambda)$  dans le cas où  $\varphi_s = 0$ ,

ce qui entraîne qu'à un instant t donné, on peut écrire pour tout point M :

$$y_t(x) = a \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t + \pi\right).$$

Ainsi, pour t donné,  $y_t(x)$  est fonction sinusoïdale de l'abscisse x, de la période  $\lambda$  et de la phase initiale  $(-\omega t + \pi)$ .

La courbe représentant  $y_t(x)$  donne l'aspect de la corde à un instant t considéré (Fig.11). Elle est appelée par certains "sinusoïde des espaces".

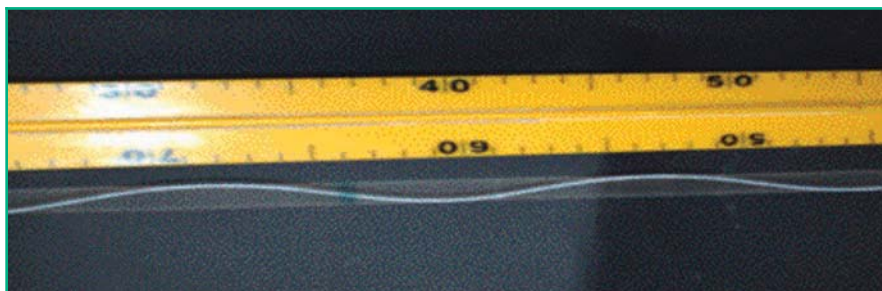


Fig.11 : Aspect de la corde à un instant donné

**Remarque**

Si les vibrations de la source commencent à  $t = 0$  et que l'instant  $t$  choisi est de l'ordre de quelques périodes seulement, il se peut qu'à cet instant l'onde n'a pas atteint encore l'autre extrémité de la corde. Il faut alors chercher la position  $x_f$  du front d'onde. Pour ce, il suffit de calculer la distance parcourue par l'onde entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t$  choisi.

$x_f = v.t$ , ce qui équivaut à :  $x_f = n.\lambda$ , en posant  $n = t / T$ .

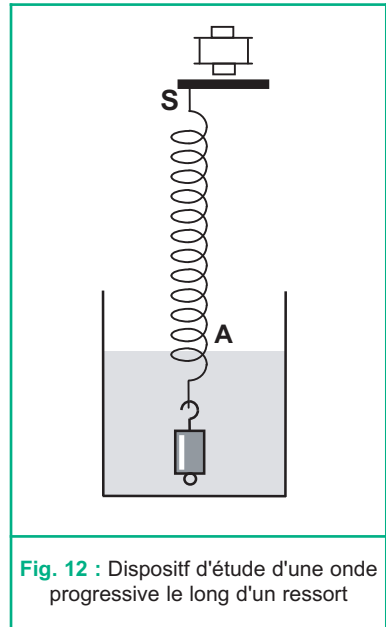
**2.3- ONDE SINUSOÏDALE LE LONG D'UN RESSORT**

On dispose d'un ressort à spires non jointives tendu verticalement par la suspension d'un solide à son extrémité inférieure. L'extrémité supérieure **S** est attachée à un vibreur qui lui impose des vibrations verticales et sinusoidales de période  $T$ . La partie inférieure est plongée dans un récipient rempli d'eau, (Fig.12).

**Manipulation**

On met le vibreur en marche et on observe le ressort d'abord en lumière ordinaire puis en lumière stroboscopique.

- ♦ En lumière ordinaire, le ressort nous paraît flou.
- ♦ En éclairant le ressort à l'aide d'un stroboscope de période réglable  $T_e$ , on constate que :
  - pour  $T_e = T$ , le ressort paraît immobile sous forme d'une succession de zones alternativement comprimées et dilatées.
  - pour  $T_e$  légèrement supérieure à  $T$ , les zones comprimées et dilatées paraissent progresser lentement le long du ressort de **S** vers **A**.



**Fig. 12** : Dispositif d'étude d'une onde progressive le long d'un ressort

**Questions**

- 1°) Quel est le but d'immersion de l'extrémité inférieure du ressort dans l'eau ?
- 2°) Comment apparaissent les spires en lumière ordinaire ?
- 3°) Qu'observe-t-on en éclairage stroboscopique :
  - a- quand la période  $T_e = kT$ ,  $T_e$  étant la période des éclairs,  $T$  la période du vibreur et  $k$  un entier positif?
  - b- quand la période  $T_e$  est légèrement inférieure ou légèrement supérieure à  $kT$  ?
- 4°) Quelle est la nature de l'onde qui se propage le long du ressort ?
- 5°) Les spires, restent-elles équidistantes lorsqu'elles sont en mouvement ?

### Interprétation

En lumière ordinaire, le ressort paraît flou. Donc, toutes les spires sont entrain de vibrer. En effet, les excitations périodiques de l'extrémité source **S** sont transmises à toutes les spires du ressort élastique de proche en proche jusqu'à l'extrémité inférieure **A**.

En éclairage stroboscopique et pour  $T_e = kT$ , entre deux éclairs successifs, tout point du ressort effectue en réalité  $k$  oscillations complètes. Ainsi, chaque spire est éclairée toujours dans la même position. Le ressort paraît immobile sous forme d'une succession de zones alternativement comprimées et dilatées. La non équidistance des spires montre que celles-ci n'ont pas la même élongation à un instant  $t$  donné.

De la même manière que pour le cas d'une corde élastique, on explique le mouvement apparent lent des spires dans un sens ou dans l'autre. Du fait que les spires du ressort oscillent de part et d'autre de leur position de repos dans la direction de propagation de l'onde, celle-ci est qualifiée d'onde longitudinale.

On peut établir l'expression de l'élongation d'une spire à un instant  $t$  donné de la même manière que pour la corde :

Si  $y_s(t) = a \sin(\omega t)$ , on montre qu'en absence de tout amortissement on a :

$$y_M(t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

## 2.4- ONDE SINUSOÏDALE A LA SURFACE DE L'EAU

### Manipulation

On dispose d'un vibreur muni d'une fourche à pointe unique et d'une cuve à ondes. Au repos, la pointe verticale affleure la surface libre de la nappe d'eau de la cuve en un point **S**. En mettant le vibreur en marche, la pointe impose au point **S** des vibrations verticales sinusoïdales de fréquence  $N$ .

En éclairant la surface de l'eau à l'aide d'un stroboscope de fréquence réglable  $N_e$ , on constate que :

- Pour une fréquence  $N_e = N$ , la surface de l'eau paraît immobile avec des crêtes circulaires concentriques, alternées par des creux de même forme. Il s'agit donc de rides circulaires centrées au point **S**. Sur l'écran en verre dépoli de la cuve à ondes, on observe une succession de cercles concentriques immobiles alternativement brillants et sombres.

Les cercles brillants et sombres sont les images des crêtes et des creux (Fig.13).

- En diminuant légèrement la fréquence  $N_e$  des éclairs, les rides paraissent progresser lentement à la surface de l'eau, sans se déformer, en s'éloignant de la source. Les rides circulaires se propageant à la surface d'un liquide constituent donc un autre exemple d'ondes progressives.

### Questions

1°) La célérité de l'onde qui progresse à la surface de l'eau à partir du point source  $S$ , est-elle la même dans toutes les directions ? Justifier la réponse.

2°) Montrer qualitativement que, même en supposant le frottement nul, plus un point  $M$  de la surface de la nappe d'eau est loin de la source, plus son amplitude de vibration est inférieure à celle de la source  $S$ .



Fig. 13 : Rides circulaires à la surface de l'eau pour  $N_e = N$

### Etude théorique

Le mouvement vibratoire de la pointe de la fourche, imposé au point  $S$  de la surface libre de l'eau donne naissance à une onde circulaire qui se propage à partir de  $S$  dans toutes les directions de la surface de l'eau, sous forme de rides superficielles, circulaires et transversales.

Ainsi, tous les points de la surface d'eau situés à la même distance  $r$  du point  $S$  et qui constituent un cercle de centre  $S$  et de rayon  $r$ , ont à tout instant le même état de mouvement. Ils vibrent toujours en phase et avec la même amplitude. Suivant une direction passant par le centre  $S$ , les cercles concentriques, lieux des points vibrant en phase, sont équidistants de la longueur d'onde  $\lambda$  (Fig.14).

En éclairage stroboscopique et pour une fréquence  $N_e = N$ , on observe l'immobilité apparente des rides. Ces rides circulaires sont régulièrement espacées de  $\lambda$ .

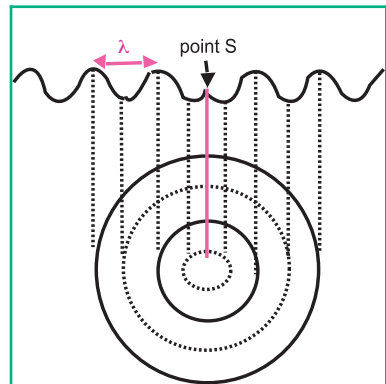


Fig. 14 : Onde circulaire qui se propage à partir de  $S$

### Remarque

■ L'amplitude des ondes qui progressent à la surface de l'eau décroît en s'éloignant de la source même si l'amortissement est supposé nul. Cette décroissance est due au fait que l'énergie mécanique cédée à l'onde par la source de vibrations se répartit de proche en proche sur une quantité de liquide de plus en plus grande quand elle progresse à la surface de l'eau. C'est le phénomène de dilution d'énergie.

■ Si au lieu de la pointe, on utilise une réglette verticale dont le bord inférieur affleure au repos la surface libre de la nappe d'eau de la cuve à ondes, il se formera des rides rectilignes parallèles à la réglette. Ces rides se propagent perpendiculairement à la réglette. La distance séparant deux rides consécutives est égale à la longueur d'onde  $\lambda$  (Fig.15).

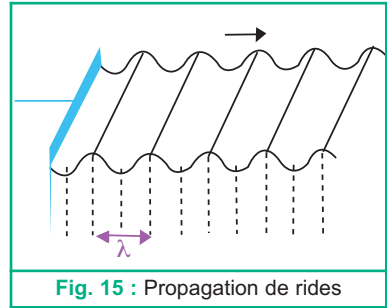


Fig. 15 : Propagation de rides

## 2.5- LE SON, EXEMPLE D'ONDE PROGRESSIVE A TROIS DIMENSIONS

### Manipulation

A proximité d'un haut-parleur alimenté par un générateur BF, on place un microphone (M) très sensible. On relie les bornes du haut-parleur et du microphone respectivement aux voies  $Y_1$  et  $Y_2$  d'un oscilloscope bicourbe (Fig.16a). En utilisant la voie  $Y_1$  seule, on obtient l'oscillogramme ( $C_1$ ) traduisant les vibrations sinusoidales de la membrane du haut-parleur avec la fréquence  $N$  imposée par le générateur B.F.

En utilisant simultanément les voies  $Y_1$  et  $Y_2$ , on observe sur l'écran de l'oscilloscope, en plus de la première sinusoïde ( $C_1$ ), une deuxième sinusoïde ( $C_2$ ) de même fréquence  $N$  traduisant les vibrations de la membrane du microphone (Fig.16b). Ces vibrations résultent forcément du son émis par le haut-parleur. En approchant ou en éloignant le microphone par rapport au haut-parleur, suivant une direction bien déterminée, on observe toujours la sinusoïde ( $C_2$ ) de fréquence  $N$ , mais avec une amplitude qui augmente ou qui diminue et dont le décalage horaire par rapport à ( $C_1$ ) passe régulièrement plusieurs fois de 0 à  $T/2$ . En déplaçant maintenant le microphone autour du haut-parleur dans toutes les directions, tout en le maintenant à la même distance  $r$  de ce dernier, on constate que la sinusoïde ( $C_2$ ) reste identique à elle-même et stable par rapport à la sinusoïde ( $C_1$ ).

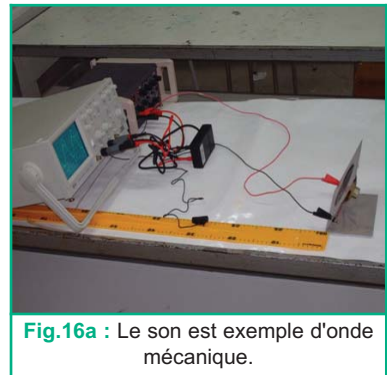


Fig.16a : Le son est exemple d'onde mécanique.

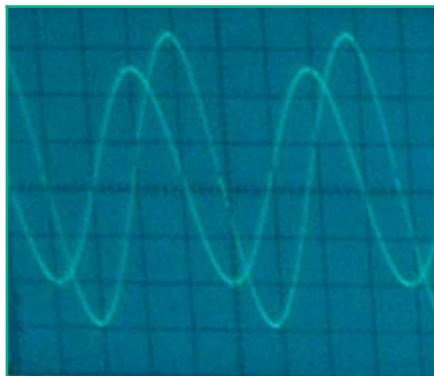


Fig.16 b : Oscillogrammes ( $C_1$ ) et ( $C_2$ )

### Questions

- 1°) Quelle est la constatation qui montre que le son est une onde tridimensionnelle ?
- 2°) L'onde sonore est-elle transversale ou longitudinale ?
- 3°) Expliquer les augmentations et les diminutions de l'amplitude de la sinusoïde  $C_2$  relevées lors du déplacement du microphone par rapport au haut-parleur.
- 4°) Quelle est la longueur de déplacement du microphone par rapport au haut-parleur au bout de laquelle le décalage horaire entre les sinusoïdes ( $C_2$ ) et ( $C_1$ ) varie de  $T/2$  ? Justifier la réponse.

### Conclusion

Le son est de nature vibratoire. C'est une onde mécanique, appelée onde sonore et plus particulièrement acoustique lorsqu'elle est susceptible d'être perçue par l'oreille de l'homme. L'onde sonore émise par une source ponctuelle (approximation du haut-parleur) est une onde progressive sphérique mais qui s'atténue en s'éloignant de la source à cause de la dilution de l'énergie.

# L'essentiel

- On appelle onde, le phénomène résultant de la propagation d'une succession d'ébranlements dans un milieu donné.
- Une onde est dite transversale si la direction des déformations auxquelles elle est due est perpendiculaire à la direction de sa propagation.
- Une onde est dite longitudinale si la direction des déformations auxquelles elle est due est parallèle à la direction de sa propagation.
- La propagation d'une onde correspond à un transport d'énergie sans déplacement de matière.
- La célérité (ou vitesse de propagation) d'une onde dépend de la nature du milieu de propagation et de ses propriétés.
- Toute onde se propageant dans un milieu ouvert est progressive. Elle est caractérisée par une double périodicité spatiale et temporelle.
- La période temporelle  $T$  de l'onde est liée à la période spatiale  $\lambda$  par la relation :

$$\lambda = v \cdot T$$
, avec  $v$  la célérité de l'onde.



# Exercices

## Exercice résolu

### ÉNONCÉ

A l'extrémité libre O d'une lame vibrant sinusoidalement avec une fréquence  $N = 100$  Hz, on attache une corde élastique de longueur  $L = 0,6$  m. Etant tendue, celle-ci est le siège d'une onde progressive sinusoidale transversale non amortie d'amplitude  $a = 5$  mm, de phase initiale nulle et de célérité  $v = 12$  m.s<sup>-1</sup>.

- 1°) Etablir l'équation horaire de mouvement d'un point M de la corde situé au repos à  $x = 21$  cm de la source et comparer sa vibration par rapport à celle de la source.
- 2°) Représenter dans le même système d'axes, les diagrammes de mouvements de la source et du point M.
- 3°) Déterminer le lieu et le nombre des points de la corde vibrant en quadrature avance de phase par rapport à la source.
- 4°) Représenter l'aspect de la corde à l'instant  $t_1 = 3,25 \cdot 10^{-2}$  s et en déduire celui pris à l'instant  $t_2 = 3,75 \cdot 10^{-2}$  s.

### SOLUTION

1°) L'onde se propage sans amortissement. Donc, à tout instant  $t$ , on a :

$$y_M(t) = y_O(t - \theta) ; \theta = \frac{x}{v} : \text{temps mis par l'onde pour se propager de O à M.}$$

$$\text{Or : } y_O(t) = a \sin(\omega t). \text{ Il vient donc : } y_M(t) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) ; \varphi = - \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{v}{N} ; \text{A.N : } \lambda = 12 \text{ cm, ce qui donne } \varphi = - \frac{7\pi}{2} = \left(-4\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad.}$$

$$y_M(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin\left(200 \pi t + \frac{\pi}{2}\right) .$$

Donc, le point M vibre avec la même amplitude que la source mais en quadrature avance de phase par rapport à cette dernière.

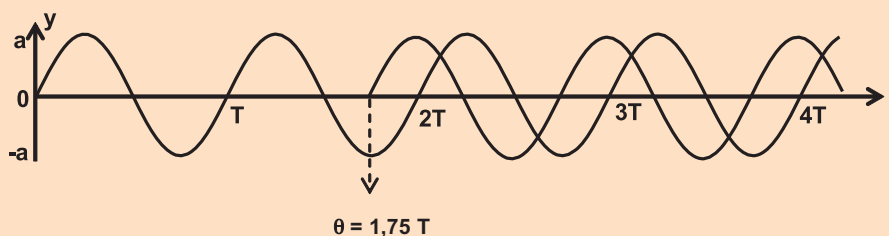
2°) Diagrammes de mouvements de S et de M.

Si le mouvement de la source débute à  $t = 0$ , le point M ne commencera à vibrer qu'à  $t_1 = \theta$ , temps mis par le front de l'onde pour se propager de la source jusqu'au point M.

$$\theta = \frac{x}{v}; \text{ or } x = \frac{7}{4}\lambda; \text{ donc } \theta = \frac{7}{4}T = 1,75 T$$

$$\text{Pour tout } t < \frac{7}{4}T, y_M(t) = 0 \text{ et pour tout } t > \frac{7}{4}T, y_M(t) = a \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

En effet, le diagramme de mouvement du point M s'obtient par une translation de celui de la source d'une longueur représentant  $\theta$  suivant l'axe des temps.



3°) Un point M de la corde vibre en quadrature avancée de phase par rapport à la source si :

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi x}{\lambda} = -(4k-1)\frac{\pi}{2} \text{ rad, ce qui conduit à } x = (4k-1)\frac{\lambda}{4}$$

$$\text{Or, } x \leq L. \text{ D'où : } k \leq \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{L}{\lambda} = 5. \text{ Donc, } k \leq 5,25. \text{ Or, } k \leq N^*. \text{ On a alors : } k \leq 5; k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

<b>k</b>	1	2	3	4	5
<b>x (cm)</b>	9	21	33	45	57

On remarque que le point M situé à  $x = 21$  cm est bien l'un de ces cinq points.

4°) Distance parcourue par l'onde entre sa naissance (à  $t_0 = 0$ ) et l'instant  $t_1$ .

$$x_1 = v t_1; \text{ soit : } x_1 = \lambda \frac{t_1}{T}. \text{ Or, } \frac{t_1}{T} = 3,25.$$

Donc,  $x_1 = 3,25\lambda$ . On constate que  $x_1$  est inférieur à L.

En effet,  $L = 5\lambda$ . Donc l'onde n'a pas encore atteint l'extrémité fixe de la corde.

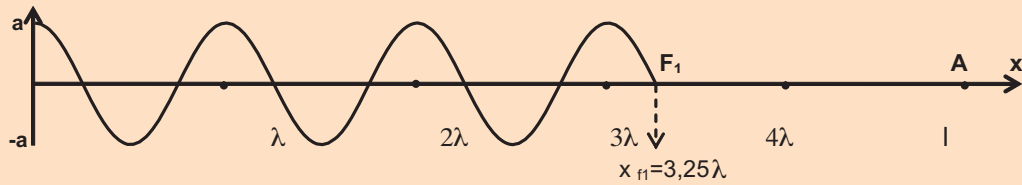
Ainsi,  $x_1$  représente la position  $x_{f_1}$  du front d'onde.

∞ Pour  $x > x_{f_1}$ ,  $y_{t_1}(x) = 0$  : le brin  $F_1A$  de la corde est encore au repos.

$$\infty \text{ Pour } x < x_{f_1}, y_{t_1}(x) = a \sin(\omega t_1 - \frac{2\pi x}{\lambda}), \omega t_1 = \frac{2\pi}{T} t_1. \text{ Or, } \frac{t_1}{T} = 3,25$$

$$\text{Donc, } \omega t_1 = 6,5\pi \text{ rad. Par suite, } y_{t_1}(x) = a \cos(\frac{2\pi x}{\lambda})$$

d'où l'aspect suivant de la corde à l'instant  $t_1$ ,



### Remarques

1) On retrouve bien pour le point M de la question (1) situé à  $x = 1,75 \lambda$ , une élongation  $y$  nulle à  $t_1 = 3,25 T$ .

2) Il y a une autre méthode pratique permettant de dessiner rapidement la partie de la corde parcourue par l'onde sans recourir à l'expression  $y_{t_1}(x)$ .

En effet il suffit d'extrapoler la sinusoïde de période  $\lambda$  jusqu'au point source.

• Aspect de la corde à l'instant  $t_2 = 3,75 \cdot 10^{-2} \text{ s}$  :

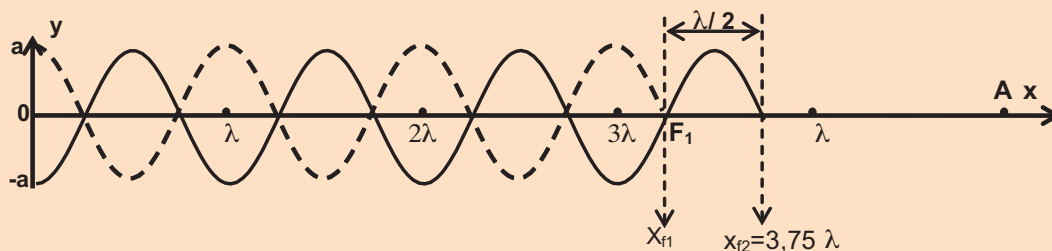
$$\frac{t_2 - t_1}{T} = \frac{1}{2}, \text{ ce qui signifie : } (t_2 - t_1) = \frac{1}{2} T.$$

Donc, entre  $t_1$  et  $t_2$  l'onde progresse de la distance  $\frac{\lambda}{2}$ .

Ainsi, à  $t_2$ , le front d'onde se trouve à  $x_{f_2} = x_{f_1} + \frac{\lambda}{2}$ .

Or,  $x_{f_1} = 3,25 \lambda$ . Donc,  $x_{f_2} = 3,75 \lambda$ .

D'où l'aspect de la corde à l'instant  $t_2$  est représenté ci-dessous :



# Exercices à résoudre

## Tests rapides des acquis

### 1 Items "vrai ou faux"

Evaluer les propositions suivantes par vrai ou faux.

- 1°) Une onde mécanique se propage dans le vide.
- 2°) Lors de sa propagation, un ébranlement mécanique transporte de l'énergie.
- 3°) La célérité d'un ébranlement mécanique ne dépend pas du milieu de propagation.
- 4°) Une onde sonore peut se propager dans le vide.
- 5°) La longueur d'onde  $\lambda$  est la distance parcourue par l'onde durant une période T.
- 6°) La propagation d'une onde correspond à un déplacement de matière.
- 7°) Dans un milieu homogène, la célérité d'une onde est constante.
- 8°) L'onde qui se propage à la surface d'un liquide est une onde transversale.
- 9°) L'onde sonore est une onde longitudinale.
- 10°) Le déplacement d'un mobile correspond à un déplacement de matière alors que la propagation d'une onde correspond à un déplacement d'énergie.

### 2 Questions à Choix Multiples

Préciser pour chacune des questions suivantes, la(ou les) proposition(s) juste(s).

- I- A tout phénomène ondulatoire, est associé :
- a- un déplacement de matière ;
  - b- un déplacement d'énergie ;
  - c- un déplacement de matière et d'énergie.
- II- Un enfant lance un caillou dans une étendue d'eau calme. L'impact du caillou dans l'eau provoque une déformation de sa surface. Cette déformation se propage à la surface de l'étendue. La vitesse avec laquelle se propage l'ébranlement à la surface de l'eau dépend de :
- a- l'énergie initiale du caillou ;
  - b- la taille du caillou ;
  - c- la profondeur de l'étendue d'eau.
- III- Une longue corde OA tendue est reliée en O à une lame vibrante de fréquence  $N = 100\text{Hz}$ .
- En A, un dispositif permet d'éviter les réflexions. On éclaire la corde à l'aide d'un stroboscope de fréquence  $N_e = 49\text{ Hz}$ . On observe alors la corde prendre l'aspect d'une sinusoïde :
- a- fixe ;
  - b- qui se déplace lentement de O vers A ;
  - c- qui se déplace lentement de A vers O.
- IV- Une onde progressive sinusoïdale de fréquence  $N = 50\text{Hz}$  se propage à la surface d'un liquide au repos avec la célérité  $v = 0,25\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . La distance qui sépare deux points du liquide qui vibrent en phase est alors égale à :
- a- 5 mm ;
  - b- 10 mm ;
  - c- 15 mm.

## Exercices d'application

**3** Une lame vibrante impose à l'extrémité S d'une corde horizontale un mouvement

transversal rectiligne et sinusoïdal d'équation :

$$y = a \sin(100\pi t), \text{ avec } t \text{ en seconde.}$$

La célérité de propagation des ébranlements le long de la corde est  $v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

On supposera l'amortissement nul.

**1°)** Déterminer la fréquence  $N$  de vibration de l'extrémité S et la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde progressant le long de la corde.

**2°) a-** Représenter l'aspect de la corde aux instants  $t_1 = 0,02 \text{ s}$  et  $t_2 = 0,05 \text{ s}$  sachant que le mouvement de l'extrémité S de cette corde commence à  $t=0$  en se déplaçant dans le sens positif.

**b-** Quel est, par rapport à la source, l'état vibratoire de chacun des points  $M_1$  et  $M_2$  distants de S respectivement de  $d_1 = 10 \text{ cm}$  et de  $d_2 = 40 \text{ cm}$  ?

**3°)** On éclaire la corde avec un stroboscope de fréquence  $N_e$  réglable. Quel est l'aspect observé de la corde lorsque  $N_e$  vaut  $25 \text{ Hz}$ ,  $49 \text{ Hz}$  et  $51 \text{ Hz}$ ? Justifier les réponses.

**4** L'extrémité S d'une longue corde est fixée à l'extrémité d'une lame vibrante qui oscille sinusoïdalement avec une fréquence  $N = 50 \text{ Hz}$  et une amplitude  $a = 0,5 \text{ cm}$ . A l'instant zéro, la lame est dans sa position d'équilibre et commence son mouvement vers le haut.

**1°)** Quelle est l'équation du mouvement de S ? (on oriente positivement la verticale vers le haut).

**2°)** L'onde se propage avec la célérité  $v = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ; l'extrémité de la corde est telle que l'onde ne peut pas se réfléchir.

**a-** Etablir l'équation du mouvement d'un point M situé à la distance  $d$  de S.

**b-** Ecrire cette équation dans le cas où  $d = 3 \text{ cm}$ . Comparer le mouvement de M à celui de S.

**3°)** Tracer les courbes représentatives de  $y_S(t)$  et  $y_M(t)$  en fonction du temps.

**4°)** Représenter l'aspect de la corde aux instants  $t_1 = 0,03 \text{ s}$  et  $t_2 = 0,035 \text{ s}$ .

**5** Un électroaimant communique à une lame vibrante un mouvement sinusoïdal de fréquence  $N = 100 \text{ Hz}$  et d'amplitude  $a = 5 \text{ mm}$ . On fixe à l'extrémité de la lame une corde très longue.

**1°)** A l'instant  $t = 0$ , la lame part de sa position d'équilibre dans le sens positif. A l'instant  $t = 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ , le point M de la corde d'abscisse  $x = 32,5 \text{ cm}$  entre à son tour en vibration.

**a-** Calculer la vitesse de propagation des ondes le long de la corde.

**b-** Calculer la longueur d'onde  $\lambda$ .

**2°)** On étudie maintenant, le mouvement de M en fonction du temps (on suppose qu'il n'y a pas de réflexion à l'autre extrémité de la corde).

**a-** Etablir l'équation horaire de son mouvement.

**b-** Tracer le graphe représentant le mouvement de M en fonction du temps entre les instants  $t_1 = 0 \text{ s}$  et  $t_2 = 0,1 \text{ s}$ .

**c-** Etablir l'expression des instants  $t$  pour lesquels l'élongation de M est maximale. On prendra, pour origine des temps, l'instant où commence le mouvement de la source). Calculer l'instant  $t_0$  pour lequel cette valeur est atteinte pour la première fois.

**6** Une onde progressive sinusoïdale de fréquence  $N = 50 \text{ Hz}$ , créée par une source S à partir d'un instant  $t_0 = 0$ , se propage à la surface de l'eau. La figure ci-dessous représente, à un instant  $t_1$ , une coupe de cette surface dans un plan vertical passant par S. A cet instant, l'élongation du point S est nulle.



La distance AB est égale à 3,0 cm, l'amplitude de l'onde est constante et égale à 4mm.

- 1°) Déterminer la valeur de la longueur d'onde  $\lambda$ .
  - 2°) Calculer la célérité  $v$  de cette onde ?
  - 3°) Quelle est la valeur de  $t_1$  ?
  - 4°) Etablir l'équation horaire du mouvement de la source  $y_s(t)$  ?
  - 5°) A l'instant  $t_1$ , combien y a-t-il de points vibrant en opposition de phase avec S ?
- Faire un schéma en indiquant les positions et le sens du mouvement de ces points et celui du point S à l'instant  $t_1$ .
- 6°) Représenter une coupe de la surface de l'eau à l'instant  $t_2 = 6,25 \cdot 10^{-2}$  s.

### Exercices de synthèse

**7** En un point O de la surface de l'eau d'une cuve à ondes, une source ponctuelle produit des oscillations sinusoïdales verticales d'amplitude  $a$  et de fréquence  $N$ . Des ondes entretenues de formes circulaires se propagent à la surface de l'eau avec la célérité  $v$  (Fig.1).

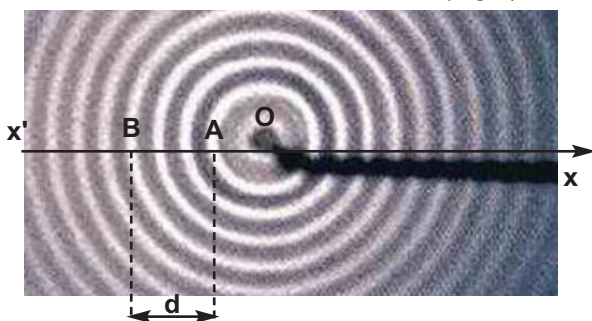


Fig.1

Les bords de la cuve à ondes sont tels qu'ils absorbent les ondes progressives provenant de S. On néglige tout amortissement des ondes.

1°) **a**-Indiquer, sommairement, comment faut-il procéder pour observer des rides circulaires apparemment immobiles.

**b**-La distance entre les deux points A et B appartenant chacun à une crête circulaire est :  $d = 24$  mm. En déduire la valeur de la longueur d'onde  $\lambda$ .

2°) La sinusoïde traduisant l'élongation verticale  $y_M(t)$  d'un point M de la surface de l'eau situé à la distance  $d'$  du point O, est donnée par la figure 2.

**a**-Etablir l'expression de  $y_M(t)$ .

**b**-Calculer la célérité  $v$  de l'onde.

**c**-Déduire de la figure 2, la sinusoïde traduisant l'évolution de l'élongation verticale  $y_0(t)$  du point O ; puis s'y appuyer pour établir l'expression de  $y_0(t)$ .

3°) Représenter une coupe transversale de la surface de l'eau suivant l'axe  $x'x$  à l'instant  $t_0 = 0,045$  s.

4°) Préciser quels sont les points qui vibrent en phase avec la source S à l'instant  $t_0$  ?

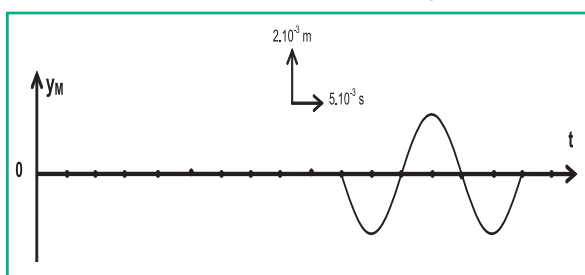


Fig.2

**8** A l'extrémité S d'une lame vibrante, on attache une corde horizontale qui passe sur la gorge d'une poulie et au bout de laquelle on suspend un solide. Du côté de la poulie, on met un dispositif qui absorbe l'énergie de l'onde. Le repère d'étude (O,X,Y) a une origine O confondue avec la position de S au repos (Fig.1).

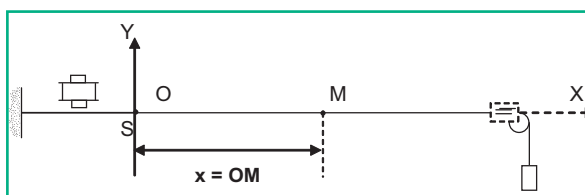


Fig.1

1°) L'extrémité S est une source d'onde d'équation horaire  $y_s(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$  d'amplitude  $a = 3$  mm. Le mouvement de la source S a démarré à  $t_0 = 0$  s ; avant l'instant  $t_0 = 0$  s la corde était entièrement au repos.

**a**-Préciser et interpréter ce que l'on observe avec un éclairage continu.

**b**-Qu'observe-t-on si on éclaire la corde à l'aide d'un stroboscope de fréquence  $N_e$  légèrement inférieure à la fréquence  $N$  du vibreur ?

2°) La figure 2 représente l'aspect de la corde à l'instant  $t_1 = 0,025$  s, où le front d'onde atteint le point A d'abscisse  $x = OA = 0,75$  m.

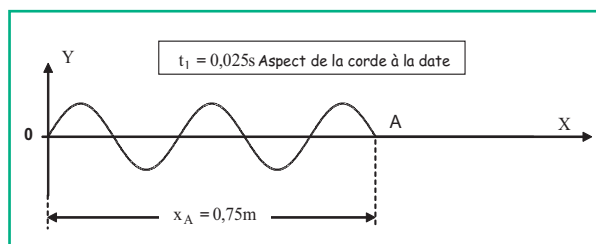


Fig.2

a- Calculer la longueur d'onde  $\lambda$ , la célérité  $v$  de l'onde et la fréquence  $N$ .

b- Donner l'équation horaire du mouvement de la source ?

c- Déterminer l'élongation  $y_A(t)$  de mouvement du point A considéré.

d- Représenter l'allure du graphe de  $y_A(t)$ .

**9** I- Une corde élastique de longueur infinie tendue horizontalement est attachée par son extrémité S au bout d'une lame vibrante qui lui communique à partir de l'instant  $t = 0$  des vibrations sinusoïdales transversales. On suppose qu'il n'y a aucun amortissement.

L'une des courbes de la figure ci-après représente le diagramme du mouvement d'un point A de la corde situé à une distance  $x_A$  de l'extrémité source. L'autre représente l'aspect de la corde à un instant  $t_1$ .

1°) Identifier les courbes (I) et (II) en justifiant la réponse. En déduire les périodes temporelle et spatiale de l'onde ainsi que l'amplitude  $a$  des ébranlements.

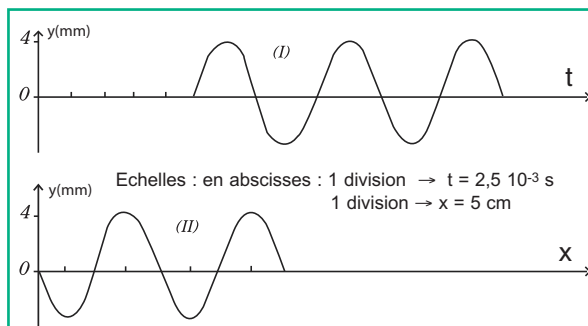
2°) Déterminer la célérité de l'ébranlement, la distance  $x_A$  et l'instant  $t_1$ .

3°) Ecrire l'équation horaire des vibrations de la source S et celle du point A de la corde.

4°) a- Représenter l'aspect de la corde à l'instant  $t_2 = 2,5 \cdot 10^{-2}$ s.

b- Placer sur le graphique précédent, les points ayant l'élongation  $(-\frac{a}{2})$  et se déplaçant dans le sens négatif.

c- Déterminer le nombre et les abscisses des points de la corde qui vibrent en quadrature retard de phase par rapport à la source.



II- La lame vibrante porte une pointe S animée d'un mouvement vertical avec lequel elle impose à un point O de la surface de l'eau une élongation  $y_O(t) = 10^{-3} \sin(628 t)$  ( $y$  en m et  $t$  en s).

1°) Etablir l'équation horaire d'un point M de la surface de l'eau, tel que  $OM = x$ , au repos.

2°) Calculer la célérité de l'onde sachant que la plus petite distance entre 2 points qui vibrent en quadrature de phase est  $d = 1$ mm.

3°) Représenter graphiquement la coupe de la surface de l'eau suivant un plan vertical passant par O aux instants  $t_2 = 0,035$  s et  $t_3 = 0,040$  s.

4°) Pour observer l'immobilité apparente de la surface d'eau, on utilise un stroboscope. Quelle doit être pour ce, la fréquence des éclairs ? Calculer la plus grande fréquence possible. S'il y avait un éclair de moins par seconde, les ondes sembleraient se propager lentement, préciser le sens de propagation apparent.

**10** Un électroaimant communique à une lame vibrante un mouvement sinusoïdal de fréquence  $N$  et d'amplitude  $a$ . On fixe à l'extrémité de la lame une corde de longueur  $L = 2$  m par son extrémité S. A l'autre extrémité de la corde, on exerce une force de tension et on place du coton.

1°) A  $t = 0$ , la lame part de sa position d'équi-libre. On donne la courbe d'évolution de l'élongation au cours du temps d'un point  $M_1$  se trouvant au repos à une abscisse  $x_1$  de S (Fig.1) et l'aspect de la corde à un instant  $t_0$  (Fig.2).

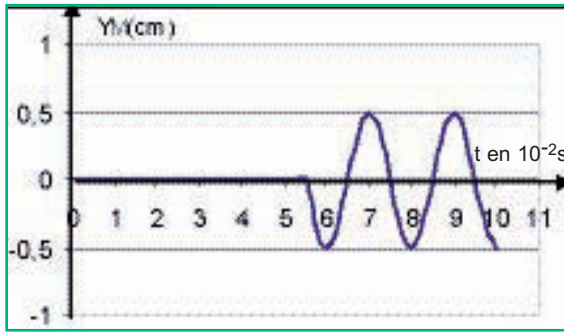


Fig.1

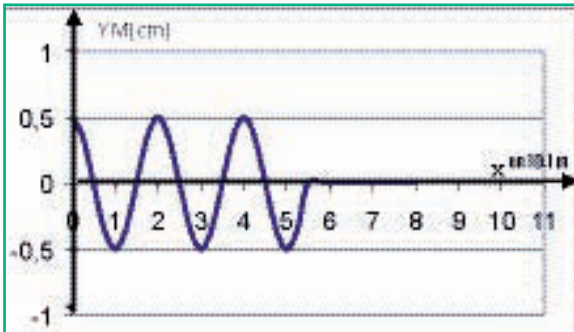


Fig.2

Déduire de ces données :

- a- la fréquence  $N$  et la longueur d'onde  $\lambda$  ;
- b- la célérité  $v$  de l'onde ;
- c- l'abscisse  $x_1$  et l'instant  $t_0$ .

2°) Que peut-on dire du mouvement de chacun des points  $S$  et  $M_1$  ?

3°) - Déterminer l'expression des instants  $t$  au niveau desquels le point  $M_1$  passe par l'élongation  $2,5 \cdot 10^{-3}$  m dans le sens positif des élongations durant l'intervalle de temps compris entre les instants 0 et 0,14 s.

- Donner la plus petite valeur des instants  $t$  sus indiqués.

4°) Déterminer les abscisses des points se trouvant à l'élongation  $2,5 \cdot 10^{-3}$  m et qui se déplaceront dans le sens négatif des élongations à partir de l'instant  $t_0$ .

**11** Deux petits microphones  $M_1$  et  $M_2$ , séparés d'une distance  $d$  sont disposés sur l'axe de symétrie d'un haut-parleur produisant une onde sonore sinusoïdale de fréquence  $N$  réglable. Ils sont reliés respectivement aux voies 1 et 2 d'un oscilloscope, de même sensibilité verticale. On fixe  $d = 34$  cm et  $N = 2000$  Hz ; la célérité des ondes sonores dans l'air est  $v = 340$  m.s<sup>-1</sup>.

1°) a- Quelle base de temps doit-on choisir pour observer sur la voie 1 de l'oscilloscope, deux périodes de la tension captée aux bornes du microphone  $M_1$  sachant que l'écran comporte horizontalement 10 divisions et verticalement 8 divisions.

b- Pourquoi l'amplitude de la tension observée sur la voie 2 est-elle plus faible que celle observée sur la voie 1 ?

c- Représenter l'oscillogramme des deux tensions observées.

2°) a- On modifie la fréquence  $N$  et la distance  $d$ . Pour  $N = 1$  kHz, on a  $d = 17$  cm.

Représenter l'oscillogramme obtenu.

b- Le microphone  $M_2$  est ensuite éloigné de  $M_1$  et la base de temps est réglée pour un oscillogramme analogue à l'oscillogramme de la question 1.

Préciser, dans ce cas les valeurs de  $d$  et de la nouvelle sensibilité de la base du temps ?

## 12 Mesure de la célérité d'une onde sonore.

Le son émis par le haut-parleur est capté par deux microphones  $M_1$  et  $M_2$  branchés sur les voies  $Y_A$  et  $Y_B$  de l'oscilloscope (Fig.1).

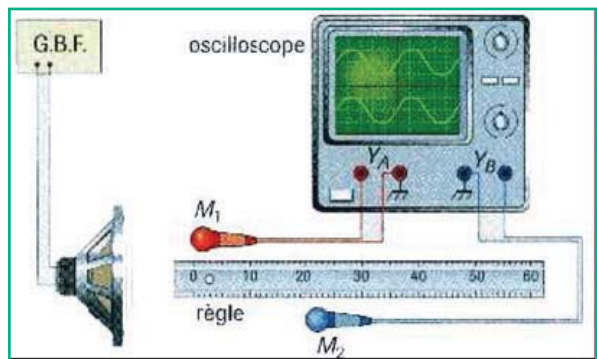


Fig.1

1°) Calculer la fréquence du son capté, sachant qu'on visualise deux périodes complètes de chaque sinusoïde sur l'oscillogramme, que l'écran comporte dix divisions au total en largeur et que la fréquence de balayage est réglée sur 0,4 ms par division. Lorsque les deux abscisses des microphones sont égales, les courbes observées sur l'oscilloscope sont en phase.



On déplace lentement le microphone  $M_2$  et on relève son abscisse  $x_2$  à chaque fois que les courbes sur l'oscilloscope sont à nouveau en phase.

N°	1	2	3	4	5
$x_2$ (cm)	68,0	136,0	204,0	272,0	340,0

2°) Préciser la valeur de la longueur d'onde qu'on peut déduire de ces mesures ?

3°) Calculer la valeur de la célérité du son dans l'air ?

**13** Le son émis par le haut-parleur est capté par le microphone M. On réalise les branchements conformément à la figure 1.

1°) Quelles sont les deux tensions visualisées sur l'oscilloscope ?

2°) Calculer la fréquence du son capté, sachant que l'on visualise deux périodes complètes de chaque sinusoïde sur l'oscillogramme, que l'écran comporte dix divisions au total, et que la fréquence de balayage est réglée sur 0,2 ms par division.

3°) On note les deux positions du micro qui permettent d'obtenir deux sinusoïdes en phase :  $x_1 = 4,5$  cm et  $x_2 = 38,5$  cm.

Quelle est la valeur de la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde sonore dans ces conditions ?

4°) En déduire la célérité  $v$  des ondes sonores dans l'air.

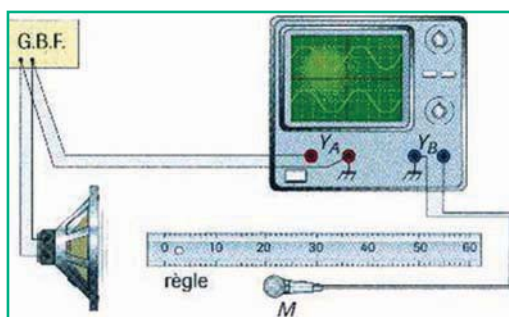


Fig.1

**14** Un haut-parleur est mis en vibration à l'aide d'un G.B.F réglé sur la fréquence  $N = 1,47$  kHz. Un microphone placé à une distance  $d$  du haut-parleur est relié à la voie B de l'oscilloscope, la voie A étant reliée au G.B.F comme le montre la figure 1.

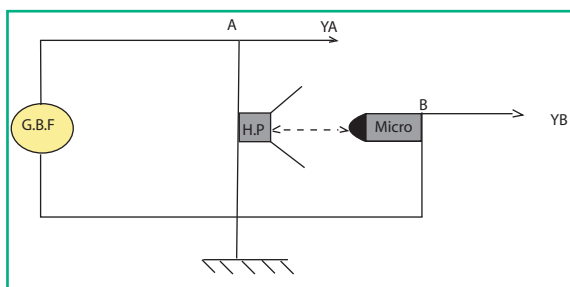


Fig.1

On observe sur l'écran de l'oscilloscope les courbes ci-dessous (Fig.2).

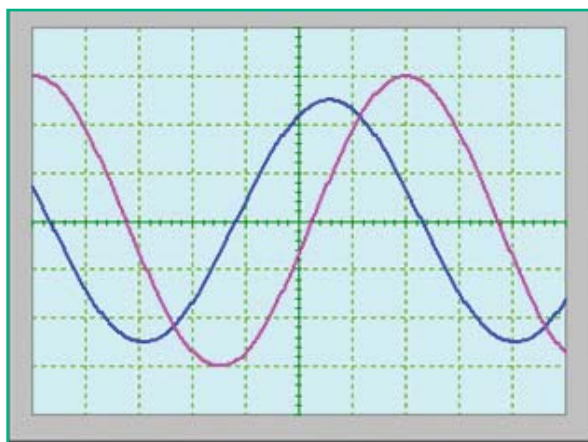


Fig.2

1°) Déterminer :

- a- la durée de balayage de l'oscilloscope ;
- b- le décalage horaire  $\theta$  (en s) entre les deux courbes. Exprimer le temps mis par l'onde sonore pour atteindre le microphone en fonction de  $\theta$  et de  $N$ .

2°) Les deux voies ont la même sensibilité :  $k = 100$  mV / div. Calculer les amplitudes des deux ondes. Pourquoi sont-elles différentes ?

3°) On augmente progressivement la distance entre le microphone et le haut-parleur. Pour deux positions successives repérées par  $d_1$  et  $d_2$  telles que :

( $d_2 - d_1 = 23,0$  cm), on obtient deux courbes en phase. En déduire la longueur d'onde  $\lambda$  et la célérité  $v$  du son.

4°) Sachant que la distance  $d$  est comprise entre 40 et 60 cm, donner sa valeur.

5°) Si on change la fréquence du G.B.F, la célérité  $v$  du son change-t-elle ? Justifier la réponse.

# Fiche technique N°1

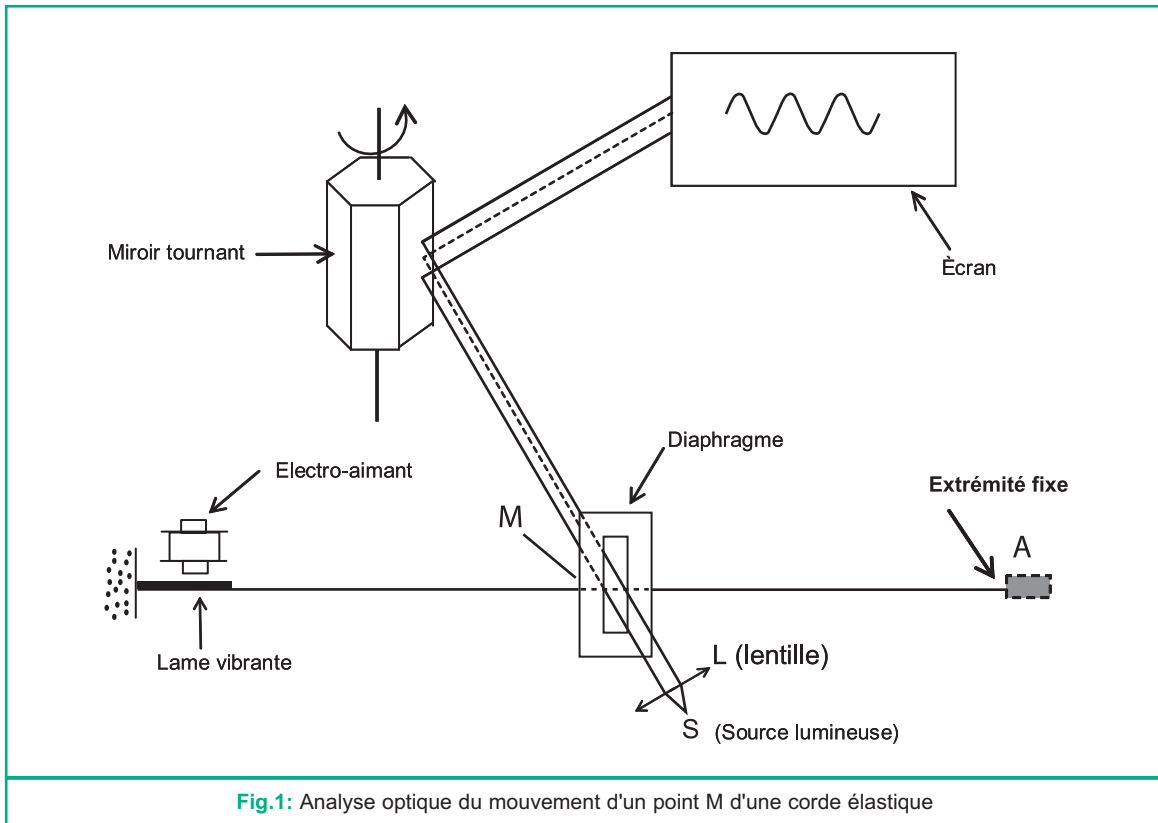
## Méthode d'analyse optique d'un phénomène périodique

Dans le paragraphe 2.2, on s'intéresse à l'étude expérimentale du mouvement d'un point de la corde. Pour cela, on utilise une méthode pratique connue sous le nom de méthode d'analyse optique.

Une corde élastique souple, sans raideur, est tendue horizontalement entre un vibreur et un support fixe. En mettant le vibreur en marche, il est difficile d'observer une forme nette de la corde.

On place parallèlement à la corde et au niveau d'un point M, appartenant à la corde, un diaphragme unifente F sur lequel tombe un faisceau lumineux parallèle.

Le faisceau émergent entoure l'ombre portée du point M de la corde. A la suite de la réflexion sur un miroir tournant à vitesse constante, cette ombre prend sur l'écran (E) la forme d'une sinusoïde (Figure 1).



# Fiche technique N°2

## La stroboscopie

### Principe de la stroboscopie

La stroboscopie est une technique d'éclairage qui permet de visualiser les phénomènes périodiques trop rapides pour être détectés par l'œil. Le stroboscope électronique (Fig.1) est une source de lumière qui émet des éclairs à des intervalles de temps  $T_e$  réguliers et à la fréquence  $N_e$ .

Pour observer un mouvement périodique de période  $T$ , on éclaire le dispositif produisant ce mouvement périodique par une lumière stroboscopique de période  $T_e$ . On substitue ainsi au mouvement réel un mouvement apparent dont les caractéristiques dépendent des valeurs de  $T$  et de  $T_e$ .



Fig.1 : Stroboscope électronique

La persistance rétinienne : L'œil n'est capable de séparer deux images successives que si l'intervalle de temps qui les sépare est supérieur à 0,1 s, c'est-à-dire si la fréquence du phénomène observé est inférieure à 10 Hz. Donc, l'utilisation du stroboscope n'a d'intérêt que si le phénomène périodique à étudier est d'une fréquences supérieures à 10 Hz.

Considérons un disque blanc sur lequel est fixée une pastille noire. Un moteur impose au disque un mouvement de rotation uniforme de fréquence  $N$  égale à 20 tr.s<sup>-1</sup> par exemple. L'observation à l'œil nu de la pastille noire n'est pas possible car la fréquence  $N = 20$  Hz du mouvement est supérieure à la fréquence de la persistance rétinienne (10 Hz). Si on éclaire le disque par un stroboscope émettant 20 éclairs par seconde ( $N_e = 20$  Hz), on observe l'immobilité apparente de la pastille noire (Fig.2)

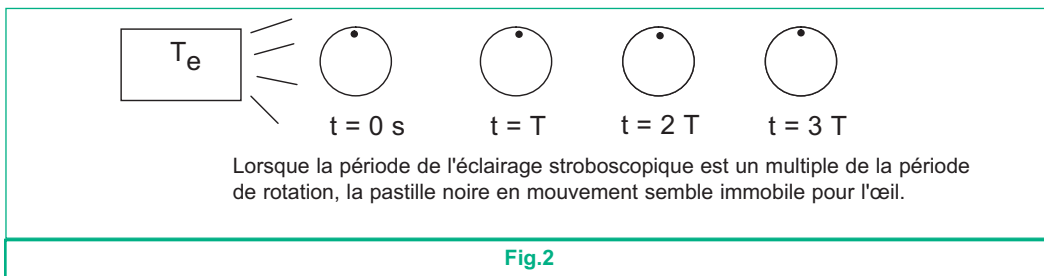


Fig.2

D'une façon générale :

- Il y a **immobilité apparente** chaque fois que :  $T_e = k T$  (avec  $k$  un entier naturel)
- Il y a **un mouvement ralenti apparent** :
  - dans le sens réel du mouvement si  $T_e$  **est très légèrement supérieure à  $T$**  (ou  $kT$ )
  - dans le sens contraire du mouvement réel si  $T_e$  **est très légèrement inférieure à  $T$**  (ou  $kT$ )

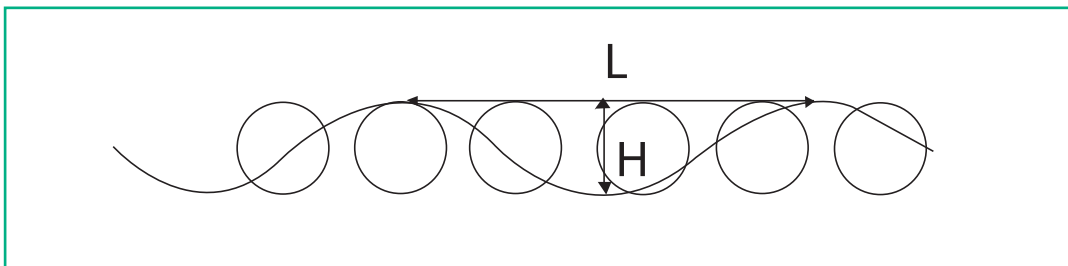
# En savoir plus

## L'énergie et la houle

Lorsque le vent souffle sur l'océan, il crée des vagues. Si le phénomène dure assez longtemps, il se forme une succession de vagues régulières : la houle. Si elle ne rencontre pas d'obstacles, cette houle peut se propager sur de longues distances.

La houle est caractérisée par sa « hauteur » de vague  $H$ , exprimée en mètre, par sa période  $T$  exprimée en seconde et par sa longueur d'onde  $\lambda$ .

Une houle courte de période 3 secondes et de hauteur 0,6 mètres a une puissance de 1 kW. La puissance d'une houle longue avec  $H = 7,5$  m et  $T = 11$  s est à peu près 600 fois plus élevée que celle de cette houle courte.



Beaucoup de procédés ont été proposés pour capter, concentrer et transformer cette énergie naturelle en énergie utile. On appelle parfois leurs réalisations des «Houlomotrices».

On retiendra deux idées essentielles à l'appréciation qualitative de cette énergie : c'est une forme dégradée de l'énergie éolienne, et donc a priori moins dense ; mais, elle peut se propager sur de très longues distances sans trop de perte.

Une étude réalisée à la fin des années 1970 sur le potentiel de cette ressource en France montrait qu'elle pourrait atteindre en moyenne 30 kW/m dans les endroits les plus exposés et plus généralement 10 à 20 kW/m ailleurs. Le rapport d'étude indiquait aussi que c'était plutôt dans certains territoires d'autres pays exposés à des houles régulières que l'on pourrait envisager le développement des «houlomotrices » et atteindre un seuil de rentabilité plus rapidement.

Un projet d'usine de transformation de l'énergie mécanique de la houle en électricité est en cours d'élaboration en Espagne et pourrait aboutir à l'installation de plusieurs centrales électriques.

La diversité des systèmes proposés indique qu'il n'existe pas encore de technologie gagnante (winning technology), ce qui implique qu'un effort significatif est encore nécessaire pour que ces technologies atteignent leur maturité.

# Réponses aux exercices

## Chapitre 1

3. 1°)  $0.7 \mu\text{F}$ , 2°)  $8.8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$   
 4. 1°)  $18 \mu\text{C}$ , 2°) a)  $0.9\text{V}$ , b)  $8.1 \cdot 10^{-6} \text{ J}$   
 5. 1°)  $0.24 \text{ s}$ , 2°) a)  $12 \text{ V}$ , b)  $3.6 \cdot 10^{-8} \text{ A}$   
 6. 1°)  $6 \cdot 10^{-4} \text{ A}$ , 2°)  $20 \text{ ms}$ , 3°)  $92 \text{ ms}$   
 7. 3°)  $1 \mu\text{s}$ , 4°)  $10^{-8} \text{ F}$   
 8. 1°)  $0.12 \text{ s}$ , 2°)  $12\text{k}\Omega$ , 3°)  $10 \mu\text{F}$   
 9. 3°)  $12 \text{ V}$ ,  $150\text{ms}$ , 4°)  $15\text{k}\Omega$

## Chapitre 2

3. a- Nord, b- Sud, c- Sud; d- Nord.  
 4. 1°) a- Bp et Ba sont opposés,  
 b- La règle du bonhomme d'Ampère.  
 2°) a- Bp et Ba ont le même sens,  
 b- La règle du bonhomme d'Ampère.  
 6. 1°)  $u_{AB} = (12L.t + 6.r.t^2) \cdot 10^{-3} \text{ V}$ . 2°)  $u_{AB} \simeq 6,06 \text{ V}$ .  
 8. 1°)  $i(t)$  tend vers une limite  $I_0$ .  
 2°)  $I_0 = \frac{E}{r+R_0}$ .  
 3°)  $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{E}{L}$ .  
 4°) On remplace  $i$  par son expression.  
 5°)  $A = \frac{E}{R}$ ;  $\alpha = \frac{R}{L}$ . 6°)  $\tau = \frac{L}{R}$ ;  
 pour  $t = 5 \cdot \tau$  le régime permanent s'établit.  
 9. a-  $I_0 = \frac{E}{R} = 0,1 \text{ A}$ . b-  $\tau = \frac{L}{R} = 0,83 \text{ ms}$ .

10. 1°)  $u_{AB} = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i$ . 2°)  $u_{BC} = Ri$ .

3°) courbe 1 :  $u_{BC}$ , courbe 2 :  $u_{AB}$ .

4°)  $I_0 = \frac{E}{r+R} = 28,6 \text{ mA}$ .

5°)  $I_0 = \frac{u_{BC}}{R} \simeq 28,5 \text{ mA}$ .

6°) Méthode de tangente.

7°)  $\tau = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ . 8°)  $\tau = \frac{L}{r+R}$ .

Donc,  $L = \tau \cdot (r+R) = 0,53 \text{ H}$ .

11. 2°)  $u_{AB} = L \cdot \frac{di}{dt} + r \cdot i$ .

3°) a-  $I_0 = \frac{u_r}{r} = 0,1 \text{ A}$ . b-  $r' = 10 \Omega$ .

4°)  $\tau \simeq 10^{-3} \text{ s}$ .

5°)  $L = (r+r') \cdot \tau = 60 \text{ mH}$ .

6°)  $W = 0,3 \text{ mJ}$ .

13. 1°) Le courant  $i$  circule de A vers B à travers

la bobine.  $I = \frac{E}{R+r} = 0,6 \text{ A}$ .

2°) Le courant  $i$  circule de A vers B à travers

la bobine, la diode est passante.

3°)  $W = m \cdot \|\vec{g}\| \cdot h = 36,3 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ .

$W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = 324 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ .

Le rendement  $\tau = 11,2 \%$ .

### Chapitre 3

3. 1°) Oscillations libres amorties;  
2°)  $E = 1,52 \cdot 10^{-4} \text{ J}$ ;  
4°)  $L = 2,67 \text{ H}$
4. 1°) L'amplitude décroît au cours du temps  
2°)  $T = 6,5 \text{ ms}$ ;  
3°)  $T_0 = 6,28 \text{ ms}$ .  
4°)  $T_E = 3,3 \text{ ms}$ ;  
5°)  $T = 2T_E$ .
7. 1°)  $T_0 = 4,0 \text{ ms}$  et  $T = 4,4 \text{ ms}$ , donc  $T > T_0$ .  
2°)  $E_1 = 1,485 \mu\text{J}$  et  $E_7 = 0,145 \mu\text{J}$ .  
3°) **b**-L'énergie totale diminue au cours du temps.
9. 1°)  $Q_0 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ ;  
2°) **b**- Voir cours page **d**-  $U_m = 3 \text{ V}$ ,  $\phi = \pi/2 \text{ rad}$ ;  
**f**-  $t_k = 0,75 T_0 + kT_0$ .  
3°) **a**-  $T > T_0$ ; **c**-  $W_J = 32,2 \mu\text{J}$ .
10. 1°) L'amplitude des oscillations diminue.  
2°) **b**-  $L = 0,255 \text{ H}$  ; 25%
11. 1°) **a**-  $A$   $t=0$ ,  $u_C = E$ , donc (2) correspond à  $u_C$ .  
**c**-  $\tau = 0,7 \text{ s}$ ; 1° **d**)  $i \simeq 158 \mu\text{A}$ .

### Chapitre 4

3.  $C = 9,5 \cdot 10^{-7} \text{ F}$
5. 2°)  $I = U/Z$ ;  
3°) **a**-  $N = 48 \text{ Hz}$ ; **b**-  $Z_0 = 32,5 \Omega$  ;  $I_0 = 3,077 \text{ A}$ .
6. 2°) **a**- Résonance d'intensité. **b**-  $\omega_0$  ne dépend que de  $L$  et de  $C$ . **c**-  $Z = R$  et  $\Delta\varphi = 0$ .
7. 1°)  $r = 15,4 \Omega$  ;  
2°)  $Q = 10,445$ ;  $P = 0,26 \text{ W}$ .
9. 2°) **a**-  $L_0 = 1 \text{ H}$ ; **b**-  $Q = 6,28 > 1$ ;  
3°)  $L < 1,6 \text{ H}$ .
10. 1°)  $E_0 = 2\pi U^2 / \omega_0 R$  ;  
2°)  $E_t = LU^2 / R^2$ .  
3°)  $E_t / E_0 = Q / 2\pi$ .

### Chapitre 5

3.  $3,46 \text{ cm}$ ,  $5,77 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $0 \text{ rad}$
4. 2°)  $0,628 \text{ s}$
5. 1°)  $0,89 \text{ s}$ ,  
2°)  $0,14 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  
3°)  $X_m$  diminue.
6. 1°) **a**-  $0,628 \text{ s}$ , **b**-  $1,59 \text{ Hz}$ ,  
2°) **a**-  $0,8 \text{ s}$  ;  $T > T_0$ , **b**-  $E_0 = 0,1 \text{ J}$  ;  $E_1 = 0,036 \text{ J}$

### Chapitre 6

3. 2°)  $T_0 = 0,28 \text{ s}$  ;  
3°) Risque de rupture
5. 1°)  $T = d/v$  ;  $N = v/d$   
2°) **b**-  $v_0 = 3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
6. 2°) **a**-  $68,2 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$  ;  $5 \text{ cm}$  ;  $2,27 \text{ Hz}$  ;  $\pi/2 \text{ rad}$   
**b**-  $T_0 = T$ , résonance de vitesse ;  
**d**-  $F_m = 1,29 \text{ N}$  ;  $\varphi_F = 0 \text{ rad}$  ;  $P = 0,46 \text{ W}$
7. 3°) **a**-  $0,8 \text{ s}$ , **b**-  $3,14 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ .

### Chapitre 8

3. 1°) **a**-  $u_S(t) = U_{Sm} \sin(2\pi Nt + \varphi_S)$ ,

$$2°) \text{ b- } T = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi NRC)^2}},$$

$$\text{c- } G = -10 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2}\right)$$

$$\text{c- } N_h = 995 \text{ Hz}, \quad 3°) \Delta\varphi = -63,6^\circ$$

4. 1°) Filtre passe-haut,

$$2°) T = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi NRC)^2}}}$$

$T$  tend vers 0 ( $N = 0$ ),  $T = 1$  pour  $N$  très grand,

- 3°)  $N_b = 15,9 \text{ Hz}$ ,  $[N_b, \infty[$

6. 1°)  $I_m$  est maximale,

$$2°) R = 20 \Omega, L = 0,32 \text{ H},$$

$$3°) \text{ a- } N_b = 136 \text{ Hz}, N_h = 146 \text{ Hz}, \text{ b- } Q = 14.$$

7. 1°) a- Résonance d'intensité,  
 b- l'intensité  $i$  par la suite  $u_R$  sont fonction de la fréquence.
- 2°) a-  $I = I_0/\sqrt{2}$ ,  $\Delta N = 1600\text{Hz}$ ,  
 b-  $N_0 \approx N_0/2 = 1,7\text{kHz}$ ,  $Q = 1,06$
- 3°) a-  $R = 250 \Omega$ ,  $L = 24,8 \text{ mH}$ , b-  $C = 346 \text{ nF}$ .
8. 1°)  $N_0 = 165 \text{ Hz}$ ,  
 2°)  $I = 92\text{mA}$ ,  $R_0 = 65,2 \Omega$ ,  $r = 5,2 \Omega$ ,  
 3°)  $\Delta N = 10 \text{ Hz}$ ,  
 4°)  $Q = 16,5$ ;  $U_C = 99 \text{ V}$   
 5°)  $L = 1,04 \text{ H}$ ,  $C = 883 \text{ nF}$ .

## Chapitre 9

10. A. 1°)  $u_L(t) = U_{Lm}\sin(2\pi Nt + \pi/2)$ ,  
 $u_C(t) = U_{Cm}\sin(2\pi Nt - \pi/2)$ ,  
 B. 1°)  $N_0 = 71\text{Hz}$ ,  
 2°) a-  $I_0 = 400 \text{ mA}$ , b-  $U_b = 89 \text{ V}$ ,  
 3°)  $Q = 4,46$ ,  
 5°)  $\Delta N = 16 \text{ Hz}$ ,  
 6°) le conducteur ohmique de résistance  $R = 100 \Omega$
4. 1°)  $y_S(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin 100\pi t$ .  
 2°) a-  $y_M(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t - 2\pi d/\lambda)$ ,  
 b-  $y_M(t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t - \pi)$ .
5. 1°) a-  $v = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . b-  $\lambda = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .  
 2°) a-  $y_M(t) = 2 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t - \pi)$ .  
 c-  $t = 6,75 \cdot T + k \cdot T$ .
6. 1°)  $\lambda = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  
 2°)  $v = 0,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .  
 3°)  $t_1 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ .  
 4°)  $y_S(t) = 4 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t + \pi)$ ,  
 5°) Points sur les cercles de rayons :  
 $x_1 = \lambda/2$  ;  $x_2 = 3\lambda/2$  ;  $x_3 = 5\lambda/2$ .
7. 1°) b-  $\lambda = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .  
 2°) a-  $y_M(t) = 2 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t)$   
 b-  $v = 0,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .  
 c-  $y_0(t) = 2 \cdot 10^{-3} \sin(100\pi t + \pi)$ .  
 4°) Deux cercles de rayons  $x_1 = \lambda$  et  $x_2 = 2\lambda$ .
8. 2°) a-  $\lambda = 0,3 \text{ m}$  ;  $v = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ;  $N = 100\text{Hz}$ .  
 b-  $y_S(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t)$ .  
 c-  $y_A(t) = 3 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t - \pi)$ .
9. I. 1°)  $T = 0,01 \text{ s}$  ;  $\lambda = 0,2 \text{ m}$ .  
 2°)  $v = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  ;  $x_A = 0,40 \text{ m}$  ;  $t_1 = 0,02 \text{ s}$ .  
 3°)  $y_S(t) = 4 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t)$  ;  
 $y_A(t) = 4 \cdot 10^{-3} \sin(200\pi t)$   
 4°) c- 3 points situés à  $x = 5\lambda/12 + k\lambda$   
 ( $k = 0, 1$ , ou  $2$ ).  
 II-1°)  $y_M(t) = 10^{-3} \sin(628t - 2\pi \cdot x/\lambda)$ ,  
 2°)  $v = 0,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .  
 4°) immobilité :  $N_e = N/k$ , pour  $k=1$ :  
 $N_e = N = 100 \text{ Hz}$ .
10. 1°) a-  $N = 50 \text{ Hz}$  ;  $\lambda = 0,2\text{m}$ .  
 b-  $v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .  
 c-  $x_1 = 0,55 \text{ m}$  ;  $t_0 = 0,055 \text{ s}$ .  
 2°) S et  $M_1$  en quadrature de phase.  
 3°)  $t = (6,75 \cdot 10^{-2} + 0,02k) \text{ s}$  ;  $t_1 = 6,75 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ .  
 4°) 3 points situés à  $x = \lambda/8 + k\lambda$ ,  
 avec  $k = 0, 1$ , ou  $2$ .
11. 1°) a-  $10^{-4} \text{ s/div}$ , b) dilution de l'énergie.  
 2°) b-  $d = 34 \text{ cm}$  ;  
 base temps :  $2 \cdot 10^{-4} \text{ s / div}$ .

# Sites Web intéressants

## Pour l'ensemble du programme

<http://www.web-sciences.com>  
<http://www.phys.free.fr/sommaire.htm>  
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Portail:Physique>  
<http://www.ac-orleans-tours.fr/physique/default.htm>  
<http://www.perso-orange.fr/physique.chimie/>  
<http://perso.orange.fr/jf.noblet/index.htm>  
<http://www.futura-sciences.com>  
<http://formation.etud.u-psud.fr>  
<http://freephysique.free.fr>  
<http://www.walter-fendt.de/ph14f/>  
<http://www.ac-versailles.fr/etabliss/lyt/soutien/DPhysChimieT.htm>  
<http://www.discip.ac-caen.fr/physapp/lycee/1ie.htm>  
<http://www.ac-creteil.fr/mathsciences-lp/VECTEURS/InventCrocodileClips>  
<http://www.chimix.com>

## Evolution de systèmes

<http://www.physique-appliquee.net/>  
<http://www.lectronique.com>  
<http://www.discip.ac-caen.fr/physapp/lycee>  
<http://www.ac-grenoble.fr/phychim/term/tp/dipolerl.htm>  
[http://www.maxicours.com/soutien-scolaire/electricite/bac-pro/index\\_1.html](http://www.maxicours.com/soutien-scolaire/electricite/bac-pro/index_1.html)  
[http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/phch/lycee/terminale/COURS/4DIPOLE\\_RL/](http://www.discip.crdp.ac-caen.fr/phch/lycee/terminale/COURS/4DIPOLE_RL/)  
[http://www.ac-poitiers.fr/sc\\_phys/formatio/staglabo/elect1\\_2/inductif/inductif.htm](http://www.ac-poitiers.fr/sc_phys/formatio/staglabo/elect1_2/inductif/inductif.htm)  
<http://www4.ac-lille.fr/~physiquechimie/lycee/terms/proaca/schauing/circuir.xls>  
<http://www.physique.edunet.tn/gabes.html>  
<http://wwwphysique.edunet.tn/nabeul.html>  
<http://wwwphysique.edunet.tn/kébili.html>

## Filtres électriques

[www.transistek.com](http://www.transistek.com)  
[www.epsic.ch/cours/elctrotechnique.com](http://www.epsic.ch/cours/elctrotechnique.com)  
[www.toutlehautparleur.com](http://www.toutlehautparleur.com)  
[www.physique-appliquee.net](http://www.physique-appliquee.net)  
[www.stielec.ac-aix-marseille.fr](http://www.stielec.ac-aix-marseille.fr)

## Ondes

<http://www.chimix.com/ifrance/pages/diffraction.htm>  
<http://www.sciences.univ-ntes.fr/physique/perso/blanquet/synophys/36opfer/36opfe>  
[http://www.cnrs.fr/cw/dossiers/doschim/decouv/couleurs/loupe\\_spect\\_lum.html](http://www.cnrs.fr/cw/dossiers/doschim/decouv/couleurs/loupe_spect_lum.html)  
<http://www.md.ucl.ac.be/didac/physique/didacphys/animations/animations.html>  
<http://www.montblancsciences.free.fr/terms/physique/cours/p3.htm>  
<http://www.chimix.com/T-fiches/ondes2.htm>  
<http://www.cours.cegep-st-jerome.qc.ca/203-301-r.f/partie1/chap2/section5.htm>  
[http://www.perso.orange.fr/physique.chimie/TS\\_Physique/Physique-ondes progressives.htm](http://www.perso.orange.fr/physique.chimie/TS_Physique/Physique-ondes progressives.htm)  
<http://www.ncf.ca/ch865/frenchdescr/movingwaves.html>  
<http://www.edunet.tn/ressources/sitetabl/sites/siliana/boarada/cours/Physique.html>