REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

MATHÉMATIQUES

3ème Année Secondaire Sciences Techniques

Auteurs

Ammar Ardhaoui
Inspecteur Principal

Abdellatif Gallali
Inspecteur Principal

Hammadi Dhiaf
Professeur Principal

Salem Marzougui
Professeur

Responsable

Hikma Smida
Professeur Universitaire

Evaluateurs

Lezhari Nejib
Professeur Universitaire

Jaâfar Beni Yazid
Inspecteur Général

Sliman Hassayoun
Inspecteur Principal

Centre National Pédagogique

PREFACE

• Le présent ouvrage est conforme au programme officiel de mathématiques de la 3ème année secondaire section Sciences Techniques (version août 2005)

• Conformément à l'esprit des nouveaux programmes, nous n'avons pas voulu faire de cet ouvrage un exposé magistral destiné à être abordé passivement. Au contraire nous avons adopté une méthodologie basée essentiellement sur les activités, ce qui devrait permettre à l'élève d'investir ses acquis antérieurs et de participer à la construction des nouveaux savoirs.

• Nous nous sommes efforcés à ce que le livre réponde à la spécificité de la section : Sciences Techniques.

- Ainsi le cours est succint et pratique.
- Dans la mesure du possible les exemples sont puisés dans le domaine technique et dans la vie courante.
- Quelques activités faisant appel à l'utilisation des outils informatiques, calculatrice ou logiciels ont été introduites pour permettre à l'élève d'expérimenter, de réfléchir et de conjecturer.

• Nous tenons à remercier tous ceux qui ont aidé à la réalisation de cet ouvrage : la Direction des Programmes et des Manuels Scolaires, les Techniciens du CNP et notamment les évaluateurs pour leurs conseils et remarques utiles et efficaces.

Les auteurs

MODE D'EMPLOI DU MANUEL

Pour faciliter l'utilisation du manuel par l'élève et par le professeur, nous proposons un aperçu sur l'organisation des chapitres. La plupart des chapitres sont composés des rubriques suivantes :

Introduction

Cette rubrique est composée de quelques activités qui permettent à l'élève :

- d'investir ses acquis antérieurs.
- d'introduire les nouvelles notions.

Cours

Le cours propose :

- Une approche simple des notions (définitions, théorèmes, rappels…) en respectant la rigueur indispensable.
- Des activités qui permettent aux élèves de s'assurer de leur bonne compréhension des notions développées dans le cours.
- Des activités permettant l'utilisation de l'outil informatique ou la calculatrice

Résumé

C'est une récapitulation des acquis fondamentaux du cours.

Exercices et problèmes

Les exercices sont de deux types :

- Des exercices d'application directe, ordonnés par thème et suivant la progression du cours.
- Des exercices et des problèmes d'intégration dont les solutions nécessitent des savoir-faire et l'investissement de plusieurs acquis antérieurs. Ces problèmes touchent des domaines variés : mathématiques, vie quotidienne, électricité, mécanique,…

Math et Culture

C'est une rubrique à caractère culturel ou historique destinée à motiver les élèves en leur donnant une idée sur l'évaluation des mathématiques à travers l'histoire ou en proposant un bref aperçu sur la vie et les œuvres de mathématiciens réputés.

PREMIERE PARTIE

Généralités sur les fonctions

Notion de limite

Continuité

Dérivabilité

Etude de fonctions

Fonctions circulaires

Suites réelles

Dénombrement

Probabilités

Statistiques

SOMMAIRE (1ère PARTIE)

Chapitre 1
Généralités sur les fonctions

INTRODUCTION

La notion de fonction numérique d'une variable réelle a été étudiée en classe de 2ième année sciences.

Les différentes activités qui suivent ont pour objectifs de rappeler, de consolider et de compléter les acquis des élèves dans ce domaine.

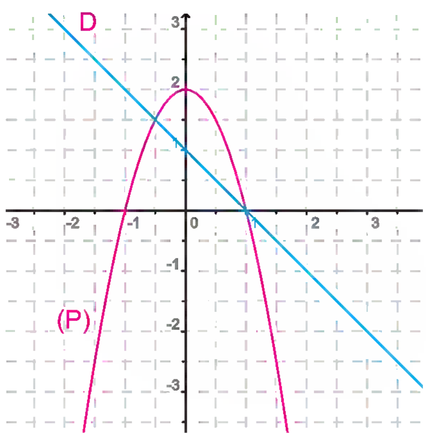
Activité 1

Dans le graphique ci-contre la parabole (P) est la courbe représentative d'une fonction, $f : x \mapsto ax^2 + b$, la droite D est celle d'une fonction affine $g : x \mapsto cx + d$

1°) Déterminer les réels a, b, c et d.

2°) Déterminer, graphiquement puis par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de (P) et D.

3°) Utiliser le graphique pour résoudre l'inéquation $-2x^2 + x + 1 \geq 0$



Activité 2

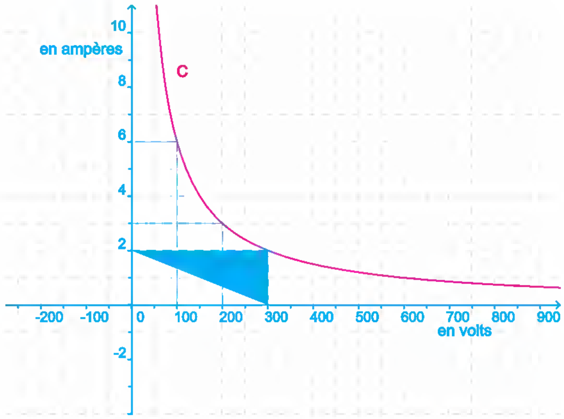
Un appareil électrique consomme une puissance P = 600 watts. Il est alimenté sous une tension variable v (en volts) et est parcouru par un courant i (en ampères). On rappelle la formule $i = \frac{P}{v}$ ou $P = v.i$

Les différentes mesures de i en fonction de v ont donné la courbe (C) ci-contre.

Dans l'axe des abscisses on lit les valeurs de v et dans l'axe des ordonnées on lit les valeurs de i.

1) a- Compléter l'écriture: (C) est la courbe représentative de la fonction f : $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ...$



b- Répondre par vrai ou faux :

- (C) est une branche d'une parabole.
- (C) est une branche d'une hyperbole
- f est croissante sur]0 , 100] et décroissante sur [100 , $+\infty$[
- f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

2) a- Calculer l'intensité du courant si la tension est de 220 volts

b- L'appareil ne peut supporter une intensité supérieure à 6 ampères. Quelle est la tension minimale permise?

GÉNÉRALITÉS

Activité 3

Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f, à variable réelle, dans chacun des cas suivants : $f(x) = x^2 + x - 4$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$, $f(x) = \frac{x}{|x| - 2}$, $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+1} - 1}$

Définition

Soit f une fonction numérique à variable réelle. L'ensemble des réels x tels que f(x) existe s'appelle **ensemble de définition** de f ou **domaine de définition** de f, noté D_f.

Exemple :

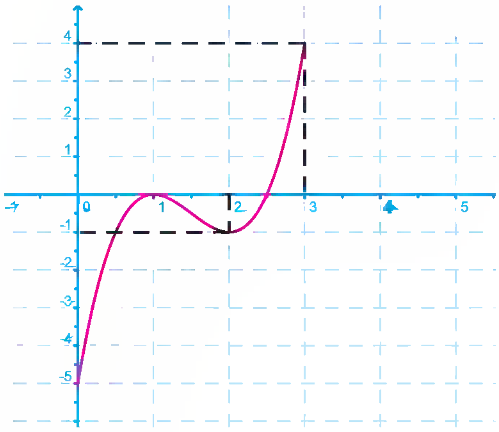
Soit $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$. Montrer que $D_f = [-1\ ,\ 1]$

Activité 4

Soit f la fonction définie sur [0 , 3] par :

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$.

La figure ci-contre est la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



1°) Répondre par vrai ou faux.

a. f est croissante dans l'intervalle [0 , 2]

b. f est croissante dans l'intervalle [2 , 3]

c. f est décroissante dans l'intervalle [1 , 2]

d. f est monotone dans l'intervalle [1 , 3]

e. f admet un maximum égal à 0 au point 1

f. f admet un maximum en x = 3.

g. Dans l'intervalle $[1\ ,\ \frac{5}{2}]$, f admet un minimum en 2 égal à – 1.

2°) Résumer dans un tableau les variations de f.

Activité 5

Soit f la fonction à variable réelle, définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - |x|$

1) a- Déterminer le domaine de définition de f.

b- Montrer que f est paire.

c- Soient a et b deux réels positifs tels que a < b.

Vérifier que $f(b) - f(a) = \frac{1}{2}(b - a)(b + a - 2)$

d- Déduire que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $[0, 1]$.

2) a- Tracer la partie de la courbe représentative de f correspondante à $[0, +\infty[$.

b- En utilisant la parité de f, compléter la courbe représentative de f sur son domaine de définition.

3) f admet-elle des minimums, des maximums ? Pour quelles valeurs de x, sont-ils atteints?

4) f admet-elle un maximum pour $x = 0$? Donner un intervalle ouvert contenant 0 dans lequel $f(0) = 0$ est un maximum pour f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR.

On dit que :

- f est croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$
- f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$

Activité 6

Montrer que :

a) f est croissante sur I signifie que $b - a$ et $f(b) - f(a)$ ont le même signe pour tous réels a et b distincts de I .

b) f est décroissante sur I signifie que : $b - a$ et $f(b)-f(a)$ ont des signes contraires .

Définition

Soit a et b deux réels distincts de I .

Le réel $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ s'appelle le taux d'accroissement de f entre a et b.

Activité 7

Montrer que

- f est croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b distincts de I , $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$.
- f est décroissante sur I si est seulement si pour tous réels a et b distincts de I , $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$
- f est constante sur I si est seulement si pour tous réels a et b distincts de I , $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

Activité 8

Soit f la fonction à variable réelle définie par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$

a- Soit a et b deux réels distincts. Vérifier que $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 - 2(b - a)$.

b- Montrer que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = b + a - 2$

c- En déduire que f est croissantes sur $\left[1,+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty,1\right]$

Définition

Une fonction f est dite paire si : Pour tout réel x de D_f , ona : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Conséquences

Soit f une fonction paire de courbe représentative ζ dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

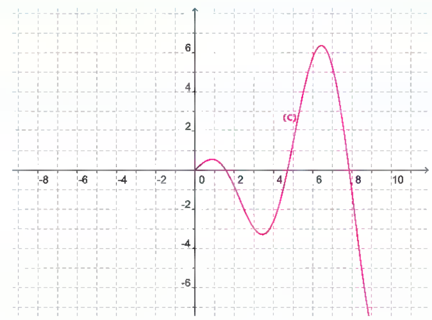
- Pour tout réel x de D_f , les points $M(x,f(x))$ et $M'(-x,f(-x))$ appartiennent à ζ
- Si le repère est orthogonal alors les points M et M' sont symétriques par rapport à $(O, \vec{j})$.

Point méthode

Pour tracer la courbe représentative ζ d'une fonction paire, dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ on trace la partie correspondante à $x \geq 0$ ou à $x \leq 0$ puis on termine par symétrie par rapport à (OJ).

Activité 9

Le graphique ci- contre représente une partie de la courbe représentative (ζ) d 'une fonction f paire dans le repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$
Terminer la courbe de f.



Définition

Une fonction f est dite impaire si :
Pour tout réel x de D_f , ona : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Activité 10

Soit f une fonction impaire de courbe représentative ζ dans un repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$
Montrer que : Pour tout réel x de D_f ,

a) les points $M(x , f(x))$ et $M'(-x , -f(x))$ appartiennent à ζ

b) les points $M(x , f(x))$ et $M'(-x , -f(x))$ sont symétriques par rapport à O.

Point méthode

Pour tracer la courbe représentative ζ d'une fonction impaire, dans un repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ on trace la partie correspondante à $x \geq 0$ ou à $x \leq 0$ puis on termine par symétrie par rapport à O.

Activité 11

Soit f la fonction définie sur [-2 , 2] par : $f(x) = x\,|x|$

a- Montrer que f est impaire

b- Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie D de IR et x_0 un réel de D.

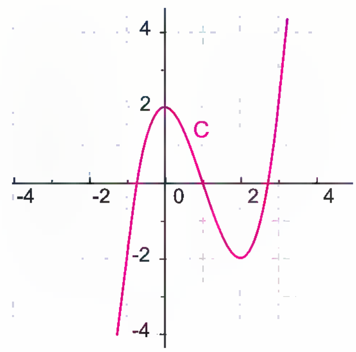
- Lorsque $f(x_0)$ est la plus grande valeur de f sur D , on dit que f admet un maximum absolu en x_0 . c'est-à-dire pour tout réel x de D , $f(x) \le f(x_0)$.
- Lorsque $f(x_0)$ est la plus petite valeur de f sur D , on dit que f admet un minimum absolu en x_0 . c'est-à-dire pour tout réel x de D , $f(x) \ge f(x_0)$.
- on dit que f admet un maximum local (ou relatif) en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D où $f(x_0)$ est la plus grande valeur de f sur I.
- on dit que f admet un minimum local (ou relatif) en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D où $f(x_0)$ est la plus petite valeur de f sur I.

Activité 12

Le graphique ci- contre représente la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Répondre par vrai ou faux

- f admet un maximum en 0 égal à 2
- f admet un minimum local en 2 égal -2
- f admet un maximum local en -1 égal à -2
- f admet un minimum local en 1 égal à 0



Activité 13

La figure (C) ci-contre est la représentation graphique, dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) a) Comparer : $f(x + 2)$ et $f(x)$

   b) Compléter, $k \in \mathbb{Z}$, $f(x + 2k) = \dots$

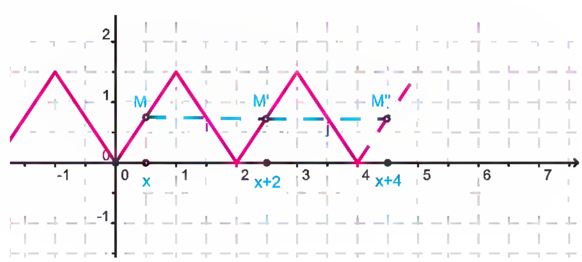
2) a) Pour tout réel x, le point $M(x , f(x))$ est un point de (C).

Montrer que le point $M'(x + 2 , f(x))$ est aussi un point de (C).

b- Montrer que $\overrightarrow{MM'} = 2\vec{i}$

c- En déduire que M' est l'image de M par une transformation que l'on caractérisera.

d- Expliquer comment la connaissance de la partie de (C) correspondante à l'intervalle [0 , 2] permet d'obtenir toute la courbe (C)



On a : Pour tout réel x, $f(x + 2) = f(x)$.

On dit que f est périodique de période 2.

On a aussi : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, 2k est une période de f.

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T un réel non nul. f est périodique de période T si pour tout réel x , $f(x + T) = f(x)$.

Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont périodiques de période 2π

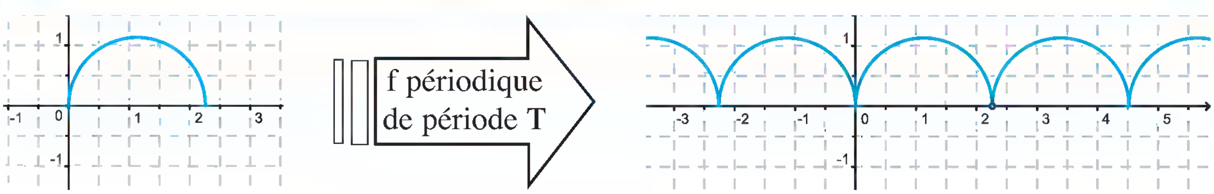
Conséquences :

Soit f une fonction périodique de période T et de courbe représentative (C).

- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, kT est une période de f.
- Pour tout réel x et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les points $M(x, f(x))$ et $M'(x + kT, f(x))$ appartiennent à (C) et on a: $M' = t_{kT\vec{i}}(M)$

Point méthode

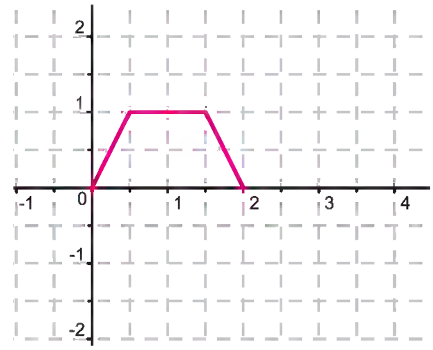
Pour tracer la courbe représentative (C) d'une fonction périodique f de période T, On commence par tracer la partie C_1 correspondante à un intervalle de longueur T (généralement $[0 , T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$)
puis on complète la courbe à l'aide de translations successives de vecteurs $T.\vec{i}$ et $-T.\vec{i}$



Remarque

- Chacun des intervalles $[0 , T]$, $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ s'appelle intervalle d'étude de f.
- Si de plus f est paire ou impaire l'intervalle d'étude de f sera $\left[0, \frac{T}{2}\right]$

Activité 14



Soit f une fonction définie sur IR, périodique de période 4 et impaire.

On donne dans la figure ci-contre la partie de la courbe représentative (C_f) de f relative à l'intervalle [0 , 2]

1) Reproduire la figure sur le cahier d'exercices.

2) a- En utilisant la parité de f, construire la partie de (C_f) relative à l'intervalle [-2 , 0]

b- Terminer la construction de la partie de (C_f) relative à l'intervalle [-4 , 5].

3) Déterminer f(2005) et f(2006).

Activité 15

a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin(2x - 1)$ est périodique de période π.

b) Montrer que les fonctions : $x \mapsto \sin(ax + b)$ et $x \mapsto \cos(ax + b)$ $a \neq 0$ sont périodiques de période $\dfrac{2\pi}{|a|}$

FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES

Activité 16

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x + 3 - |2x - 2|$

1) a- Montrer que $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 3x + 1 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \end{cases}$

b- Montrer que f est strictement décroissante sur [1 , +∞[et strictement croissante sur]-∞ , 1]. Résumer les variations de f dans un tableau.

d- Que représente 4 pour f ?

2) a- Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b- Soit m un réel donné. Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation f(x) = m.

Commentaire : La fonction f est une **fonction affine par intervalles.**

Définition

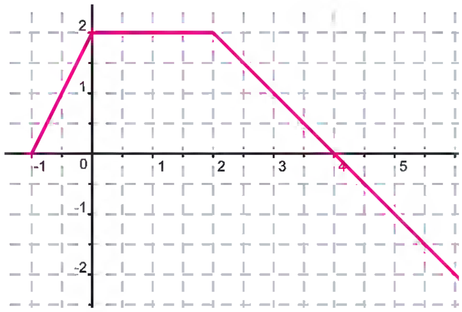
La fonction f est dite **<u>fonction affine par intervalles</u>** si son domaine de définition est une réunion d'intervalles sur chacun des quels f(x) est de la forme ax + b

Conséquence

f est une fonction affine par intervalles signifie la courbe représentative de f est une réunion de demi-droites ou de segments de droite.

Activité 17

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction définie sur [-1 , +∞[.



1) Peut-on déterminer f(π)

2) a) Montrer que $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{pour } x \in [-1, 0] \\ 2 & \text{pour } x \in [0, 2] \\ -x+4 & \text{pour } x \in [2, +\infty[\end{cases}$

b) Déterminer $f(\pi)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\sqrt{2}\right)$

Résumé

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle. Le domaine de définition de f est l'ensemble des réels x tels que f(x) existe.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b distincts de I

Si $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$ alors f est croissante sur I

Si $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$ alors f est décroissante sur I

Soit f une fonction définie sur une partie D de IR.

f est **paire** si : pour tout réel x de D on a : $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.

Dans ce cas la courbe représentative de f dans un repère **orthogonal** $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ admet l'axe $\left(O, \vec{j}\right)$ comme axe de symétrie.

f est impaire si pour tout réel x de D on a : $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.

Dans ce cas la courbe représentative de f dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ admet l'origine O comme centre de symétrie.

Soit f une fonction définie sur IR et T un réel **strictement positif**

f est périodique de période T si pour tout réel x , $f(x+T) = f(x)$.

Les fonctions : $x \mapsto \sin(ax + b)$ et $x \mapsto \cos(ax + b)$, $(a \neq 0)$ sont périodiques de période $\dfrac{2\pi}{|a|}$

Résumé

Soit f une fonction définie sur une partie D de IR et $x_0 \in D$.

- Si pour tout x de D, $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que f admet un maximum absolu en x_0
- Si pour tout x de D, $f(x) \geq f(x_0)$, on dit que f admet un minimum absolu en x_0
- S'il existe un intervalle ouvert I de D contenant x_0 tel que pour tout x de I, $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que f admet un maximum local en x_0.
- S'il existe un intervalle ouvert I de D contenant x_0 tel que pour tout x de I, $f(x) \geq f(x_0)$, on dit que f admet un minimum local en x_0.
- f est une fonction affine par intervalles si son domaine de définition est réunion d'intervalles sur chacun desquels f(x) est de la forme ax + b.
- La représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est une réunion de demi-droites ou de segments de droites.

Exercices et Problèmes

01 Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes (on donnera le résultat sous la forme d'une réunion d'intervalles)

$f_1 : x \mapsto -x^2 + 3x + 4$, $f_2 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-3x+2}$,

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$, $f_4 : x \mapsto \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

02 Préciser le sens de variation de la fonction f et construire sa courbe représentative dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = |x+1| + |x-1|$
- $f(x) = |2x-4| + x$
- $f(x) = |x-1| + |x| + |x+1|$

03 La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur IR.

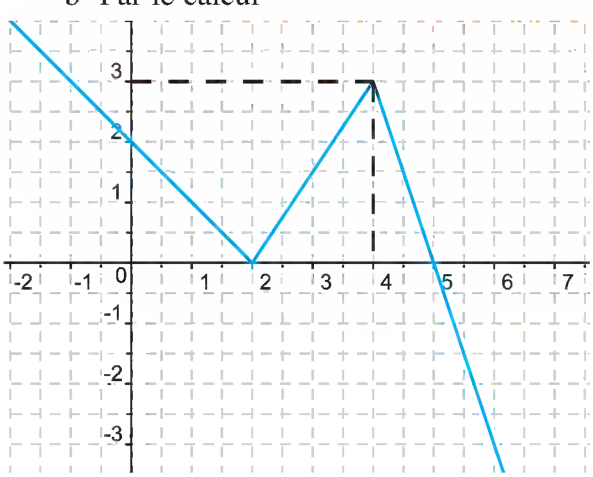
1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Exprimer f(x) dans chacun des intervalles: $]-\infty\,;2]$, $[2\,;5]$ et $[5\,;+\infty[$.

2) Résoudre l'équation f(x) = 1.

a- Graphiquement

b- Par le calcul



04 Dans un magasin de matériaux de construction on vend en promotion un produit de la manière suivante :

- Si le poids du produit acheté est inférieur ou égal à 20 Kg le prix du Kilogramme est 15 dinars.
- Si le poids dépasse 20Kg le prix du Kilo est 12 dinars.

On désigne par x le poids en Kg de la quantité du produit acheté par un client et par f(x) le prix.

1) Exprimer f(x) en fonction de x dans chacun des cas suivants : $0 \leq x \leq 20$ et $x > 20$.

2) a- Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(Choisir convenablement les unités et utiliser une feuille entière pour le graphique).

b- Déterminer le prix de 50 Kg de ce produit, graphiquement puis en utilisant l'expression de f(x).

05 De la fonction f, on ne connaît que son tableau de variation

x	$-\infty$		-1		$1/2$		2		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	0	↘	$-21/4$	↗	0	↗	$+\infty$

1) a- Donner, pour chaque intervalle où elle est monotone, le sens de variation de f.

b- Comparer f(-1) et f(-2) puis f(3) et f(5)

2) a- Résoudre l'équation $f(x) = 0$

b- Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout x de IR (Résumer les résultats dans un tableau).

3) Tracer une courbe qui pourrait être celle de f.

06 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-dessous.

1) f est-elle une fonction affine par intervalles ?

2) Dresser le tableau de variation de f.

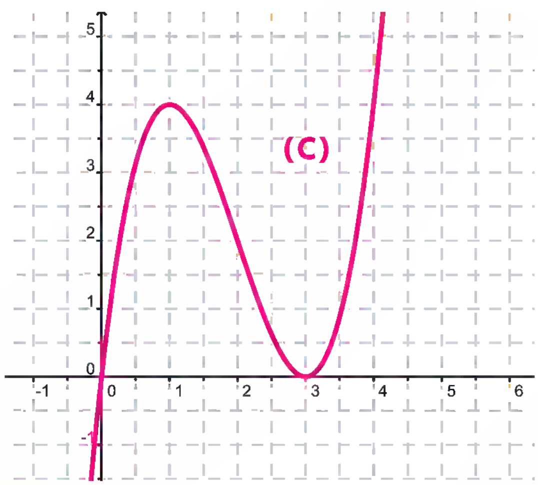
3) f admet-elle un minimum local ? Un maximum local ? En quels point ?

4) a- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.

b- Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

5) Construire sur le même graphique la courbe représentative de la fonction:

$x \mapsto -f(x)$



07 Etudier la parité de f dans chacun des cas suivants :

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1} ,$$

$$f : x \mapsto \frac{2x}{x^2+1} ,$$

$$f : x \mapsto \frac{x}{|x|+1} ,$$

$$f : x \mapsto \frac{x-2}{x+3}$$

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{x-1} ,$$

$$f : x \mapsto |x-1| - |x+1|$$

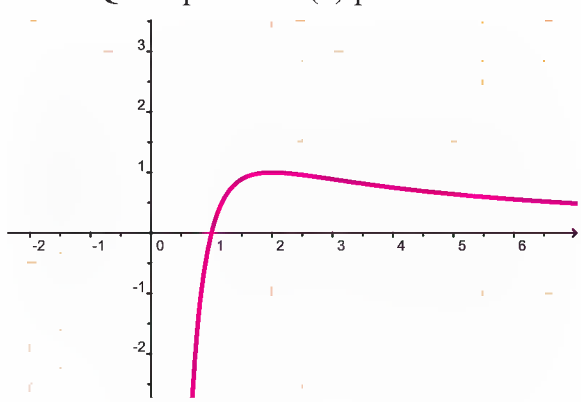
08 Le graphique ci-dessous représente une partie de la représentation graphique d'une fonction f paire .

1) a- Déterminer le domaine de définition D de f.

b- Compléter la courbe de f.

2) a- Résumer le sens de variation de f dans un tableau.

b- Que représente f(2) pour f



3) Résumer dans un tableau les sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et préciser ses extremums

09 Même exercice que le précédent avec f impaire.

10 Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = x^3 - 3x$.

1) Montrer que f est impaire.

2) a- Soient a et b deux réels distincts.

Montrer que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = b^2 + ab + a^2 - 3$.

b- En déduire que f est croissante sur l'intervalle $[1 ,+\infty[$ et décroissante sur $[-1 , 1]$.

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par les trois conditions :

- $f(x) = 2x$ pour $x \in [0,1]$.
- f est paire.
- f est périodique de période 2.

1) Construire la partie de la courbe représentative de f relative à $x \in [0,1]$ dans un repère orthonormé.

2) Compléter la courbe pour $x \in [-1 , 1]$ en utilisant la parité de f.

3) Compléter C_f pour $x \in [-4 , 4]$.

12 Le même exercice que le précédent avec f impaire.

13 Déterminer la plus petite période strictement positive des fonctions suivantes : $x \mapsto \sin(2x+1)$

$x \mapsto \cos(-2x+3)$

$x \mapsto |\sin x|$

$x \mapsto -\sin^2 x + 2$

$x \mapsto |\cos(2x+3)|$

Préciser le domaine d'étude le plus réduit pour chaque fonction.

Problème 1 :

On permet à un agriculteur de choisir comme il veut, les dimensions d'une parcelle de terre à condition que sa forme soit rectangulaire (ou carrée) et que sa surface soit constante et mesure S, ($S \in \mathbb{R}_+^*$).

L'agriculteur a intérêt à ce que le périmètre P soit le plus petit possible.

1) On désigne par x l'un des cotés du rectangle.

Montrer que $P = 2\left(x + \dfrac{S}{x}\right)$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2) On se propose de déterminer le sens de variation de la fonction: $P : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$$

a- a et b étant deux réels strictement positifs distincts. Montrer que le taux d'accroissement

$$T = \frac{P(b) - P(a)}{b - a} = 2\left(1 - \frac{S}{ab}\right)$$

b- Montrer que pour tous a et b de $]0, \sqrt{S}]$,

$T \leq 0$ et pour tous a et b de $[\sqrt{S}, +\infty[$,

$T \geq 0$.

c- Résumer dans un tableau les variations de P.

3) En déduire que P est minimum pour $x = \sqrt{S}$ et que dans ce cas le terrain est carré.

Problème 2 :

Fonction partie entière

On sait que tout nombre rationnel x possède une partie entière qui est un entier relatif noté E(x) et une partie décimale, qu'on notera d(x) et qui appartient à [0 , 1[

Exemple : si x = 2,37 ,alors E(x) = 2
et d(x) = 0.37

si x = - 3,4 = -4 + 0,6 alors E(x) = -4
et d(x) = 0.6

si x = 2 alors E(x) = 2 et d(x) = 0

si $x = \frac{31}{8} = 3.875$ alors E(x) = 3
et d(x) = 0,875

On admet que pour tout réel x il existe un entier relatif n unique tel que $n \leq x < n + 1$.

Cet entier n s'appelle la partie entière de x et noté E(x).

A)1) Remplir le tableau suivant :

x	-2,5	-2	-1,5	-1	$-\frac{1}{10^5}$
E(x)					

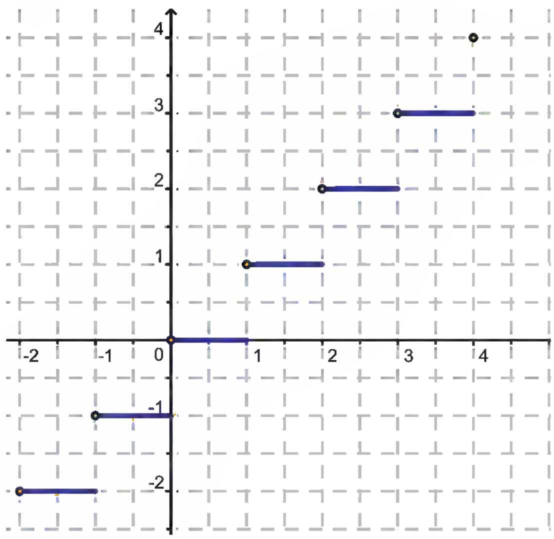
0	0,7	π	$\frac{11}{3}$	$\sqrt{35}$

2) Déterminer E(x) pour chacun des cas suivants :

$x \in [-1 , 0[$; $x \in [0 , 1[$; $x \in [1 , 2[$; $x \in [n , n + 1[, n \in \mathbb{Z}$

Commentaire :

La fonction : $x \rightarrow E(x)$ est appelée partie entière. Le graphique suivant donne sa représentation graphique



B)1) Soit n un entier relatif et x un réel tel que $n \leq x < n + 1$.

a- Donner un encadrement de x + 1

b- En déduire que pour tout réel x ,
E(x + 1) = E(x) + 1

2) Soit $f : IR \rightarrow IR$
$x \mapsto - E(x)$

a- Montrer que f est périodique de période 1

b- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0 , 1[, f(x) = 0

c- En utilisant la question précédente et la périodicité de f, tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i} ,\vec{j})$

Chapitre 2

Notion de limite

« Le fini ne se distingue de l'infini que par l'imperfection » PIERE REVELDY

INTRODUCTION

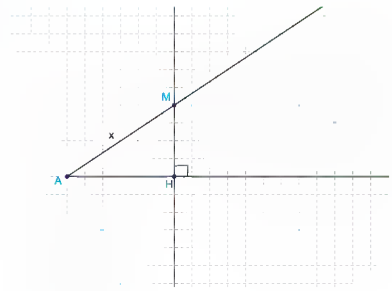
La notion de limite d'une fonction est une notion subtile. Sa définition rigoureuse présente peu d'intérêt à ce niveau d'étude. Par contre le calcul des limites ne présente pas trop de difficultés et est facilité par l'utilisation des règles pratiques et précises.

Pour ces raisons, on se contentera sagement d'introduire cette notion intuitivement à l'aide d'expériences et de graphiques

LIMITE D'UNE FONCTION EN $+\infty$, en $-\infty$

Activité 1

Dans la figure ci-contre les points A et H sont fixes avec AH = 2. Le point M varie sur la perpendiculaire à (AH) en H. On pose AM = x avec $x \geq 2$.



1) Montrer que $MH = \sqrt{x^2 - 4}$

2) On désigne par f la fonction définie sur $[2\ ,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

On s'intéresse dans cette activité au comportement du réel positif MH = f(x) lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus grandes.

Pour ceci remplir le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice

x	10	100	1000	100000000
f(x)				

3) a- Trouver un réel positif a tel que : si $x > a$ alors $f(x) > 100$

b- Compléter : pour que f(x) soit plus grand que 1000 il suffit que x soit plus grand que……...................

On voit que f(x) dépasse n'importe quel nombre strictement positif fixé à l'avance pourvu que x devienne assez grand.

Nous traduisons ce fait en disant que :
f(x) tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

De la même manière on peut s'assurer que chacune des fonctions suivantes tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

$$x \mapsto x\ ,\ x \mapsto x^2\ ,\ x \mapsto x^n\ \ (n \in \mathbb{N}^*)\ ,\ x \mapsto \sqrt{x}$$

Activité 2

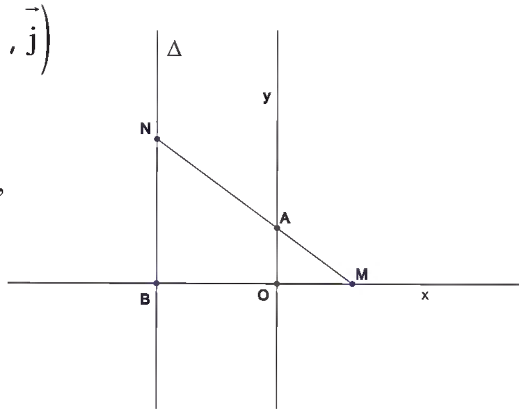
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit les points A(0 , 1) et B(-2 , 0).

Soit Δ la perpendiculaire à (ox) en B.

A tout point M de la demi-droite [ox) privée de O, on associe le point d'intersection

N des droites (AM) et Δ. On pose OM = x. .



1) Montrer que $BN = \dfrac{x+2}{x}$.

(On pourra utiliser le théorème de Thales)

2) Soit f la fonction définie sur]0 , +∞[par: $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$.

On se propose d'étudier le comportement de f(x) lorsque x tend vers +∞.

a- Montrer que $f(x) \geq 1$.

b- Remplir à l'aide d'une calculatrice le tableau suivant:

x	10	100	1000	100000000
f(x)				

c- Déterminer un réel strictement positif A tel que si x > A alors $|f(x) - 1| < 10^{-2}$

d- Compléter : pour avoir $|f(x) - 1| < 10^{-3}$ il suffit que x soit plus grand que ....

Commentaires

On voit que $|f(x) - 1|$ devient plus petit que tout nombre strictement positif fixé à l'avance pourvu que x devient assez grand.

On traduit ce fait en disant que :

f(x) tend vers 1 lorsque x tend vers + ∞ et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

On établi en suivant la même démarche que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0 \,,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x^2} = 0 \,,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x^n} = 0 \ \ (n \in \mathbb{N}^*) \,,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{\sqrt{x}} = 0 \,,(a \in \mathbb{R})$$

Autres situations

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} (-f(x)) = +\infty$
- On suppose que le domaine de définition de f contient un intervalle de type

]-∞ , a[. Lorsque f(x) dépasse tout nombre strictement positif fixé à l'avance pourvu que le réel négatif x devient assez grand en valeur absolue, on traduit cette situation en disant que:

$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ signifie que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-f(x)\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2n} = +\infty$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ (n est impair)

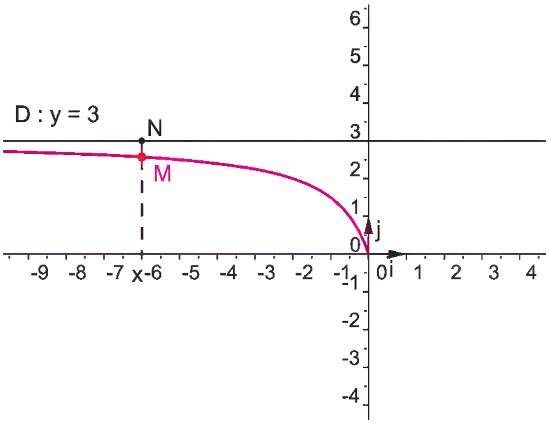
Activité 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ on donne la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $]-\infty , 0]$ (figure ci-contre).

Soit D la droite d'équation $y = 3$. A tout point M de (C) d'abscisse x on associe son projeté orthogonal N sur D.

a) Montrer que $MN = \left|f(x) - 3\right|$

b) Que devient MN quand x tend vers $-\infty$?



Commentaires

Soit a un réel. Lorsque $\left|f(x) - \ell\right|$ devient plus petit que tout réel strictement positif fixé à l'avance pourvu que le réel négatif x devient assez grand en valeur absolue, on traduit cette situation en disant que :

$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Chacune des fonctions suivantes tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$

$$x \mapsto \frac{a}{x} \text{ , } x \mapsto \frac{a}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*), a \in \mathbb{R}$$

Activité 4

Soit la fonction à variable réelle $f : x \mapsto \dfrac{x - 3}{x}$

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - 1\right) = 0$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Généralement

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ équivaut à $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \ell\right) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ équivaut à $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - \ell\right) = 0$.
- Soit f la fonction constante définie par : f(x) = k. on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$

Activité 5

Soit f la fonction à variable réelle définie par : $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x}$

1°) Quel est le domaine de définition de f ?

2°) Vérifier que pour tout $x \in IR^*$, $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

RÈGLES DE CALCULS SUR LES LIMITES

On admet les théorèmes suivants donnant la limite de

f(x) + g(x) , f(x).g(x) et $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en connaissant les limites de f(x) et de g(x)

lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Les résultats sont consignés dans un tableau où le symbole ? désigne "une forme indéterminée" c'est-à-dire un cas où la limite ne peut pas être déduite directement, dans ce cas une étude spéciale doit être faite pour lever l'indétermination.

On introduira certains de ces cas en exercices.

limf(x)	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$
limg(x)	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
lim(f(x)+g(x))	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
lim(f(x) . g(x))	$\ell . \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$ (signe de ℓ)	$\pm\infty$ (signe de ℓ)
$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$ $(\ell' \neq 0)$	?	?	?	0	0

Exercices résolus

Exercice n°: 1

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 + x + 4\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3 + x + 4\right)$

Solution :

On a: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+4) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + x + 4\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+4) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + x + 4\right) = -\infty$

Exercice n°: 2

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^3 - x + 4$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Solution :

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x+4) = -\infty$ alors on est en présence d'une forme indéterminée $+\infty - \infty$. Pour lever l'indétermination, on met x^3 en facteur dans l'expression

de f(x). On obtient $f(x) = x^3\left[1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}\right]$, on remarque que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^3} = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \to +\infty} \left[1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right] = 1$$

d'autre part on a: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On démontre de même que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Exercice n°: 3

Soit f la fonction définie sur IR par : $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{-3x^2 + x - 2}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^2 - 3x + 4\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3x^2 + x - 2\right)$

2) Déterminer la limite de f(x) en $+\infty$

Solution :

1) Le calcul direct de $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 - 3x + 4$ conduit à une forme indéterminée.

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 - 3x + 4 = x^2\left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} 2x^2 - 3x + 4 = +\infty$$

On établi de même que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3x^2 + x - 2\right) = -\infty$

2) f(x) étant le quotient de deux expressions qui tendent vers l'infini, on est alors en présence d'une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour lever l'indétermination on procède ainsi :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{-3x^2 + x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(-3 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right)}{\left(-3 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)} = -\frac{2}{3}$$

Activité 6

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ dans chacun des cas suivants:

$f(x) = -3x + 4$, $f(x) = -2x^2 + 4x - 7$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{2x+1}$,

$f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x^2+2x-3}$, $f(x) = (2x+1)\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$

LIMITE D'UNE FONCTION EN x_0 , ($x_0 \in \mathbb{R}$)

Activité 7

Soit f la fonction définie sur $]-\infty , 0[\cup]0 , +\infty[$ par : $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

On s'intéresse au comportement de f(x) lorsque le réel x, **exprimé en radian** , prend des valeurs de plus en plus proche de 0.

Compléter le tableau suivant:

x(rd)	-0,01	-0,001	-0,0001	0	0,0001	0,001	0,1
$\dfrac{\sin x}{x}$							0,998334

On constate que f(x) prend des valeurs aussi proche de 1 que l'on veut pourvu que x soit assez proche de 0.

On traduit ce fait en disant que :

f(x) tend vers 1 lorsque x tend vers 0 et on écrit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

Activité 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

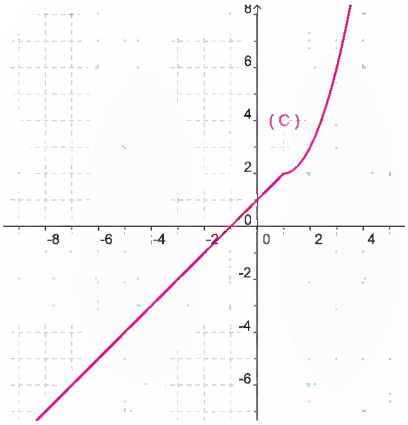
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 3 & \text{si } x > 1 \\ f(x) = x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

La figure ci-dessous représente la courbe

de la fonction de f dans un repère orthonormé $\left(O , \vec{i} , \vec{j}\right)$

Remplir le tableau suivant :

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01
f(x)				2		



On constate que f(x) prend des valeurs aussi proches que l'on veut de 2 pourvu que x s'approche suffisamment de 1. On écrit $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

On admet les résultats suivants:

$$\lim_{x \to x_0} (ax+b) = ax_0 + b,\ \lim_{x \to x_0} \sqrt{ax+b} = \sqrt{ax_0+b}\ \ (\text{pour } ax_0+b \text{ positif}) \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Activité 9

Déterminer la limite de f en x_0 dans chacun des cas suivants :

$f(x) = -2x + 4$, $x_0 = 3$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x+3}{-2x+1}$, $x_0 = 4$

$f(x) = 3x^2 + 2x + 6$, $x_0 = -2$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{x+2}\left(x - \sqrt{x+1}\right)$, $x_0 = 6$

$f(x) = \sqrt{3x-2}$, $x_0 = 1$

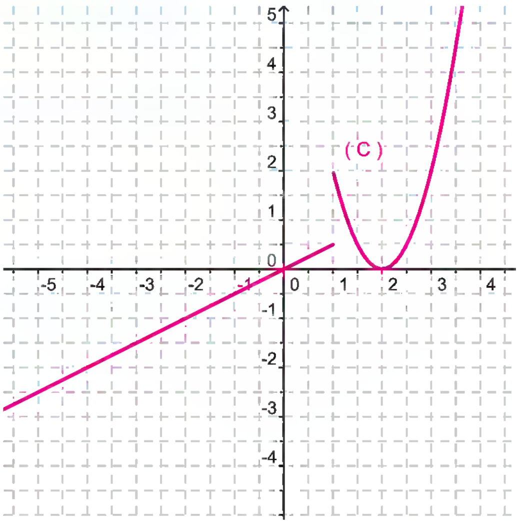
On utilise les régles suivantes :

lim f(x)	lim g(x)	lim (f(x)+g(x))	lim (f(x).g(x))	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	ℓ	$\ell + \ell'$	$\ell . \ell'$	$\frac{\ell}{\ell'} (\ell' \neq 0)$

LIMITE À DROITE, LIMITE À GAUCHE D'UNE FONCTION EN x_0 , ($x_0 \in \mathbb{R}$)

Activité 10

La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f définie sur]-∞ , 1[∪]1 , +∞[



- En utilisant le graphique, déterminer le réel ℓ vers lequel tend f(x) lorsque x tend vers 1 en étant supérieur à 1.
- Déterminer aussi le réel ℓ' vers lequel tend f(x) lorsque x tend vers 1 en étant inférieur à 1.

Commentaire :

- Pour traduire le fait que f(x) prend des valeurs aussi proches que l'on veut de 2 pourvu que x s'approche suffisamment de 1, en étant supérieur à 1 on dit que :

2 est la **limite à droite** de f en 1 et on écrit $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 2$ ou $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$

• le fait que f(x) prend des valeurs aussi proches que l'on veut de $\frac{1}{2}$ pourvu que x s'approche suffisamment de 1, en étant inférieur à 1 on dit que : 2 est la **limite à gauche** de f en 1 et on écrit $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \frac{1}{2}$ ou $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$

Exercice résolu :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2|x|}{x}$

Déterminer la limite à droite de f en 0 et sa limite à gauche en 0.

Solution :

Pour $x > 0, f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x} = x - 2$ alors $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 2) = -2$

Pour $x < 0, f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x} = x + 2$ alors $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 2) = 2$

Commentaire :

On voit dans cet exercice que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. Cette fonction admet une limite à droite en 0 et une limite à gauche en 0, **mais n'admet pas de limite en 0.**

Activité 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{x} + x & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = x + 1 & \text{si } x<2 \end{cases}$

Déterminer les limites de f à droite et à gauche en 2. Que remarquez vous ?

Commentaire :

On remarque que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$, ce qui nous conduit à dire que f admet une limite en 2 égale à 3.

On admet le théorème suivant :

Théorème

f admet une limite en x_0 égale à ℓ si et seulement si f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 égale à ℓ

Ainsi : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ équivaut à $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

Activité 12

Compléter le tableau suivant par la valeur manquante ou par "n'existe pas":

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$	1	n'éxiste pas		-1
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$	-1	3		-1
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$			-2	

Activité 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{|x-1|}+2x$

a- Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

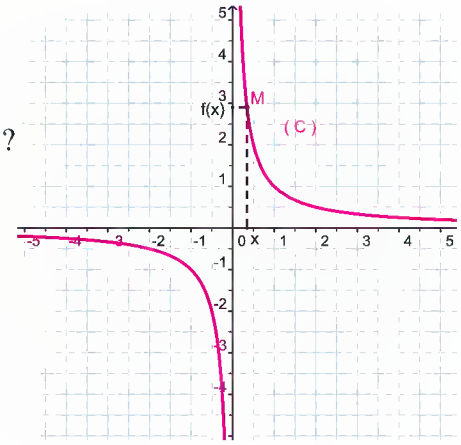
b- Que peut-on conclure ?

LIMITE INFINIE D'UNE FONCTION EN x_0 , $(x_0 \in \mathbb{R})$

Activité 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par . $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

La courbe (C) ci-contre représente f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



1) Soit M(x , f(x)) un point de (C) tel que x > 0.
Comment se comporte l'ordonnée f(x) de M lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0?
On traduit cette situation en disant :
la limite à droite de f(x) en 0 est $+\infty$
et on écrit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

2) Soit N(x , f (x)) un point de (C) tel que x < 0.
Comment se comporte l'ordonnée f(x) de N lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0 ?

On traduit cette situation en disant :

la limite à gauche de f(x) en 0 est -∞

et on écrit $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty}$

On établi de même que : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty}$

Plus généralement on admet les résultats suivants :

$\lim f(x)$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0
$\lim g(x)$	0 (g(x)>0)	0 (g(x)< o)	0 (g(x)>0)	0 (g(x)< o)	0
$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Remarques :

Dans le tableau précedent :

- $\lim f(x)$ désigne $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ avec $g(x) > 0$ peut être notée $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ avec $g(x) < 0$ peut être notée $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0^-$

Exercice résolu :

Soit la fonction à variable réelle : $f : x \mapsto \frac{2x-5}{x-2}$

1) Déterminer domaine de définition de f

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

Solution :

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} (2x-5) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0^+ \text{ pour } x > 2,\ x-2 > 0 \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (2x-5) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (x-2) = 0^- \text{ pour } x < 2,\ x-2 < 0 \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

Point méthode

Dans le cas où $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ avec $\ell \neq 0$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

pour calculer $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ il est souvent utile d'établir le tableau de signe de g(x).

Activité 15

Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de f et les limites à droite et à gauche de f en x_0

a) $f(x) = \frac{x-3}{-x+2}$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2 - x}$, $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$, $x_0 = 1$ et $x_0 = -\frac{1}{2}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{(x-3)^2}$, $x_0 = 3$

Dans les règles de calcul des limites, on a rencontré quatre formes indéterminées qu'on a notées symboliquement par : $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

Activité 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x + 1$

1) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} x^3$ et $\lim_{x \to +\infty} (-2x+1)$. On remarque que le calcul direct de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ donne une forme indéterminée $+\infty - \infty$

2) a) Vérifier que, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$

c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3) Montrer, en utilisant la même démarche, que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Point méthode

Pour déterminer la limite d'une fonction polynôme de degré n en $+\infty$ ou en $-\infty$, on met x^n en facteur

Activité 17

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

pour : $f(x) = - x^2 + 3x + 1$, $f(x) = x^5 - 2x^4 + x + 7$

Activité 18

Soit f la fonction à variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{2x + 1}$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Montrer que pour tout $x \neq -\dfrac{1}{2}$ et $x \neq 0, f(x) = x\dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)}{2 + \dfrac{1}{x}}$

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}$ en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Activité 19

Déterminer la limite de f(x) en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{2x^2 + x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 + x + 1}$

Activité 20

Soit f la fonction à variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(x + \sqrt{x}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x}\right)$. On remarque que le calcul direct de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ donne une forme indéterminée $0 \times \infty$

b) Montrer que $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Activité 21

Soit f la fonction à variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 4)$ et $\lim\limits_{x \to 2}\left(x^2 + 3x - 10\right)$

b) Peut-on déduire $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

3) a) Montrer que pour tout réel $x \neq 2$ et $x \neq 5$ on a: $f(x) = \dfrac{x+2}{x+5}$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Point méthode

Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ présente une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$,une simplification par $(x - x_0)$ permet dans certains cas de lever l'indétermination

Activité 22

Déterminer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$, $x_0 = 2$

c) $f(x) = \dfrac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9}$, $x_0 = \dfrac{3}{2}$, $x_0 = -\dfrac{3}{2}$

Activité 23

On sait déjà que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ c'est-à-dire que pour des petites valeurs de x en radian, sinx est très voisin de x. (Vous pouvez le vérifier à l'aide d'une calculatrice)

On se propose de déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

a) Vérifier que $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$

b) Montrer que pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{1 + \cos x}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

d) Montrer alors que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

Retenons : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

Résumé

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$,

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair non nul} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

- $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a}{\sqrt{x}} = 0$

- $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$,

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{ax+b} = \sqrt{ax_0 + b}, \quad ax_0 + b > 0$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (x exprimé en radian)

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

- On a quatre formes indéterminées :

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}$$

➢ **Dans chacun des exercices de 1 à 10 préciser le domaine de définition de f et déterminer la limite de f en +∞ et en -∞**

01 $f : x \mapsto -3x + 2$

02 $f : x \mapsto 2x^2 + x - 2$

03 $f : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$

04 $f : x \mapsto 3x^4 - 2x^3 + x + 1$

05 $f : x \mapsto -x^3 + 3x^2 - x + 2$

06 $f : x \mapsto \dfrac{4x - 5}{2x - 3}$

07 $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 + x - 3}{2x - 3}$

08 $f : x \mapsto (x - 1)\left(\dfrac{2}{x - 1} - \dfrac{1}{(x - 1)^2}\right)$

09 $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4}{-2x^2 + x - 1}$

10 $f : x \mapsto \dfrac{3x + 1}{x^2 + 1}$

11 Soit $f : x \mapsto \sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 1}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f

b) Montrer que pour $x \in D$,

$$f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)$$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

12 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 2}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

13 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x + 1}{3x^2 - 2x - 5}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f (on donnera D sous forme d'une réunion d'intervalles)

b) Montrer que pour $x \in D$, $f(x) = \dfrac{1}{3x - 5}$

c) Déterminer la limite de f en +∞, -∞, 1, $\left(\frac{5}{3}\right)^+$ et en $\left(\frac{5}{3}\right)^-$

14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$

par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Déterminer les limites de f en +∞, -∞, 2, 0^+ et en 0^-

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{|x - 3|}$

Déterminer les limites de f en +∞, -∞, 3^+ et en 3^-

16 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x^2 - 1}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f

b) Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que pour tout x de D,

$$f : x \mapsto 1 + \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$$

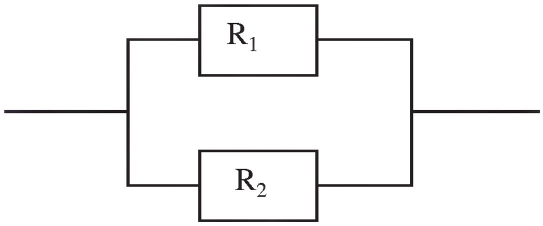
c) Déterminer les limites de f en +∞, -∞, 1^+, 1^-, -1^+ et en -1^-.

17 On rappelle que dans un circuit électrique, deux résistances R_1 et R_2 placées en parallèle sont équivalentes à une résistance R donnée par la formule : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

On suppose que R_1 est constante et R_2 variable. On pose $R_2 = x$ ($x \in \mathbb{R}_+^*$)

a). Montrer que $R = \frac{R_1 x}{R_1 + x}$

b). Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} R$; interpréter le résultat obtenu.



Au Vème siècle avant J.C., le grec Zénon d'Elée (-490 ; -425) propose les premiers **paradoxes de l'infini**. Exposons-en un :

A priori la somme d'un nombre infini de longueurs est une longueur infinie. Zénon nous exprime qu'il peut en être autrement : Achille, célèbre pour sa rapidité, court à vitesse constante sur une longueur de 1km (précisons que le km n'existait pas encore à l'époque). Achille doit d'abord parcourir la moitié de la longueur (1/2) puis la moitié de la longueur restante (1/4) et ainsi de suite en poursuivant le processus de division à l'infini.

La longueur totale sera ainsi égale à 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/128 + ... En effectuant les premiers termes de cette série de nombres, on s'aperçoit que plus on ajoute de termes, plus on se rapproche de 1. Voilà une somme infinie de longueurs dont le résultat est fini et égal à 1 !

Mais au IVème siècle avant J.C., **Aristote** (-384 ; -322) expose les problèmes de Zénon et réfute tous les paradoxes en opposant **l'infini en acte** qui peut être atteint (celui de Zénon) à **l'infini potentiel** qui n'est pas réalisable.

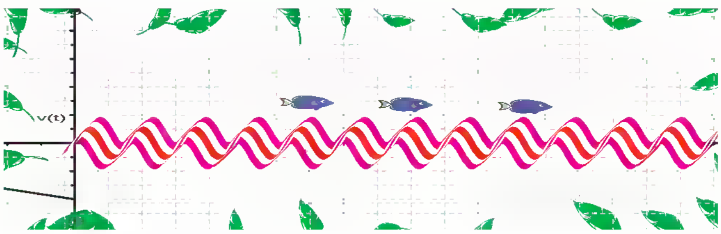
Chapitre 3

Continuité

"La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques."

Blaise PASCAL : (1623 -1662)

Le courant continu est bien sûr
''continu'' mais le courant alternatif est aussi ''continu''



- **Introduction**
- **Continuité en un point**
- **Continuité à gauche, continuité à droite**
- **Continuité sur un intervalle**

INTRODUCTION

Activité 1

Soit la fonction définie sur $\left[0,2\right[$ par : $f\left(x\right) = x - E\left[x\right]$ où E est la fonction partie entière.

a) Montrer que $\begin{cases} f\left(x\right) = x & si\ x \in \left[0,1\right[\\ f\left(x\right) = x - 1 & si\ x \in \left[1,2\right[\end{cases}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f\left(x\right)$. f admet-elle une limite en 1?

c) Tracer la courbe (C) de f dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

d) La courbe (C) présente-t-elle une "rupture" ou une discontinuité?

Activité 2

A tout réel m on associe la fonction f_m définie sur IR par :

$$\begin{cases} f_m(x) = x^2 + m \text{ pour } x \leq 1 \\ f_m(x) = 3x - m \text{ pour } x > 1 \end{cases}$$

1) a) Calculer, en fonction de m, $\lim\limits_{x \to 1^-} f_m(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1+} f_m(x)$

b) Montrer qu'il existe une valeur m_o de m pour laquelle f_{m_o} possède une limite en 1. Comparer cette limite à $f_{m_o}(1)$.

2) a) Tracer les courbes représentatives C_1 et C_2 respectivement de f_1 et de f_{-1} dans deux repères différents.

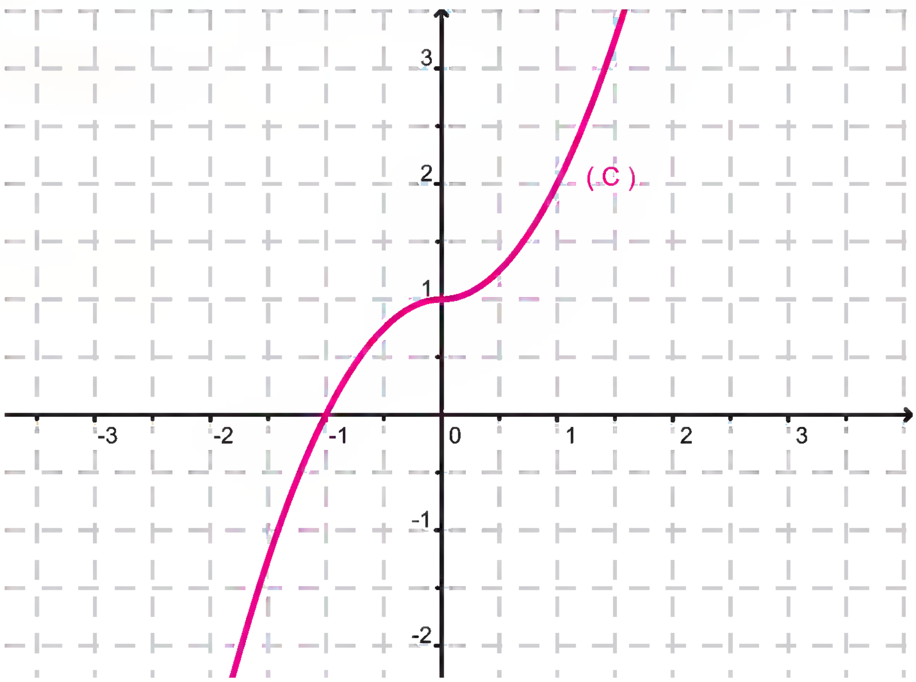
b) • La courbe C_1 présente-t-elle une "rupture" ou "discontinuité"?

• La même question pour C_2 .

CONTINUITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

Activité 3

La courbe (C) ci dessous est celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x|x| + 1$



1) a) A l'aide de la courbe (C) quelle conjecture peut-on faire concernant $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

b) Comparer cette limite à f(0).

2) Démontrer que f admet une limite en 0 et que cette limite est égale à f(0).

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est continue en x_0 si et seulement si, f admet une limite en x_0 égale à $f(x_0)$.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{pour } x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 1.

Activité 5

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.

- f admet une limite en x_0 alors f est continue en x_0
- f n'est pas continue en x_0 alors f n'admet pas une limite en x_0
- $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ alors f est continue en x_0
- f est continue en x_0 alors f admet une limite en x_0

Activité 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a,\ a \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle f est continue en 0.

CONTINUITÉ À DROITE, CONTINUITÉ À GAUCHE

Activité 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique (C) est présentée ci-contre. En utilisant la courbe (C) répondre aux questions suivantes:

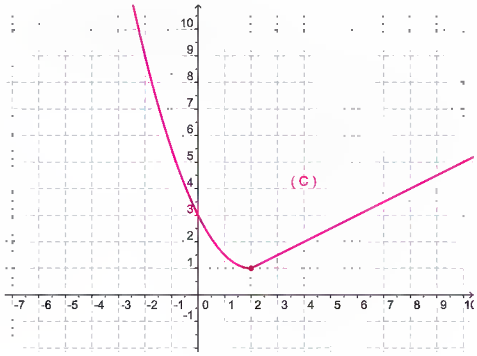
a) f est elle continue en 2?

b) Comparer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ et f (2).

c) Comparer $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ et f (2).

Activité 8

Mêmes questions que l'activité précédente pour la fonction g dont la représentation graphique est présentée ci-contre.



Activité 9

Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{2-x}$

a) Déterminer D_f .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

c) Comparer la valeur trouvée avec f (2).

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [x_0, x_0 + h[, (h > 0)$. On dit que f est continue à droite en x_0, si et seulement si, f admet une limite à droite en x_0 et cette limite est égale à $f(x_0)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0 - h, x_0], (h > 0)$ .On dit que f est continue à gauche en x_0, si et seulement si, f admet une limite à gauche en x_0 et cette limite est égale à $f(x_0)$.

Activité 10

Soit f la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-2x}{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

a) Etudier la continuité à droite de f en 0.

b) Etudier la continuité à gauche de f en 0.

c) f est elle continue en 0 ?

Activité 11

Soit f une fonction définie dans un intervalle ouvert I contenant x_0.

Démontrer la propriété suivante:

f est continue en x_0, si et seulement si, f est continue à droite en x_0 et à gauche en x_0.

Activité 12

Soit la fonction $f : x \mapsto -3x|x| + 2$

a) Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.

b) Que peut-on conclure?

CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

Activité 13

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - x + 2}}$

a) Montrer que f est définie sur l'intervalle I =]-2 , 1[.

b) Soit $x_0 \in]-2 , 1[$, calculer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

c) En déduire que f est continue en x_0.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

On dit que f est continue sur I si est seulement si, f est continue en tout point x_0 de I.

Activité 14

Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{-x^2 - x + 2}$

a) Montrer que g est définie sur l'intervalle fini [-2,1].

b) Montrer que g est continue sur]-2,1[.

c) Montrer que g est continue à droite en -2.

d) Montrer que g est continue à gauche en 1.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé $[a,b]; (a < b)$

On dit que f est continue sur $[a,b]$ si et seulement si, f est continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Activité 15

Donner la définition d'une fonction continue sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants

a) $I =]a,b]$

b) $I = [a,b[$

c) $I =]-\infty, a]$

d) $I = [a, +\infty[$

e) $I = \mathbb{R}$

Activité 16

Démontrer les propriétés suivantes:

- La fonction $x \mapsto ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{ax + b}$ est continue sur son domaine de définition

Remarque:

L'ensemble des réels en lesquels une fonction f est continue est appelé domaine de continuité de f et noté D_c .

Activité 17

Déterminer le domaine de continuité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto -2x^2 + 3x - 5$$

$$g : x \mapsto \frac{3x - 1}{x + 3}$$

$$h : x \mapsto \sqrt{x - 2}$$

Activité 18

Démontrer, en utilisant les opérations sur les limites le théorème suivant :

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et **continues** en $x_0 \in I$. alors on a :

- Les fonctions $f+g$, $f \times g$, $|f|$ sont continues en x_0.
- Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.
- Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

Activité 19

Déterminer le domaine de continuité des fonctions suivantes:

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 2x - 3} \qquad h : x \mapsto x + 3 + \frac{x - 2}{\left|x^2 - 3x - 4\right|}$$

$$g\, x \mapsto \frac{1}{x - 1} + \sqrt{x^2 - 4}$$

Activité 20

Démontrer les propriétés suivantes:

- Toute fonction polynôme : $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle : $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes,

  est continue sur son domaine de définition.

Activité 21

Soit la fonction $f : x \mapsto x - 1 + \frac{x + 3}{x^2 + x - 2}$

a) Déterminer le domaine de continuité de f.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x)$

Point méthode

Lorsqu'on sait qu'une fonction f est continue en x_0 (autrement dit: x_0 appartient au domaine de continuité de f) pour déterminer la limite de f en x_0 on remplace x par x_0 dans l'expression de f(x) .

Exercice résolu:

Soit la fonction définie sur IR :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{-2x + 1} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1} - 1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Déterminer le domaine de continuité de f.

Solution:

• Si $x \leq 0$, f est une fonction rationnelle.

Comme -2x + 1 ne s'annule pas sur $\left]-\infty, 0\right]$ alors la fonction f est continue sur l'intervalle fermé $\left]-\infty, 0\right]$

• Si $x > 0, f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$

- La fonction $x \mapsto x$ est continue sur .

- La fonction $\sqrt{x+1} - 1$ est continue et ne s'annule pas sur $\left]0, +\infty\right[$.

Donc f est le quotient de deux fonctions continues sur $\left]0, +\infty\right[$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur cet intervalle. Par suite f est continue sur $\left]0, +\infty\right[$

• Etudions la continuité à droite de f en 0.

$$* \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{x + 1 - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x+1} + 1)$$

$$= 2$$

$$* \quad 0 \in \left]-\infty, 0\right] \text{ donc } f(0) = \frac{0^2 + 0 + 2}{-2 \times 0 + 1} = 2$$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ et par suite f est continue à droite en 0.

Conclusion : le domaine de continuité de f est IR

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 1} \\ f(-1) = a \end{cases}$

Déterminer le réel a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Déterminer le domaine de continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Résumé

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f est continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Si les fonctions f et g sont continues en x_0 alors les fonctions $f+g$, $f \times g$, $|f|$ sont continues en x_0, si de plus $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

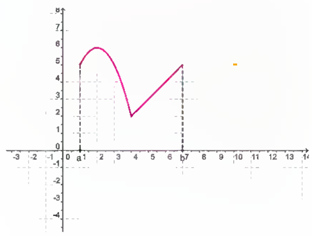
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$.
Si f est continue en x_0 et pour tout $x \in I, f(x) \geq 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition

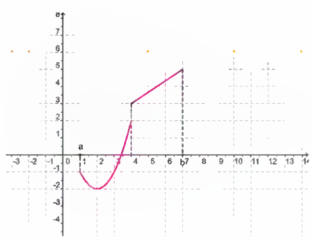
Exercices et Problèmes

01 Répondre par vrai ou faux en examinant la représentation graphique de f, dans chacun des cas suivants:

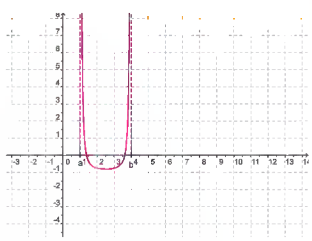
a) f est continue sur $[a, b]$



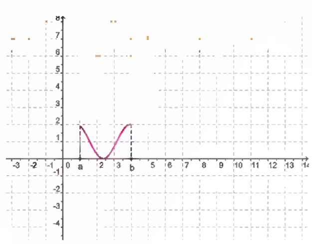
b) f est continue sur $[a, b]$



c) f est continue sur $]a, b[$



d) f est continue sur $]a, b]$



➤**Dans les exercices de 2 à 6 justifier la continuité de f en x_0.**

02 $f(x) = -3x^2 + 4x + 2$, $x_0 = -2$

03 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$

04 $f(x) = \left|-x^2 - x + 6\right|$, $x_0 = 2$

05 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $x_0 = \sqrt{5}$

06 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{-4}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

➤**Dans les exercices de 7 à 12, préciser le domaine de continuité de f .**

07 $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{2x^2 - x - 1}$

08 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

09 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

10 $f(x) = \sqrt{\left|1 - x^2\right|}$

11 $f(x) = \dfrac{x+3}{\left|x-4\right| - 3x}$

12 $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 4x - 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x+1}{x-2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

13 Soit la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto E(2x)$

Etudier la continuité de f en $\dfrac{1}{2}$.

14 Soit la fonction $f: [1,4[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^{E(x)} - xE(x)$$

a) Déterminer f(x) dans chacun des intervalles : [1,2[, [2,3[et [3,4[.

b) Déterminer le domaine de continuité de f.

15 Soit la fonction :

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{E(x)}{x}$$

a) Etudier la continuité de f en n ($n \in \mathbb{Z}^*$).

b) En déduire le domaine de continuité de f.

16 Soit f la fonction définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 2|x|}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = a \ ; (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de f en a.

b) Déterminer le domaine de continuité de f.

17 Soit f la fonction définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\} \\ f(3) = a & a \in \mathbb{R} \\ f(-3) = b \ ; & b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle f est continue en 3?

b) Existe-t-il une valeur de b pour laquelle f est continue en -3?

18 **Thème d'étude :** Equation f(x) = 0

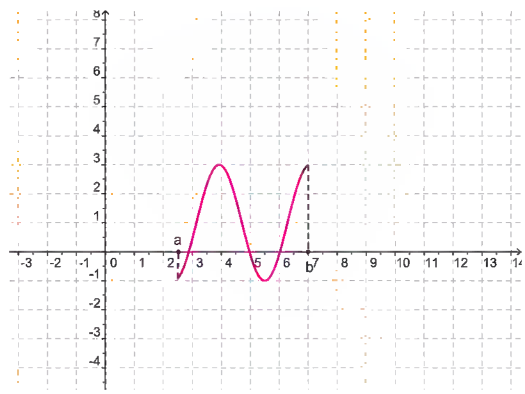
La représentation graphique ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur un intervalle fermé $[a, b]$; $(a < b)$ vérifiant:

- f est continue sur $[a, b]$.
- f(a) et f(b) sont de signes contraires.

1) Expliquer pourquoi l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans $]a, b[$.

2) En est –il ainsi si f n'est pas continue sur $[a, b]$?

Illustrer votre réponse par un graphique.



Chapitre 4

Dérivabilité d'une fonction
Fonctions dérivées

« Le fini ne se distingue de l'infini que par l'imperfection » PIERE REVELDY

INTRODUCTION

Activité 1

Un parachutiste saute d'un hélicoptère, d'une hauteur de 125 m de la surface de la mer et se laisse tomber en chute libre, retardant l'ouverture de son parachute.

La distance parcourue, en mètre au bout de t secondes est donnée par la formule $f(t) = 5.t^2$

La vitesse moyenne entre deux instants t_0 et $t_0 + h$ est le quotient $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$.

On appelle vitesse instantanée à l'instant t_0 le réel $v(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$

1) a- Montrer que $v(t_0) = 10t_0$

b- Calculer $v(2,5)$, la vitesse instantanée à l'instant $t_0 = 2,5$

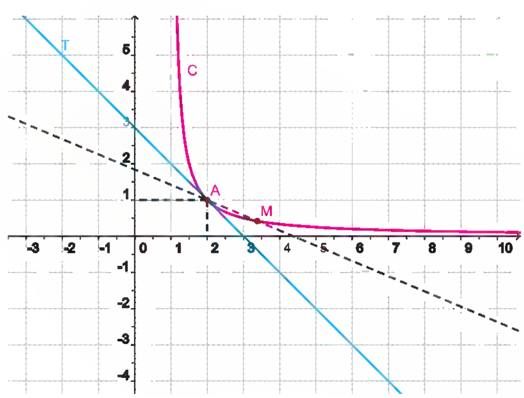
2) Malheureusement le parachute refuse de s'ouvrir, quelle est, en km/h, sa vitesse d'impact à la surface de la mer ?

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]1\ ,+\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et de courbe représentative (C)

Soit A et M les points de (C) d'abscisses respectives 2 et 2 + h où h est un réel tel que $2 + h\ \in]1\ ,+\infty[$.



Le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

a- Calculer, en fonction de h, $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

b- Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -1$

c- La droite T passant par A et de coefficient directeur – 1 s'appelle **tangente** à (C) au point A. Déterminer une équation cartésienne de T.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur [- 3 , +∞[par : $f(x) = \sqrt{x+3}$

1) a- Montrer que pour h ≠ 0 et h ≥ - 4 on a : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1}{2+\sqrt{4+h}}$

b- En déduire $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

2) On pose $\varphi(h) = \frac{1}{2+\sqrt{4+h}} - \frac{1}{4}$ pour $h \in [-4\ ,+\infty[$.

a- Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h)$

b- Vérifier que $f(1+h) = 2 + \frac{1}{4}h + h.\varphi(h)$

c- Remplir le tableau suivant à l'aide d'une calculatrice

h	- 0,1	- 0,01	0,1	0.01
h.φ(h)				

Commentaires

- On a : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1}{4}$

- Il existe une fonction φ définie sur [- 4 , +∞[telle que $f(1+h) = 2 + h + h.\varphi(h)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

- Le réel $2 + \frac{1}{4}h$ est une approximation de f(1 + h) pour h assez proche de 0.

DÉRIVABILITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT, NOMBRE DÉRIVÉ

Introduction

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel de I.

On suppose que le taux d'accroissement $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie ℓ lorsque h tend vers 0.

Dans les activités précédentes on a vu que le réel ℓ prend les significations suivantes :

- ℓ est **la vitesse instantanée** à l'instant x_0.
- ℓ est **le coefficient directeur** de la tangente à une courbe en un point de cette courbe.
- Le réel $f(x_0)+\ell.h$ est **une approximation** de $f(x_0+h)$ pour h petit.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable** en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie ℓ lorsque h tend vers 0.

Le réel ℓ s'appelle **le nombre dérivé** de f en x_0 et se note $\ell = f'(x_0)$

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x+1}$.

Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

Remarques

- Si on pose $x = x_0 + h$, on obtient $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- Pour simplifier on dit que $f'(x_0)$ est la dérivée de f en x_0

Différentes interprétations du nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On suppose que f est dérivable en x_0 .

- **Interprétation cinématique :**

Si f représente la loi horaire d'un mobile en mouvement

$f'(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ est la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

- **Interprétation graphique :**

Le nombre dérivé en x_0 représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0.

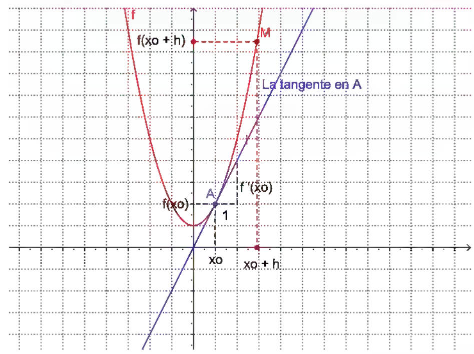
Soit (C) la courbe de f , A et M les points de (C) d'abscisses respectives x_0 et $x_0 + h, h \neq 0$

La droite (AM) a pour coefficient directeur

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Lorsque h tend vers 0, le coefficient directeur de (AM) a pour limite $f'(x_0)$ et la droite (AM) vient se confondre avec la droite T passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$.

La droite T s'appelle la tangente à (C) au point A.



- **Equation de la tangente T en A :**

Soit T la tangente à (C) au point A de (C) d'abscisse x_0.

Montrer qu'une équation cartésienne de T est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Soit f une fonction dérivable en x_0. La courbe représentative de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente (T) dont une équation cartésienne est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

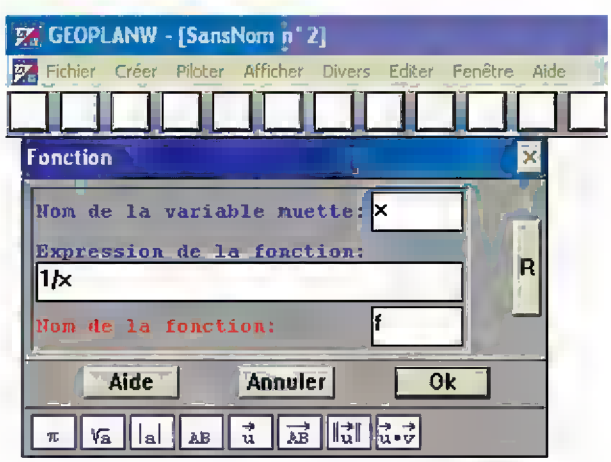
Activité 5

Utilisation du logiciel GEOPLAN

1) Créer la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Utiliser le menu déroulant :

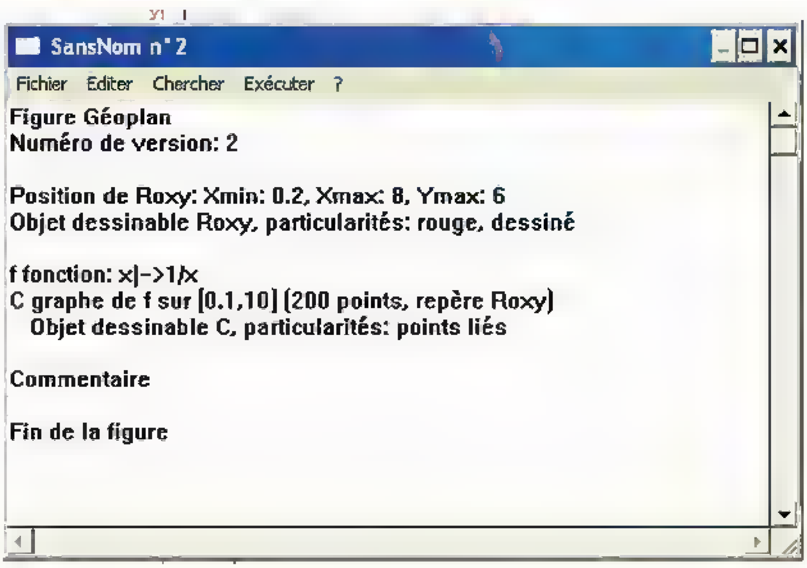
créer - numérique - fonction numérique.



2) a) Pour obtenir la représentation dans un repère orthonormé faire apparaître le repère avec la touche 

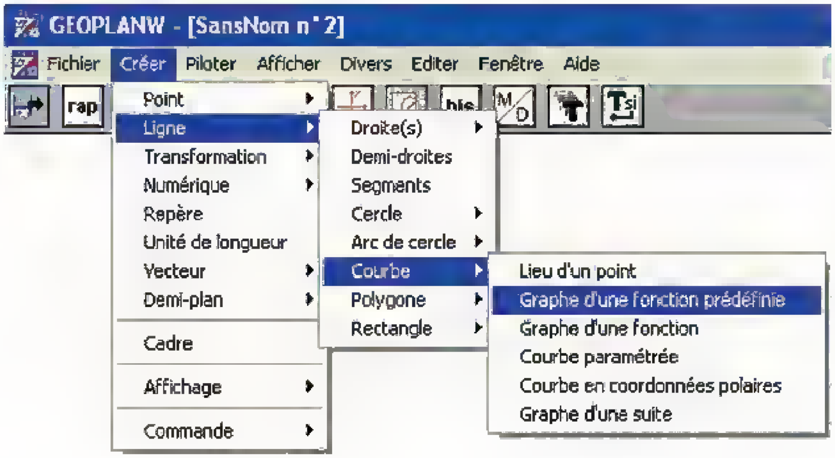
b) Dans le menu Editer appeler Editer texte figure, changer la position du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ en modifiant les valeurs des extremums :

Position de Roxy: Xmin: 0.2, Xmax: 8, Ymax: 6 et exécuter.



c) Tracer la fonction f sur l'intervalle [0.2, 8] :

Menu ligne courbe ; Graphe d'une fonction prédéfinie.



3) Créer le point A(1, f(1)) a l'aide d'une variable a affectée à 1 :

Menu Créer : variable réelle libre a dans l'intervalle [0.2, 8]

Menu Piloter : affecter une valeur à une variable numérique : a affectée à 1

Créer le point repéré A(a, f(a)).

4) Créer le point M(a+h, f(a+h)) a l'aide d'une variable h :

Menu Créer : variable réelle libre h dans l'intervalle [-0.8, 0,8]

Créer le point repéré M(a+h, f(a+h)).

5) Créer la sécante (AM) : Menu Ligne : droite ; Définie par deux points.

6) Déplacer le point M

a) choisir piloter au clavier la variable h. Touches $\longrightarrow$ pour déplacer M.

b) Observer le comportement de la sécante (AM) lorsque M est proche de A.

7) a) Calculer le coefficient directeur de la droite (AM) :

b) Créer calcul algébrique (f(a+h) - f(a))/h à affecter dans la variable numérique u.

c) Créer l'affichage des variables numériques h et m.

d) Lorsque M tend vers A, observer le coefficient directeur de (AM).

8) La droite (d_1) est la limite de la droite (AM) lorsque M tend vers A.

Créer cette droite : Menu Ligne : droite ; Point - coefficient directeur (la nommer d1)

Activité 6

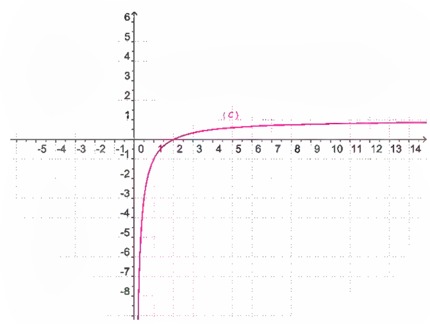
Soit f la fonction définie sur] 0 , +∞ [par : $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$.

1) Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer f '(1).

2) La figure ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction f.

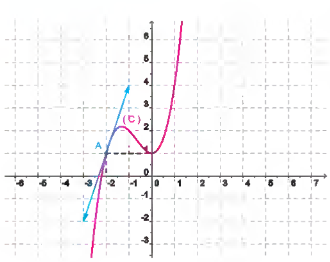
a- Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

b- Tracer T.

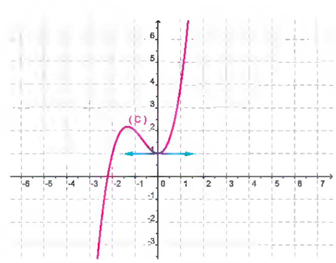


Activité 7

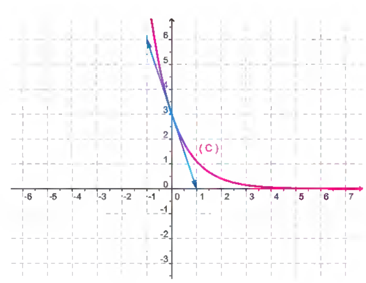
Pour la valeur correspondante de x_0 ,déterminer f ' (x_0) dans chacun des cas suivants :



$x_0 = -2$



$x_0 = 0$



$x_0 = 0$

Activité 8

1) Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par : $f(x) = \sqrt{1-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a- Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

b- Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

2) Compléter, à l'aide d'une calculatrice, le tableau suivant :

h	-0.5	-0.2	-0.01	-0.001	.....	0.000 1	0.001	0.01	0.3
$\sqrt{1-h}$									
$1-\frac{1}{2}h$									
$\sqrt{1-h}-(1-\frac{1}{2}h)$									

Commentaire

On remarque que $\sqrt{1-h}$ est assez proche de $f(0) + h f'(0)$ c'est-à-dire de $1-\frac{1}{2}h$ pour h assez proche de 0, on dit que : $1-\frac{1}{2}h$ est l'approximation affine de $\sqrt{1-h}$ en 0.

Exercice résolu

Donner une valeur approchée de $\sqrt{0.94}$, en utilisant l'approximation affine de $\sqrt{1-h}$

On a : $\sqrt{0.94} = \sqrt{1-0.06} \simeq 1-\frac{1}{2}\times 0.06 \simeq 0.97$

la calculatrice donne $\sqrt{0.94} = 0.96953971$.

On admet le théorème suivant :

Théorème et Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en x_0 de I. Le réel $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une valeur approchée de $f(x_0+h)$ lorsque h est assez proche de 0. Ce réel s'appelle approximation affine de f en x_0.

Remarque

En posant $x = x_0 + h$, on a : $f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$ est l'approximation affine de f(x) en x_0.

Activité 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)^3$.

1) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -3$.

2) a- Donner l'approximation affine de f en 0.

b- Donner une valeur approchée de $(0.96)^3$.

DÉRIVABILITÉ SUR UN INTERVALLE OUVERT, FONCTION DÉRIVÉE

Activité 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

Montrer que pour tout x_0 de $\mathbb{R}$, f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = 2x_0$.

Commentaire :

- Pour exprimer que pour tout x_0 de $\mathbb{R}$, $f'(x_0)$ existe on dit f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto 2x$ définie sur $\mathbb{R}$ s'appelle fonction dérivée de f (ou simplement la dérivée de f) et est notée f '.

Application : Le nombre dérivée de f en -2 par exemple est $f'(-2) = 2(-2) = -4$

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
  Si pour tout x_0 de I, $f'(x_0)$ existe, on dit que f est dérivable sur I.
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, la fonction définie sur I et qui à x associe le nombre réel $f'(x)$ s'appelle fonction dérivée de f et est notée f '

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

Fonctions dérivées de fonctions usuelles

On admet les résultats suivants résumés dans le tableau ci-dessous :

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
C (constante)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^n , $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\mathbb{R}$	$n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

A titre d'exemples nous allons démontrer les résultats 5 et 6.

• Soit f la fonction définie sur IR_+ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Pour tout x de IR_+^* et pour tout h non nul tel que $x + h \geq 0$, et $h \neq 0$

le réel $T = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

La règle de la partie conjuguée donne :

$T = \dfrac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$; pour $x \succ 0$, d'où $\lim\limits_{h \to 0} T = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Conclusion :

La fonction f est dérivable sur IR_+^* et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. pour tout $x > 0$

• Soit g : $\begin{array}{l} IR \rightarrow IR \\ x \rightarrow \sin x \end{array}$

Pour tout x de IR et pour tout réel h non nul on a :

$T = \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$T = \dfrac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \dfrac{\cos h - 1}{h} + \cos x \dfrac{\sin h}{h}$

On a vu au 2ème chapitre que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - \cos h}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ d'où $\lim\limits_{h \to 0} T = \cos x$

Conclusion : g est dérivable sur IR et $g'(x) = \cos x$.

Activité 11

Calculer $f'(x_0)$ dans chacun des cas suivants:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = -2$

$f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

$f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

$f(x) = x^3$, $x_0 = \sqrt{2}$

DÉRIVABILITÉ À GAUCHE, DÉRIVABILITÉ À DROITE EN UN POINT

Activité 12

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = x|x-1| + 1.$

On se propose d'étudier la dérivabilité de f en 1.

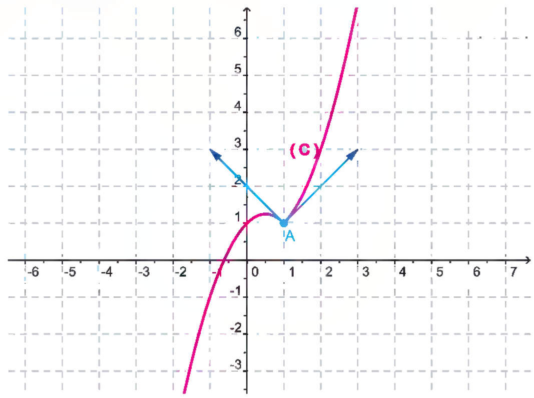
Soit $T = \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ pour $x \neq 1$.

a- Montrer que pour tout $x > 1$, $T = x$

et pour tout $x < 1$, $T = -x$.

b- En déduire $\lim\limits_{x \to 1^+} T$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} T$

c- f est-elle dérivable en 1 ?



Commentaire

- On trouve $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$,On dit que f est **dérivable à droite** en 1 et que le réel 1 est **le nombre dérivé de f à droite** en 1 que l'on note $f'_d(1)$
- de même $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1$. On dit que f est dérivable à gauche en 1. Le réel – 1 est **le nombre dérivé de f à gauche** en 1 ; on le note $f'_g(1)$.
- Comme T n'a pas de limite en 1, donc f n'est pas dérivable en 1.
- La courbe (C) de f admet au point A d'abscisse 1, une **demi-tangente** de coefficient directeur 1 et une **demi-tangente** de coefficient directeur -1

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR et x_0 un réel de I.

- On dit que f est dérivable **à droite** en x_0 si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie à droite en x_0. Cette limite s'appelle la dérivée de f à droite en x_0 et notée $f'_d(x_0)$.
- On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie à gauche en x_0. Cette limite s'appelle la dérivée à gauche de f en x_0 et notée $f'_g(x_0)$

Interprétation graphique :

Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ la courbe représentative (C) de f admet au point A d'abscisse x_0 deux **demi tangentes** de coefficients directeurs $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$.

Le point A est un **point anguleux.**

Activité 13

a) Montrer que si une fonction f est dérivable en x_0 alors

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

b) Montrer que si une fonction f est dérivable à droite et à gauche en x_0 alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

c) Conclure

Théorème

f est dérivable en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } x_0 \\ f \text{ est dérivable à gauche en } x_0 \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$

Activité 14

Répondre par vrai ou faux

1) f est dérivable à droite et à gauche en x_0 donc f est dérivable en x_0

2) f est dérivable en x_0 donc f est dérivable à gauche et à droite en x_0

3) f est dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ donc f est dérivable en x_0

Activité 15

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ pour } x \geq 0 \\ -x^2 + 1 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$

Déterminer $f'_d(0)$ et $f'_g(0)$. Conclure.

DÉRIVABILITÉ SUR UN INTERVALLE FERMÉ

Définitions

Soit a un réel. La fonction f est dérivable sur $[a , +\infty[$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- f est dérivable sur $]a , +\infty[$.
- f est dérivable à droite en a.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

f est dérivable sur $[a , b]$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- f est dérivable sur $]a , b[$.
- f est dérivable à droite en a.
- f est dérivable à gauche en b

Exemple

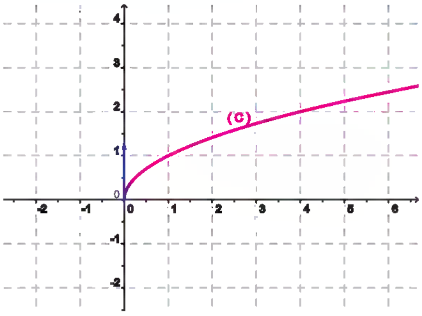
Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Etudier la dérivabilité de f sur $[0 , +\infty[$

On sait que f est dérivable sur $]0 , +\infty[$ et pour tout x de $]0 , +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Etudions la dérivabilité de f à droite en 0. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

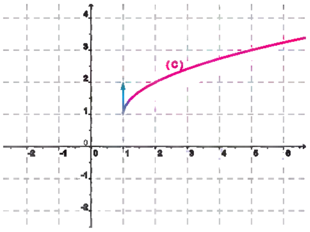
d'où f n'est pas dérivable à droite en 0 et par suite f n'est pas dérivable sur $[0 , +\infty[$

Commentaire :



- La courbe représentative (C) de f admet au point d'abscisse 0 une demi- tangente verticale
- Soit f une fonction continue à droite, (respectivement à gauche)en x_0 , lorsque la limite à droite (respectivement à gauche) en x_0 du taux d'accroissement

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est $+\infty$ ou $-\infty$, la courbe représentative (C) de f admet au point A d'abscisse x_0 une demi tangente verticale



Exercice résolu

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x^2 - 2|x|$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Etudier la dérivabilité de f en 0.

Solution:

$$1)\ \left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x^2 - 2x = 0 = f(0)\\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x^2 + 2x = 0 = f(0)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow$$

donc f est continue en 0

$$2)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} x - 2 = -2$$

f est dérivable à droite en 0 et on a $f'_d(0) = -2$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x + 2 = 2$$

donc f est dérivable à gauche en 0 et on a $f'_g(0) = 2$

Conséquence

Comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ alors f n'est pas dérivable en 0.

Commentaire

On vient de voir l'exemple d'une fonction continue en x_0 et non dérivable en x_0.

Activité 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x > 1 \\ -x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -2$

2) Vérifier que f est continue en 1

On admet le théorème suivant :

Théorème

Si f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0

Conséquence

Si f n'est pas continue en x_0 alors elle n'est pas dérivable en x_0.

Activité 17

Répondre par vrai ou faux :

- Si f est continue en x_0 alors elle est dérivable en x_0
- Si f n'est pas dérivable en x_0 alors elle n'est pas continue en x_0
- Si f est dérivable en x_0 alors elle est continue à droite en x_0

OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

• Somme de deux fonctions dérivables :

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction f + g est dérivable sur I et on a $(f + g)' = f' + g'$.

Exemple :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. La fonction f est la somme de deux fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ toutes deux dérivables sur $]0, +\infty[$. Pour tout x de $]0, +\infty[$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ d'où $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

• Produit d'une fonction dérivable par une constante

Théorème

Si f est dérivable sur un intervalle I et a une constante réelle alors la fonction a.f est dérivable sur I et on a: $(a.f)' = a.f'$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{3}{x}$

f est le produit de la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ par la constante réelle 3.

u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $u'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ d'où pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{-3}{x^2}$

Activité 18

Montrer que toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 6x + 7$

Chaque terme de f est le produit d'une constante par une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On dérive chaque terme et on fait la somme :

$f'(x) = -2.3x^2 + 3 . 2x - 6 + 0$ d'où $f'(x) = -6x^2 + 6x - 6$

• Produit de deux fonctions dérivables

Théorème

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur le même intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction f x g est dérivable sur I et on a : $(fg)' = f'.g + f.g'$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+ 3)\sin x$.

La fonction f est le produit de la fonction U: $x \to x^2 + 3$ et de la fonction v :$x \to \sin x$

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \cos x$.

On a donc $f'(x) = 2x \sin x + (x^2 + 3)\cos x$.

Activité 19

Démontrer que si f est dérivable sur un intervalle I et si n est un entier supérieur ou égal à 2 alors f^n est dérivable sur I et on a : $(f^n)' = n.f'.f^{n-1}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - x + 3)^4$

$f = u^4$ avec $u(x) = x^2 - x + 3$. On a : $u'(x) = 2x - 1$ ce qui donne $f'(x) = 4(2x - 1)(x^2 - x + 3)^3$

• Inverse d'une fonction dérivable

Théorème

Si f est dérivable sur un intervalle I et si pour tout x de I, $f(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+4}$. $f = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = x^2+3x+4$.

Vérifier que l'équation $u(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, d'autre part la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant une fonction polynôme,

On a : $u'(x) = 2x + 3$

d'où $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} = -\frac{2x+3}{(x^2+3x+4)^2}$

• Quotient de deux fonctions dérivables

Activité 20

Répondre par vrai ou faux :

- La dérivée de la somme est la somme des dérivées
- La dérivée du produit est le produit des dérivées
- La dérivée de l'inverse est l'inverse de la dérivée
- La dérivée du quotient est le quotient des dérivées

Théorème

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition

En effet , une fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes, P et Q qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $\frac{P}{Q}$ est dérivable pour tout x de $\mathbb{R}$ tel que $Q(x) \neq 0$.

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \frac{-3x+4}{4x+2}$. f est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et

$$f'(x) = \frac{-3(4x+2) - 4(-3x+4)}{(4x+2)^2} = \frac{-22}{(4x+2)^2}$$

Activité 21

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \operatorname{tg} x$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ et que :
$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

• Dérivée d'une fonction de type : $x \mapsto f(ax+b)$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que pour tout x de J le réel $ax+b$ appartient à I.
La fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur J et on a : $g'(x) = a f'(ax+b)$

Exemple :

Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{-2x+4}$ définie sur $\left]-\infty, 2\right]$.

Etudions la dérivabilité de g sur $J = \left]-\infty, 2\right[$

Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$. f est dérivable sur $I = \left]0, +\infty\right[$.

Pour tout réel x de $\left]-\infty, 2\right[$, le réel $-2x+4 \in I$. D'où g est dérivable sur $\left]-\infty, 2\right[$

et on a $g'(x) = -2f'(-2x+4) = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{-2x+4}}$ et par suite $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{-2x+4}}$

Activité 22

Démontrer les résultats suivants :

1) a et b étant deux réels tels que $a \neq 0$ et $D_0 = \{x \in \mathbb{R},\ ax + b > 0\}$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax+b}$ est dérivable sur D_0 et on a : $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

2)

La fonction $g : x \mapsto \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = a\cos(ax+b)$

La fonction $h : x \mapsto \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $h'(x) = -a\sin(ax+b)$

Activité 23

Déterminer la fonction dérivée f' en précisant son domaine de définition D_f ,

dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \sqrt{x-3},\ f(x) = \frac{2}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)},\ f(x) = \frac{x^2+1}{x^2 - 3x + 2},\ f(x) = [\cos(3x - 2]^3$$

$$f(x) = \cos(3x+4)$$

DÉRIVÉE SECONDE

Activité 24

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f '.

2) Montrer que f ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
Si f' est elle-même dérivable sur I, la fonction dérivée de f' est notée f''. Dans ce cas, la fonction f est dite deux fois dérivable sur I et f'' est appelée la dérivée seconde de f.

Activité 25

Calculer la dérivée seconde de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = \sin 2x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Résumé

• f est dérivable en x_0 signifie : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell, \ \ell \in \mathbb{R}$

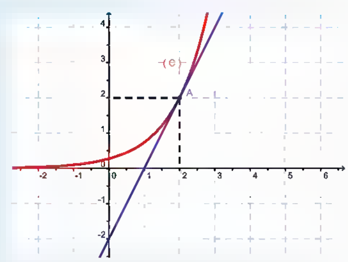
Ou encore : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell$

Le réel ℓ s'appelle : le nombre dérivé de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

• Si la fonction f représente la loi horaire d'un mobile, $f'(t_0)$ est la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

• La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 a pour équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$



• Si f est dérivable en x_0, le réel $f(x_0) + h\, f'(x_0)$ s'appelle : approximation affine de $f(x_0 + h)$ et constitue une valeur approchée de $f(x_0+h)$ pour h voisin de 0.

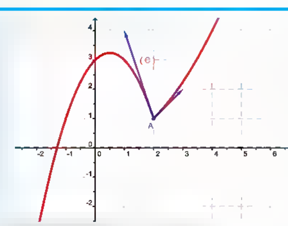
• f est dérivable a droite en x_0 si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est un réel fini

Ce réel est noté $f'_d(x_0)$.

• f est dérivable à gauche en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est un réel fini.

ce réel est noté $f'_g(x_0)$

• $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ représentent respectivement les coefficients directeurs des demi tangentes à droite et à gauche à la courbe de f au point d'abscisse x_0.



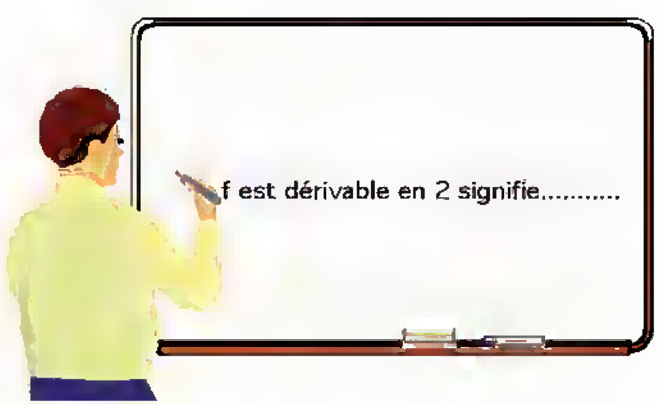
Résumé

- f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Le tableau suivant récapitule les principaux résultats concernant les fonctions dérivées usuelles et les opérations sur les fonctions dérivées.

Fonctions	**Fonctions dérivées**	Remarques	
$x \mapsto a$	$x \mapsto 0$	a constante	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$		sur $\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{ax+b}$	$x \mapsto \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$a \neq 0$	sur $\{x \in \mathbb{R} \ / \ ax+b>0\}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$x \mapsto a.\cos(ax+b)$		sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$x \mapsto -a.\sin(ax+b)$		sur $\mathbb{R}$
$f+g$	$f'+g'$		
$a.f$	$a.f'$	a constante	
$f.g$	$f'.g+g'.f$		
f^n	$n.f'.f^{n-1}$	$n \geq 1$	
$\dfrac{1}{f}$	$\dfrac{-f'}{f^2}$		$f(x) \neq 0$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'.g-g'.f}{g^2}$		$g(x) \neq 0$

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition
- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0



➢Dans les exercices de 1 à 3, déterminer le nombre dérivé de f en x_0 en utilisant la définition.

01 $f(x) = x^2 - 2x + 4, \ x_0 = 2$

02 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}, \ x_0 = 1$

03 $f(x) = \sqrt{x-2}, \ x_0 = 6$

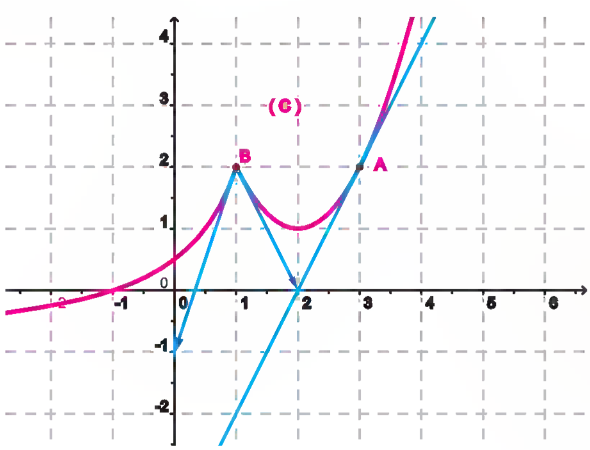
Dans les exercices de 4 à 6, déterminer le nombre dérivé à droite en x_0, le nombre dérivé à gauche en x_0 et préciser si f est dérivable en x_0.

04 $f(x) = |x-3| + x^2, \ x_0 = 3$

05 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x \geq 1 \\ x \text{ si } x < 1 \end{cases}, \ x_0 = 1$

06 $f(x) = x|x|, \ x_0 = 0$

07 La courbe représentative (C) ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur IR



- La droite D_1 est tangente à (C) en A (3 , 2)
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs des demi tangentes à (C) en B.

Par lecture du graphique répondre aux questions suivantes :

1) a) f est elle dérivable en 3 ?
   b) déterminer f '(3)
2) a) f est-elle dérivable en 1 ?
   b) Déterminer $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$

08 Soit f une fonction dérivable en $\dfrac{1}{2}$ vérifiant $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

09 La courbe représentative (C) d'une fonction f dérivable dans un intervalle ouvert I contenant -3 admet au point d'abscisse 3 une tangente D d'équation

$$y = \frac{1}{3}x + 4.$$

Déterminer f(-3) et f '(-3).

➢Dans les exercices de 10 à 32, déterminer la fonction dérivée de la fonction f en précisant l'ensemble D_f' sur lequel f est dérivable.

10 $f(x) = -2x + 3$

11 $f(x) = x^2 + 3x - 15$

12 $f(x) = x^3$

13 $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$

14 $f(x) = \sqrt{x} + 12$

15 $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x} + 1$

16 $f(x) = x\sqrt{x}$

17 $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$

18 $f(x) = (2x - 3)^4$

19 $f(x) = (x - 2)(x + 4)$

20 $f(x) = \dfrac{-x + 7}{x - 3}$

21 $f(x) = \dfrac{2x + 4}{-x^2 - 2x + 3}$

22 $f(x) = \dfrac{32}{x - 3}$

23 $f(x) = \sqrt{-3x + 2}$

24 $f(x) = \sqrt{2x - 6}$

25 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$

26 $f(x) = \sin(-2x + 2)$

27 $f(x) = \cos(3x + 2)$

28 $f(x) = \cos^2 x$

29 $f(x) = x^2 \sin x$

30 $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$

31 $f(x) = (-2 + x)(3x + 1)^2$

32 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3}$

33 Calculer f'(x) et dresser le tableau de variation de f dans chacun des cas suivants:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$;

b) $f(x) = x^3 - 3x + 5$;

c) $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{x - 1}$;

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2x}$;

e) $f(x) = (x^2 + x - 2)^4$

34 Calculer $f''(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x - x^5$.

b) $f(x) = 2\cos(3x)$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$

35 Soit la fonction,

$f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ et sa courbe représentative (C) dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) a- Montrer que f est dérivable sur IR et calculer f '(x).

b- Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point d'abscisse 2.

2) Soit la droite Δ d'équation : y = 4x

a- Résoudre l'équation f '(x) = 4.

b- En déduire qu'il existe une tangente Δ' à (C) parallèle à Δ, dont on précisera le point de contact A et une équation cartésienne.

36 Soit le réel $X = \sqrt{a^2 + h}$ où a est un réel strictement positif et h un réel tel que $\left|\dfrac{h}{a^2}\right|$ assez petit.

On se propose de donner une valeur approchée de X.

1) a- Vérifier que l'on a : $X = a\sqrt{1 + \dfrac{h}{a^2}}$

b- En utilisant l'approximation affine en 0 de la fonction $f : x \to \sqrt{1+x}$, montrer que le réel $a + \dfrac{h}{2a}$ est une valeur approchée de X.

2) Application:

Donner une valeur approchée pour chacun des réels suivants: $\sqrt{420}$, $\sqrt{918}$ et $\sqrt{9972}$

Comparer chaque fois la valeur trouvée avec la valeur donnée par la calculatrice.

37 En utilisant l'approximation affine en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, donner une valeur approchée des nombres suivants : $a = \dfrac{1}{10005}$, $b = \dfrac{1}{998}$

Indication : écrire $a = 10^{-4}\dfrac{1}{1 + 5.10^{-4}}$

38 **(L'antenne parabolique)**

La courbe représentant la coupe verticale d'une antenne parabolique a pour équation, dans le repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$, $y = \dfrac{1}{4}x^2$.

L'objectif est de découvrir, par une construction minutieuse, la propriété géométrique des paraboles qui explique l'utilisation de cette forme pour une antenne.

1) a. Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$.

b. Tracer soigneusement, dans le repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 2 cm), la courbe ζ représentative de f sur $\left[-3, 3\right]$.

2)a. Tracer la tangente T_1 à la courbe ζ au point A_1 d'abscisse $x_1 = 1$, la tangente T_2 à ζ au point A_2 d'abscisse $x_2 = -2$ et la tangente T_3 à ζ au point A_3 d'abscisse $x_3 = 3$.

b. Tracer les droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 , respectivement orthogonales à T_1 en A_1 , à T_2 en A_2 et à T_3 en A_1 .

3) Etant donné la distance parcourue, on considère que tous les rayons émis par un satellite arrivent à la parabole suivant la même direction. On règle donc l'axe de la parabole (axe (Oy)) dans cette direction.

a- Représenter le rayon atteignant la parabole au point A_1 (demi-droite parallèle à (Oy) passant par A_1). Suivant les lois de l'optique, le rayon se réfléchit symétriquement par rapport à Δ_1 . Représenter en rouge le rayon réfléchi.

b- Représenter de même les rayons atteignant la parabole en A_2 et en A_3 et leurs rayons réfléchis (en rouge) . Que constate -t-on ?

L'antenne parabolique a cette propriété : tous les rayons dirigés parallèlement à l'axe de la parabole atteignent, en se réfléchissant, un même point, appelé foyer de la parabole.

39 (Résistance apparente et résistance dynamique)

1) A partir d'un relevé expérimental, on obtient les valeurs de la tension U (en volts), en fonction de l'intensité I (en ampères) dans un dipôle non linéaire.

I (ampères)	0.05	0.1	0.15	0.2
U (volts)	0.8	1.5	2	2.4

0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
2.75	3	3.25	3.4	3.55	3.6

a- Dans un repère $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 10 cm pour 1 A ; 1 cm pour un 1 V), placer les points de coordonnées (I, U) pour chacune des valeurs du tableau.

b- On définit, en un point P de coordonnées (I_p, U_p), la résistance apparente en P :

$R_{app,P} = \frac{U_p}{I_p}$. Déterminer la résistance apparente aux points P_1 et P_2 d'abscisses respectives : $I_1 = 0.2$ et $I_2 = 0.4$

c- On définit, pour une valeur Ip de l'intensité, la résistance dynamique par :

$$R_{dyn,P} = \frac{dU}{dI}\left(I_p\right).$$

A quoi correspond la résistance dynamique en un point P d'abscisse I_p du diagramme ? On considère comme une approximation convenable de la tangente en P la droite passant par P et parallèle à la droite définie par deux points relevés de part et d'autre de P. Déterminer une valeur approchée de la résistance dynamique pour I_1 et I_2 .

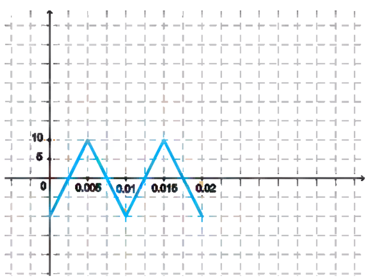
2°) Pour un autre dipôle non linéaire, on considère que la relation entre l'intensité I (en ampères) et la tension U (en Volt) est données par : $U = \sqrt{10^3 I}$

Déterminer la résistance dynamique pour I = 4mA et I = 25mA.

40 **(Tension et intensité)**

Dans un circuit électrique, un condensateur, soumis à une tension u, est parcouru par un courant i, où u et i sont des fonctions du temps t. On considère ici un condensateur de capacité $C = 2\mu F$.

On soumet le condensateur à une tension " triangulaire ", représentée ci-dessous (sur l'axe des abscisses, 1 unité représente 1 seconde ; sur l'axe des ordonnées, 1 unité représente 1 volt)



1) Exprimer u(t) en fonction de t pour :

a) $t \in [0; 0{,}005]$;

b) $t \in [0{,}005 ; 0{,}01]$;

c) $t \in [0{,}01 ; 0{,}015]$.

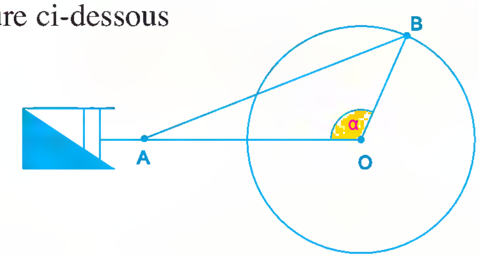
2) En utilisant la formule $i(t) = C\dfrac{du}{dt}$, déterminer l'expression de la fonction :

$t \mapsto i(t)$ sur les intervalles

$]0 ; 0{,}005[$, $]0{,}005; 0{,}01[$ et $]0{,}01;0{,}015[$.

3) Tracer la représentation graphique de la fonction intensité sur chacun des trois intervalles précédents (on prendra sur l'axe des abscisses 0,5 cm pour 1 ms et sur l'axe des ordonnées 1,5 cm pour 1mA) .

41 On considère le mécanisme décrit dans la figure ci-dessous



On donne (OB = 2dm , AB = 6dm). La roue motrice tourne dans le sens indirect à la vitesse de 4 tours par seconde (c'est-à-dire 8π radians par seconde). A l'instant t, on note $\alpha(t)$ la mesure de l'angle . $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ ainsi $\alpha(t) = 8\pi t$.

La distance OA est notée x(t). On suppose que la fonction $t \mapsto x(t)$ est dérivable.

1) En appliquant la relation d'El Kashi dans le triangle AOB, montrer que : $x^2(t) - 4x(t)\cos\alpha(t) - 32 = 0$.

2) On rappelle que la vitesse du piston à l'instant t est x'(t). Montrer que :

$x'(t)[2\cos\alpha(t) - x(t)] = 16\pi x(t)\sin\alpha(t)$.

3°) Déterminer la vitesse du piston lorsque $\alpha(t) = 0$, $\alpha(t) = \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha(t) = \pi$

Indication :

- La relation d'El KASHI dans un triangle OAB est:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB\cos\left(\widehat{AOB}\right)$$

- On dérive la fonction

$t \to x^2(t) - 4x(t).\cos(\alpha(t)) - 32$

qui est nulle.

Les mathématiciens arabes ...

Al-Khwarizmi (environ : 780 - 850) , le plus grand mathématicien de Bagdad , décrit pour la première fois le mot « Al jabr » signifiant Algèbre vers 813-833 dans un livre qui sera reconnu par ses pairs et qui engendrera une nouvelle vague de mathématiques.

Il est considéré comme l'un des grands fondateurs de l'algèbre.

Dans ce livre, il ne se contente plus de résoudre des problèmes (liés au commerce , aux héritages et au cadastre) arithmétiques ou géométriques avec des équations mais procède à l'inverse. Il introduit quatre concepts :

- La notion de base, c'est l'équation. Donc peu importe l'objet que l'on étudie. (Début d'abstraction)
- La notion de binôme et de trinôme et donc des règles opératoires qui vont avec.
- La notion de mise en équation canonique.
- La notion de solution algorithmique.

Il a résolu six équations :

$ax^2 = c$; $bx = c$; $ax^2 = bx$; $ax^2 + c = bx$; $ax^2 + bx = c$; $bx + c = ax^2$

où a,b et c sont trois nombres strictement positifs et x l'inconnue .

Il n'écrit pas l'équation sous la forme générale $ax^2 + bx + c = 0$, comme nous l'écrivons de nos jours : en effet , les solutions ainsi que les coefficients sont des nombres positifs (**les nombres négatifs n'existant pas encore**) et une somme de termes
négatifs ne peut être nulle .

En ce qui concerne l'équation $x^2 + bx = c$, il calcule $(b/2)^2 + c$ (ce qui correspond

à notre discriminant) et trouve que $x = \sqrt{\Delta'} - \frac{b}{2}$ où $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$; la solution négative étant ignorée .

Donc avec l'algèbre, on obtient une théorie des équations résolubles par radicaux et du calcul algébrique sur les binômes et les trinômes.

Il s'ensuit un courant de recherche en algèbre qui va prendre de l'ampleur et se séparer en deux courants au Xe siècle .(un, arithmétique et un autre, géométrique)

Al-Khayyam au XIe siècle classifie les équations du 2e et 3e degrés et tente de les résoudre par intersection de deux coniques (méthode qui sera reprise au XVI-XVIIe siècle). Donc, par exemple, pour résoudre x3 + a x = b, on identifie à l'intersection d'un cercle et d'une parabole.

Al-Tusi (fin XIIe siècle) va encore plus loin en introduisant les notions fonctionnelles (dérivée, discriminant) mais sans les justifier.

Al Kashi généralise les fractions décimales en remplacement des fractions en base 60. Il calcula π avec 16 décimales.

Chapitre 5

Etude de fonctions

"Les mathématiques sont la poésie des sciences."
Léopold Sédar SENGHOR : (1906 - 2001)

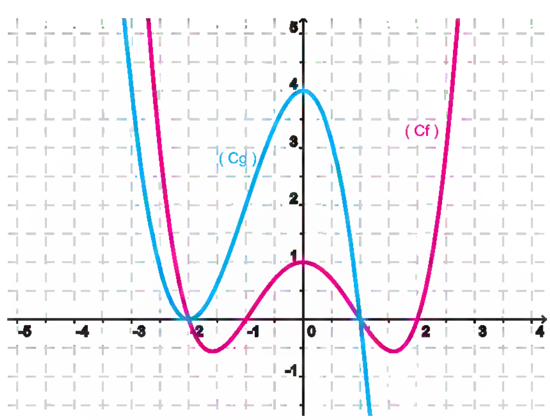
- **Fonctions affines par intervalles**
- **Fonctions polynômes du second degré ; Fonctions bicarrées**
- **Fonctions polynômes du troisième degré**
- **Fonctions** $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$
- **Fonctions** $x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$
- **Fonctions** $x \ a \ \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c}$
- **Fonctions** $x \mapsto \sqrt{ax+b}$

INTRODUCTION

Activité 1

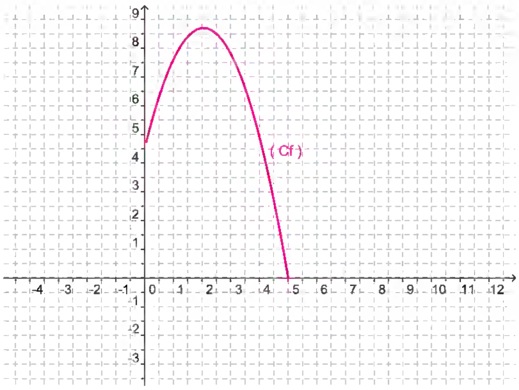
Les courbes ci-contre représentent deux fonctions f et g définies sur IR.
Répondre, par lecture graphique, aux questions suivantes :

1) Déterminer l'image de -1 et de 0 par f.
2) Déterminer les antécédents de 0 par g.
3) a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Préciser le maximum et le minimum de f sur Df ainsi que les valeurs en lesquels ils sont atteints.
   c) f est-elle paire ?
4) Résoudre dans [-3 , 2] :
   a) f(x) = g(x)   b) f(x) ≤ g(x)



Activité 2

Un projectile est lancé d'une certaine hauteur verticalement vers le haut avec une certaine vitesse initiale. La courbe ci-contre donne l'évolution de la hauteur depuis l'instant où le projectile a été lancé. (t = 0)



1) a- Sur quel intervalle de temps la hauteur est-elle définie ? :

b- Vérifier sur le graphique que, à chaque seconde t est associée **une hauteur et une seule.**

2) On note h la fonction qui à chaque instant t (en seconde) associe la hauteur (en m) ,

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a- Quel est le domaine de définition de h ?

b- Quelle est la hauteur pour t = 1 ? Quelle est l'image de 4 par h ? A quels instants la hauteur atteinte par le projectile est-elle de 8 m ?

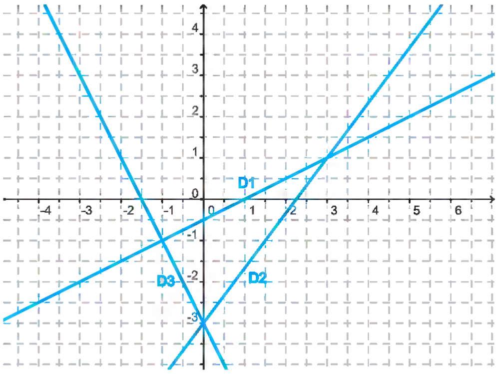
c- A quel instant la hauteur a-t-elle atteint son maximum ? son minimum ?

3) Déterminer les réels a , b et c sachant que $h(t) = at^2 + bt + c$.

Activité 3

1) Compléter le tableau suivant en utilisant le graphique ci-contre

équation de droite	droite correspondante
$y = -2x - 3$	
$y = \frac{4}{3}x - 3$	
$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$	



Représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = -2x - 3 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ f(x) = \frac{4}{3}x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\Re$ par : $f(x) = |2x - 4| - |x|$

1) Exprimer f(x) sans le symbole de la valeur absolue.
2) En déduire que sur chacun des intervalles
   $]-\infty, 0]$, $[0, 2]$ et $[2, +\infty[$, f est une fonction affine.
3) Tracer, dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative de f.

Activité 5

Pour tout réel x , il existe un unique entier relatif n tel que : $n \leq x < n + 1$.
L'entier n s'appelle la partie entière de x et se note E(x). Exemple E(2,9) = 2 , E(- 1,3) = - 2.
Soit f la fonction définie sur [- 2 , 3[par : f(x) = x + E(x).

1) Montrer que f est une fonction affine par intervalles.
2) Représenter f dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

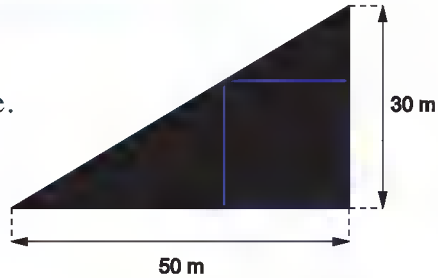
Activité 6

Un automobiliste part de Gabes et se dirige vers Tunis distant de 405 km. De 0h à 3h, il roule à une vitesse moyenne de 75 km/h. De 3h à 4h l'automobiliste se repose à Kairouan. A partir de 4h, il roule à la vitesse moyenne de 100 km/h.

1) A quelle heure l'automobiliste arrive t-il à Tunis ?
2) Exprimer la distance f(t) à partir de Gabes en fonction du temps mis t.
3) Tracer la courbe représentative de f dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

FONCTIONS DU SECOND DEGRÉ
FONCTIONS BICARRÉES

Activité 7



On souhaite construire une maison de forme rectangulaire dans l'angle droit d'un terrain triangulaire. On voudrait que l'aire de la surface au sol de la construction(partie hachurée) soit la plus grande possible.On pose a et x les dimensions de ce rectangle.

1) Quel est l'ensemble D des valeurs possibles pour x ?

2) Démontrer que $a = 30 - \dfrac{3}{5}x$

3) Soit f la fonction qui à chaque réel x associe l'aire de la surface au sol de la maison.

   Montrer que $f(x) = -\dfrac{3}{5}x^2 + 30x$

4) Etudier les variations de f

5) En déduire l'aire maximale de la surface au sol

6) Déterminer x pour que l'aire soit de 360 m^2

Activité 8

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = ax^2 + bx + c$

où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) a- Dresser, suivant le signe de a, le tableau de variation de f.

   b- En déduire que f admet un extremum absolu en $-\dfrac{b}{2a}$

2) a- Vérifier que pour tout réel x,

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

   b- Soit le repère

$$R' = \left(S, \vec{i}, \vec{j}\right) \text{ avec } S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

   Donner une équation cartésienne de (C) dans le repère R'.

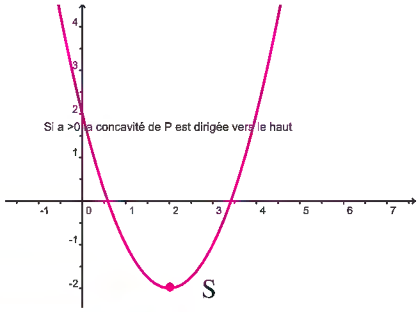
   c- En déduire la nature de (C).

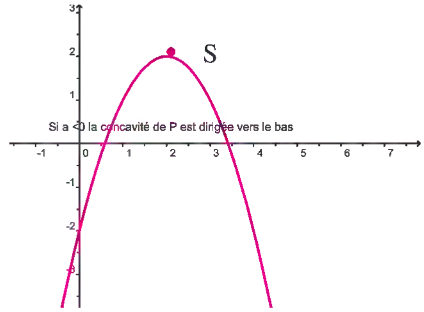
La courbe P d'équation :
$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
est une parabole de sommet

$$S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Remarque :

Soit P la parabole d'équation : $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ et $S\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ son sommet.

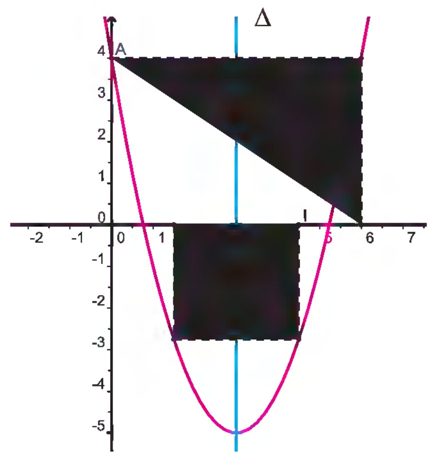




Activité 9

On considère la fonction f définie sur IR par :
$f(x) = x^2 - 6x + 4$ et Cf sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère **orthogonal** $(O, \vec{i}, \vec{j})$

On se propose de montrer que la droite $\Delta : x = 3$ est un axe de symétrie pour C_f.



1) Soit M(x , y) un point du plan dont l'image par la symétrie orthogonale d'axe D est M'(X , Y).

Montrer que $\begin{cases} X = 6 - x \\ Y = y \end{cases}$

2) a) Montrer que f vérifie les deux conditions suivantes :

- Pour tout x de D_f (domaine de définition de f), (6 – x) appartient aussi au domaine Df.
- Pour tout x de D_f, f (6 – x) = f(x)

b) Conclure

3) Soit g la fonction à variable réelle x définie par : $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

a) Déterminer le domaine de définition de g.

b) Montrer que la courbe de la fonction g admet dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite $\Delta : x = 2$ comme axe de symétrie.

Théorème

Le plan étant muni d'un repère orthogonal.

La droite D d'équation x = a est axe de symétrie de la courbe (C) d'une fonction f si, et seulement si

pour tout x de D_f, 2a – x appartient à D_f et f(2a – x) = f(x).

Activité 10

Montrer que la droite $\left(O, \vec{j}\right)$ est un axe de symétrie de (C) si et seulement si f est paire

Activité 11

Soit un quart de cercle $\overset{\frown}{AB}$ de centre O et de rayon 8. M étant un point de l'arc , $\overset{\frown}{AB}$ on désigne par H le projeté orthogonal de M sur le segment [OB]. On se propose de déterminer les points M de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ pour lesquels MA + MH est égal à un nombre réel positif m donné.

1) On note respectivement x et y les distances MA et MH.

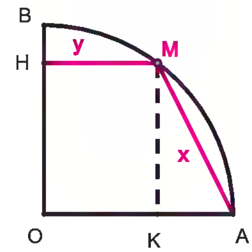
a- Justifier que $0 \leq x \leq 8\sqrt{2}$.

b- Soit K le projeté orthogonal de M sur [OA].

Montrer que $KM^2 = 64 - y^2$ et $KA^2 = (8 - y)^2$.

c- Montrer que : $y = -\dfrac{1}{16}x^2 + 8$

d- Exprimer alors MA + MH en fonction de x.



2) On désigne par f la fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle

$[0, 8\sqrt{2}]$ par : $f(x) = -\dfrac{x^2}{16} + x + 8$

a- Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repère orthogonal.

b- Déterminer les solutions (si elles existent) de l'équation f(x) = m lorsque m = 10 puis lorsque m = 11,7.

c- Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre m, l'existence et le nombre de solutions de l'équation : f(x) = m.

Activité 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 - 1$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Montrer que f est paire.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

3) Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

> Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$
>
> et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$
>
> On dit que (C) admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées .

On dit que (C) admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées .

4) Tracer (C).

5) a- Discuter graphiquement, suivant le paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

b- Résoudre graphiquement dans IR, l'inéquation : $f(x) \geq 3$.

Activité 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^4 - 2x^2$ On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère.

c- Tracer (C).

2) Déduire de (C) la représentation graphique de chacune des fonctions suivantes :

a) $g(x) = |f(x)|$ b) $f(x) = x^4 - 2x^2+2$ c) $k(x) = - f(x)$.

FONCTIONS DU TROISIÈME DEGRÉ

Activité 14

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Donner une équation cartésienne de la tangente T à (C) au point A(1 , - 2).

3) a- Vérifier que pour tout réel x,$f(x) - (-3x + 1) = (x - 1)^3$.

b- En déduire la position de (C) par rapport à T.

4) a- Etudier les branches infinies de (C).

b- Tracer T et (C)

5) a- Calculer la dérivée seconde de f.

b- Compléter le tableau suivant :

> La courbe (C) coupe sa tangente T au point A . A s'appelle un point d'inflexion

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
Signe de $f''(x)$	
Position de (C) par rapport à T	

c- Que peut-on conjecturer ?

Définition

Le point où une courbe traverse sa tangente s'appelle un point d'inflexion.

Théorème

Soit a un réel et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert de centre a. Si f '' s'annule en changeant de signe en a alors le point I(a , f(a)) est un point d'inflexion de la courbe de f

Activité 15

B2 = =A2^3-3*A2^2+1

	A	B	C
1	x	f(x)	
2	-1	-3	
3	-0,9	-2,159	
4	-0,8	-1,432	

A l'aide d'Excel, on se propose de construire un tableau de valeurs pour la fonction f, définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, pour tout réel x. Dans la colonne 1, on voudrait des valeurs de x comprises entre 1 et 3, avec un pas de 0,1, et dans la colonne 2 leurs images par f.

Pour cela :

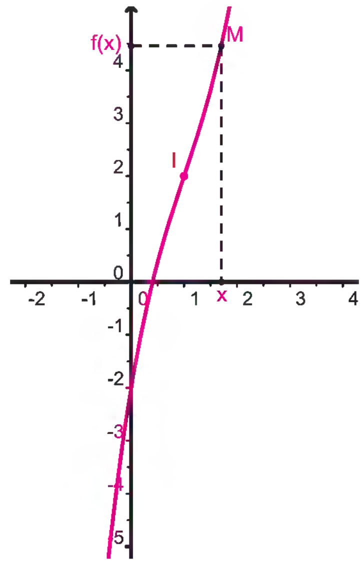
- placer -1 dans la cellule A2 ;
- placer =A2+0,1 en A3 ;
- recopier cette formule vers le bas en terminant par la valeur 3 ;
- écrire =A2 ^ 3 - 3* A2 ^ 2 + 1 en B2 ;
- recopier cette formule vers le bas afin d'obtenir les images de tous les nombres de la première colonne.

Pour obtenir une représentation graphique de f dans l'intervalle [-1, 3] :

- sélectionner les valeurs de x et leurs images ;
- choisir le menu « Insertion – Graphique » ;
- prendre « Nuages de points » comme type de graphique ;
- prendre « Nuage de points avec lissage sans marquage des données » comme sous - type de graphique ;
- cliquer sur « Terminer ».
  - Quelles conjecture peut-on faire concernant les variations de f sur [-1, 3] ?
  - Quel est le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0 dans l'intervalle [-1, 3] ?
  - Donner un encadrement à 1 près de ces solutions grâce au graphique, puis à 10^{-1} près grâce au tableau de valeurs.
  - En modifiant la valeur initiale de x et le pas, trouver un encadrement à 10^{-2} près de ces solutions.

Activité 16

Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. La courbe (C) ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$.



On se propose de montrer que le point I de coordonnées (1 , 2) est un centre de symétrie de (C).

1) Soit M(x , y) un point du plan dont l'image par la symétrie centrale de centre I est M'(x ', y').

Montrer que $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$

2) a) Montrer que f vérifie les conditions suivantes :

• Pour tout x de D_f (domaine de définition de f), (2 – x) appartient aussi au domaine D_f.

• Pour tout x de D_f, $f(2 - x) = 4 - f(x)$

b) Conclure

3) Montrer que I est un point d'inflexion de (C).

4) Montrer que la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$g(x) = \dfrac{3x + 1}{x + 2}$ a pour centre de symétrie le point J (- 2 ; 3).

Théorème

Le plan étant muni d'un repère cartésien.

Le point I (a , b) est un centre de symétrie de la courbe (C) d'équation $y = f(x)$

si, et seulement si,

pour tout x de D_f, $2a - x$ appartient à D_f et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

Activité 17

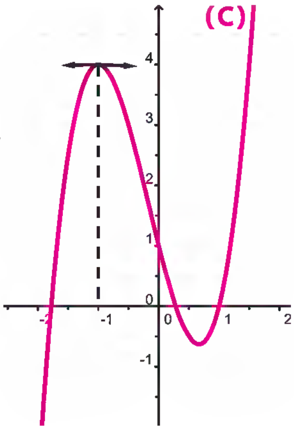
(C) étant la courbe représentative d'une fonction f dans un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Montrer que : O (0 , 0) est un centre de symétrie de (C) si et seulement si f est impaire

Activité 18

La courbe (C) ci- contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par :

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



1) Déterminer les réels a , b, c et d

Dans la suite, on suppose que : $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 1$

2) Montrer que (C) possède un point d'inflexion que l'on précisera.

3) Soit la parabole (P) : $y = -\dfrac{4}{3}x^2 + 4x + 1$

a- Déterminer les coordonnées des points communs à (C) et (P).

b- Tracer P.

c- Résoudre graphiquement l'inéquation: $f(x) \leq P(x)$

Activité 19

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a , b , c et d sont des réels avec $a \neq 0$. On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit le repère $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ avec Ω $(x_0 , y_0) \in$ (Γ) tel que $3ax_0 + b = 0$.

1) Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est :

$$Y = aX^3 + \left(3ax_0^2 + 2bx_0 + c\right)X$$

2) Soit g la fonction définie par : $g(X) = aX^3 + \left(3ax_0^2 + 2bx_0 + c\right)X$

a- Montrer que g est impaire.

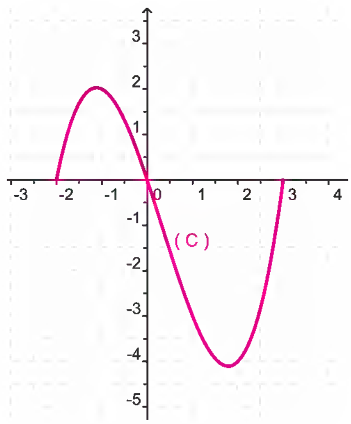
b- En déduire que Ω (x_0 , y_0) est centre de symétrie de (Γ).

c- Vérifier que x_0 est une solution de $f''(x) = 0$.

Activité 20

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

La courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie sur [-2 , 3].



1) a- Déterminer graphiquement le signe de f(x), suivant les valeurs de x.

b- Représenter graphiquement la fonction $g : x \mapsto |f(x)|$

c- Représenter graphiquement la fonction $-f : x \mapsto -f(x)$

2) Soit la fonction $h_k : x \mapsto f(x) + k$ où k est un réel. On désigne par (Γ_k) la courbe de h_k.

a- Montrer que (Γ_k) est l'image de (C) par la translation de vecteur $k\,.\vec{j}$

b- Tracer (Γ_{-2})

3) Soit F la fonction définie par : $F(x) = f(|x|)$

a- Déterminer le domaine de définition de F.

b- Montrer que F est paire.

c- Déduire la représentation graphique de F.

FONCTIONS DE TYPE $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$

Activité 21

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$ par : $f(x) = -\dfrac{3x+5}{x+2}$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) a- Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b- Préciser les asymptotes à (C).

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Déterminer une équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse -1.

Définition

Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

On dit que la droite D d'équation x = a est asymptote à la courbe représentative de la fonction f lorsque l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée :

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

On dit que la droite D d'équation y = b est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$) lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$)

Activité 22

Soit (C) la courbe d'équation $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$, dans un repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

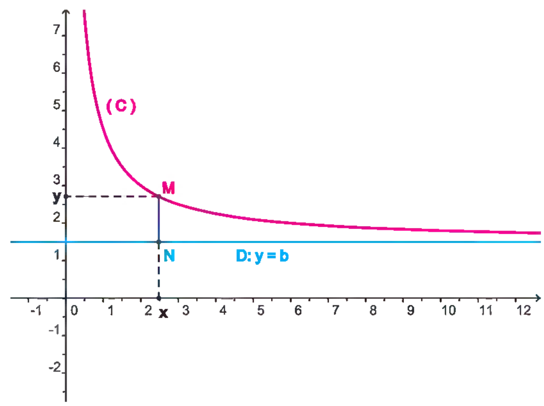
Montrer que les droites $D : x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$ sont des asymptotes à (C).

Activité 23

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, ($b \in IR$).

Soit D la droite d'équation : y = b.



1) Que représente la droite D pour la courbe (C) ?

2) Soit M (x , f(x)) un point de (C) et N le projeté orthogonal de M sur D.

a- Déterminer les coordonnées de N.

b- En déduire que $MN = \left|f(x) - b\right|$

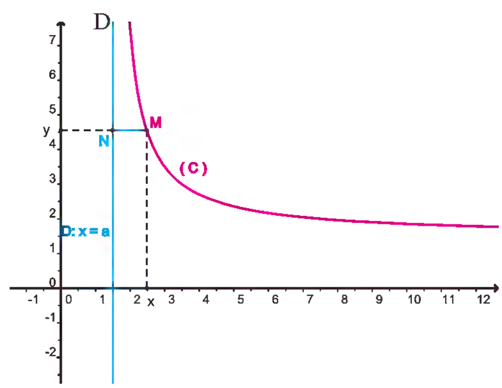
c- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} MN = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

Activité 24

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

On suppose que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

Soit D la droite d'équation : x = a.



3) Que représente la droite D pour la courbe (C) ?

4) Soit M(x , f(x)) un point de (C) et N le projeté orthogonal de M sur D.

a- Déterminer les coordonnées de N.

b- En déduire que $MN = \left|x - a\right|$

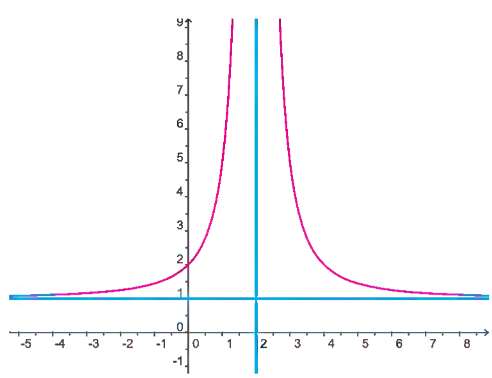
c- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} MN$. Interpréter graphiquement le résultat.

Activité 25

On donne la représentation graphique (C) d'une fonction f (voir figure)

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.



FONCTIONS DE TYPE $x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$, $a \neq 0$ et $a' \neq 0$

Activité 26

Soit f la fonction définie sur]-2 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{-x^2+x+7}{x+2}$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) Vérifier que pour tout x de]-2 ; +∞[, $f(x) = -x+3+\dfrac{1}{x+2}$

2) Calculer $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Soit D la droite d'équation : y = - x + 3. Soit M le point de (C) d'abscisse x et N le point de D de même abscisse. On pose g(x) = f(x) - (-x + 3)

   a- Montrer que $MN = \left|g(x)\right|$

   b- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} MN$ .Que peut-on conjecturer concernant la courbe (C) et la droite D ?

   c- Etudier le signe de g(x). En déduire la position de (C) par rapport à D.

   d- Tracer (C) et D.

Définition

On dit que la droite Δ : y = ax + b est une asymptote à la courbe représentative d'une fonction f au voisinage de + ∞ (respectivement de - ∞) lorsque : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax+b) = 0$)

Activité 26

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) a- Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

   b- Déterminer les asymptotes de (C)

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) a- Montrer que le point Ω (1,0) est un centre de symétrie de la courbe (C).

   b- Tracer (C)

• D'une façon générale si f(x) peut s'écrire sous la forme

$f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$ alors la courbe représentative (C) de f admet la droite D : $y = ax + b$ comme asymptote.

• Le signe de $\varphi(x) = f(x) - (ax + b)$ détermine la position de (C) par rapport à D.

FONCTIONS DE TYPE $x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, $a' \neq 0$

Activité 28

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 3}{x^2 - x + 1}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$

3) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

4) a- Dresser le tableau de variation de f. Tracer (C).

b- Montrer, en utilisant le tableau de variation de f,

que pour tout réel x, $2 \leq \dfrac{3x^2 - 4x + 3}{x^2 - x + 1} \leq \dfrac{10}{3}$

Activité 29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-2)^2}$ .On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ .Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b- Montrer que la droite Δ d'équation y = 1 est une asymptote à (C).

2) Montrer que f est dérivable $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et que $f'(x) = \dfrac{2(x-2)(1-2x)}{(x-2)^4}$

3) a- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère.

b- Tracer (C)

4) Soit (C ') l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe Δ : y = 1

Définir la fonction g dont la représentation est (C ')

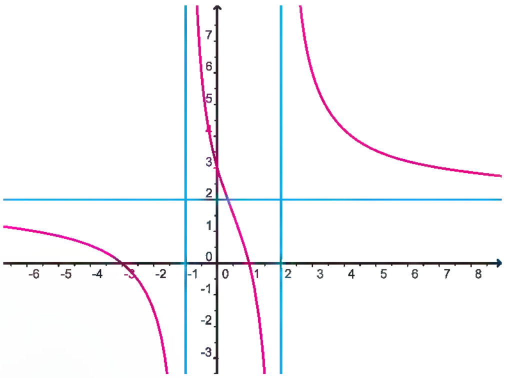
Activité 30

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + b'x + c'}$$

1) Déterminer les réels a , b , c , b' et c'.

2) Dresser le tableau de variation de f en utilisant sa courbe.



FONCTIONS DE TYPE $x \mapsto \sqrt{ax+b}$

Activité 31

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{3x+1}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que : $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{3}\right)^+} \left[\frac{f(x)}{x + \frac{1}{3}}\right] = +\infty$ Interpréter graphiquement ce résultat.

2) a- Montrer que f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$ et que pour tout $x > -\frac{1}{3}$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

b- Dresser le tableau de variation de f.

3) a- Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

On interprète ce résultat en disant que :

(C) admet au voisinage de +∞ une branche parabolique de direction celle de $\left(O, \vec{i}\right)$

b- Tracer (C).

Activité 32

On se propose de résoudre graphiquement dans $[0, +\infty[$, l'équation (E) : $x^6 - x - 1 = 0$

1) Vérifier que l'équation (E) est équivalente à : $x^3 = \sqrt{x+1}$

2) a) Etudier les varations de chacune des fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par :

$f(x) = x^3$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

b) Tracer les courbes représentatives de f et g dans un même répère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3) Placer les points de (C_f) d'abscisses 1, 2 et 1, 25. En déduire une valeur approchée de la solution dans $[0, +\infty[$, de l'équation (E).

Branches paraboliques

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ On dit que (C) admet au voisinage de + ∞, une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées .

• Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ On dit que (C) admet au voisinage de - ∞, une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées .

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ On interprète ce résultat en disant que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{i}\right)$

• Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ On interprète ce résultat en disant que (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{i}\right)$

Asymptotes verticales

On dit que la droite Δ d'équation x = a est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f dans l'un des quatre cas suivants :

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

Asymptotes horizontales

On dit que la droite Δ d'équation y = b est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ (respectivement de - ∞) lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$)

Résumé

Asymptotes obliques

On dit que la droite Δ : $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe représentative d'une fonction f au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$) lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-(ax+b)=0$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)-(ax+b)=0$)

Axe de symétrie

Le plan étant muni d'un repère **orthogonal**, la droite Δ d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C) d'équation $y = f(x)$ si, et seulement si, pour tout x de D_f, $2a - x$ appartient à D_f et $f(2a - x) = f(x)$.

Centre de symétrie

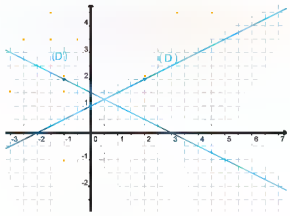
Le plan étant muni d'un repère quelconque, le point I(a , b) est un centre de symétrie de la courbe (C) d'équation $y = f(x)$ si, et seulement si, pour tout x de D_f, : $2a - x$ appartient à D_f et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

Point d'inflexion

Soit a un réel et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert de centre a.
Si f'' s'annule en changeant de signe en a alors le point I(a , f(a)) est un point d'inflexion de la courbe de f

01 1) Déterminer par lecture graphique une équation cartésienne de chacune des droites (AB) et (CD).

2) Calculer les coordonnéesde leur point d'intersection I.



02 Sur une droite D graduée, on considère les points A et B d'abscisses respectives 0 et 3.

A tout point M de D d'abscisse $x \in \mathbb{R}$, on associe la quantité $f(x) = MA + 2MB$.

1) Calculer $f(2)$, $f(4)$ et $f(-1)$.

2) Etablir que, pour tout réel x,
$f(x)=|x|+2|x-3|$

3) Montrer que f est une fonction affine par intervalles.

4) a- Représenter graphiquement f.

b- Déterminer graphiquement les points M de D tels que $MA + 2MB = 9$.

03 On considère la famille de fonctions f_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_m(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 1-3m$

Où m est un paramètre réel. Soit (C_m) la courbe représentative de f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé .

a) Montrer que les courbes (C_m) passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.

b) Etudier , selon les valeurs de m , le sens de variation de f_m .On fera un tableau de variation pour chaque cas.

c) Construire, sur un même graphique, les courbes C_1 et C_{-1}.

04 Etudier et représenter chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto -2x^2+3x+5$

2) $f : x \mapsto \left|-2x^2+4x\right|$

3) $f : x \mapsto x^2-3|x|+2$

4) $f : x \mapsto -\frac{1}{4}x^4+x^2$

5) $f : x \mapsto 9x^4-8x^2-1$

6) $f : x \mapsto \left|x^2-4\right|\left(x^2+3\right)$

7) $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$

8) $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$

9) $f : x \mapsto \begin{cases} f(x)=-3x^4+4x^2 & \text{si } x\leq -1 \\ f(x)=2x^2+x & \text{si } -1<x\leq 2 \\ f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+\frac{16}{3} & \text{si } x>2 \end{cases}$

10) $f : x \mapsto \frac{(2x+1)^2}{x-3}$

11) $f : x \mapsto 2x-\frac{2}{|x-1|}$

12) $f : x \mapsto \frac{x^2-3x-4}{(x-2)^2}$

13) $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2-4}$

14) $f : x \mapsto \frac{2}{x^2-5x+4}$

15) $f : x \mapsto \frac{-x^2+|x|}{x^2-x+1}$

05 d'après « Omar El Khayam »

a, b et c étant trois réels, soit la fonction f à variable réelle définie par :

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer a, b et c sachant que :

- f admet un extremum en 1.
- f admet un extremum en -1.
- La tangente à (C) au point d'abscisse 0 passe par A(2, -4).

2) Soit g la fonction définie par :

$g(x) = x^3 - 3x + 2$.

a- Dresser le tableau de variation de g.

b- Donner les extrema de g en précisant leur nature.

c- Tracer la courbe représentative de g dans le repère $(O,\vec{i},$

3) Soit la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = g(x) & \text{si } x > 0 \\ h(x) = \dfrac{x+2}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a- Déterminer D_h.

b- Montrer que h est continue sur son domaine de définition.

c- Etudier la dérivabilité de h au point O. Interpréter graphiquement ce résultat.

d- Dresser le tableau de variation de h.

e- Tracer la courbe de h.

06 f est la fonction définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 - x + \dfrac{1}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a- Prouver que (C) admet une asymptote Δ d'équation $y = 1 - x$

b- Préciser la position de (C) par rapport à Δ.

2) a- Etudier les variations de f et tracer Δ et (C).

b- Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

3) La droite d'équation $y = m$ coupe (C) en deux points distincts M_1 et M_2 d'abscisses respectives x_1 et x_2. On note H_1 et H_2 les points de l'axe des abscisses ayant respectivement la même abscisse x_1 et x_2 que M_1 et M_2.

a- Prouver que x_1 et x_2 sont solutions de l'équation : $x^2 - (1 - m)x - 1 = 0$.

b- Vérifier que :

$H_1H_2^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2$

et déduire $H_1H_2^2$ en fonction de m.

4) On note Γ_m le cercle de diamètre $[H_1H_2]$.

a- Vérifier que son centre a pour abscisse $\dfrac{1-m}{2}$ et que son rayon r est tel que :

$$r^2 = 1 + \frac{(1-m)^2}{4}.$$

b- En déduire que : $x^2 + y^2 - (1- m)x - 1 = 0$ est une équation de Γ_m.

5) Construire le cercle Γ_m pour m = 1, m = 2 et m = 3. Que remarque-t-on ? Le prouver.

07 On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x(x-1)}{2x-1}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a- Etudier les variations de f.

b- Montrer que la droite d'équation

$y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C).

c- Montrer que $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de (C).

d- Tracer (C).

2) Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{2\left(x^2 - |x|\right)}{2|x| - 1}$$ et (C') sa courbe

représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Tracer (C') à l'aide de (C) en justifiant.

3) Soit D_m une droite de coefficient directeur m et passant par $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. ($m \in \mathbb{R}$)

a- Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de (C) et D_m.

b- Utiliser le graphique pour discuter suivant les valeurs de m, le nombre de racines dans $[0,\pi]$ de l'équation :

$4(m-1)\sin^2\theta + 4(m-1)\cos\theta - 5m + 4 = 0.$

08 Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^3 - 3x + \dfrac{3}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1°) Déterminer D_f.

2°) Etudier la continuité de f en 0.

3°) Déterminer trois réels a, b et c tels que : pour $x < 0$ on a : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$.

En déduire que la droite D : $y = x + 1$ est une asymptote à (C_f).

4) Montrer que (C_f) admet au point $A\left(0, \frac{3}{2}\right)$ deux demi tangentes dont-on déterminera les équations.

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Tracer (C_f).

7) Discuter suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

8) Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = -x^3 + 3x + \dfrac{3}{2} & \text{si } x < 0 \\ g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a- Comparer $f(-x)$ et $g(x)$.

b- En déduire une application simple qui transforme (C_f) en (C_g).

c- Tracer (C_g) dans le même repère.

09 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1. a) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x : $f(x) = ax + \frac{bx}{x^2 + 3}$

b) Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

2. Soit f ' la dérivée de f.

a) Montrer que $f'(x) = \frac{\left(1-x^2\right)\left(x^2+15\right)}{\left(x^2+3\right)^2}$

b) Etudier les variations de f.

3. Préciser une équation de la tangente T à la courbe C à l'origine.

4. Soit D la droite d'équation y = - x.

a) Etudier la position de C relativement à la droite D.

b) Montrer que, pour tout x non nul :

$$f(x) + x = \frac{8}{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}.$$

En déduire la limite de f (x) + x quand x tend vers + ∞ . Que peut-on en conclure pour la courbe C ?

5. Tracer D, T et C sur un même graphique. (On précisera les points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses)

10 Soit f la fonction numérique définie pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 3$ par : $f(x) = \dfrac{4x^2 - 8x}{x^2 - 2x - 3}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité 1 cm).

1) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 3$, on ait :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}$$

2) Etudier les limites de f.

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Calculer pour tout a (différent de 2 et-2) f(1+ a) et f(1 – a) . Que peut-on en conclure ?

5) a) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 5.

b) Vérifier que pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 3$ on a : $f(x) - \dfrac{25 - 2x}{3} = \dfrac{(x-5)^2(2x+3)}{3(x^2-2x-3)}$

c) Déduisez-en les coordonnées des points d'intersection de (T) et (C) et la position de (C) par rapport à (T).

6) Construire (T) et (C).

Chapitre 6

Fonctions circulaires

INTRODUCTION

Activité 1

Nous avons établi que T=2 π est la période de la fonction sinus

1) Donner Trois intervalles de $\mathbb{R}$ pouvant être domaine d'étude de la fonction sinus.
2) Même question pour la fonction cosinus.

Activité 2

1) Montrer que la fonction cosinus est paire et qu'on peut réduire le domaine d'étude à $[0, \pi]$.
2) Montrer que la fonction sinus est impaire et qu'on peut réduire le domaine d'étude à $[0, \pi]$.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points M(x , sinx) et M'(x+2π , sinx).

1) a) Vérifier que M et M' sont des points de la courbe S de la fonction sinus.

b) Monter que $\overrightarrow{MM'} = 2\pi \; \vec{i}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

2) Quel lien déduit-on entre la partie de S correspondant à $[a, a + 2\pi]$ et celle correspondant à $[a - 2\pi , a]$? (où a est un réel quelconque).

Activité 4

Faire le même travail que l'activité précédente pour la fonction cosinus et sa courbe C dans le plan muni du repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 5

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$

Recopier et completer :

1) la fonction $u : x \longmapsto \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = \ldots\ldots\ldots$

2) la fonction $v : x \longmapsto \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = \ldots\ldots\ldots$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Sinx}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Activité 6

Calculer :

a) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{Sinwt}{t}$, $(w \in \mathbb{R}^*)$

b) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{Sin\alpha t}{Sin\beta t}$ (α et β deux réels non nuls).

c) $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{Cost}{t - \frac{\pi}{2}}$

Activité 7

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- $f : t \longmapsto \sin(wt + \varphi)$; $w \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
- $g : t \longmapsto \cos(wt + \varphi)$; $w \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
- $h : x \longmapsto \cos[\frac{1}{2}(\pi - 3x)]$.
- $k : x \longmapsto \sin(2x-1)$.
- $u : x \longmapsto 2\sin 3x$.
- $v : x \longmapsto \frac{1}{3}\cos 3x$.

ETUDE DE LA FONCTION SINUS

Activité 8

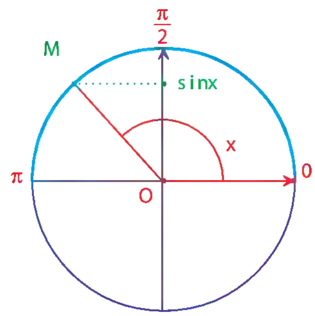
On considère la fonction $u:[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ et on désigne par S sa courbe représentative

$x \longmapsto \sin x$

dans Le plan rapporté à un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) En utilisant le cercle trigonométrique, recopier et compléter le tableau de signe suivant :

x	0		π
Sinx	0		0



2) Utiliser le résultat ci-dessus pour dresser le tableau de variation de la fonction u.

3) a) Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe S au point $K(\frac{\pi}{2}, 1)$

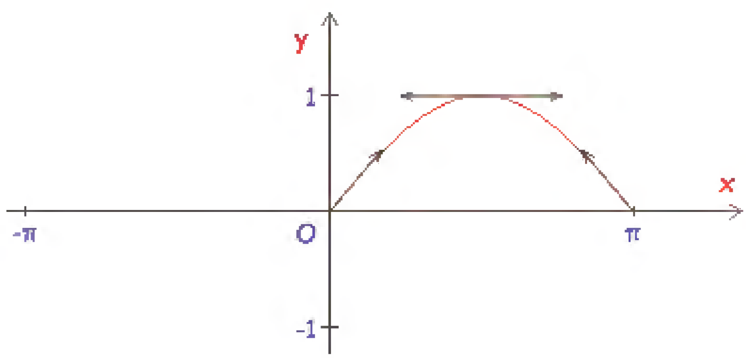
Qu'en déduit-on ?

b) Montrer que $\Delta_1 : y = x$ est la tangente à S en O.

Montrer que $\Delta_2 : y = -x$ est la tangente à (S) en $L(\pi, 0)$

Activité 9

1) Reproduire la représentation graphique ci-contre de la fonction sinus sur $[0, \pi]$ et la compléter sur $[-\pi, \pi]$ sans faire une autre étude.



2) Refaire dans un nouveau repaire la représentation graphique de la fonction sinus sur $[-3\pi, 3\pi]$

3) Sans faire de calcul donner une équation cartésienne de la tangente à C en chacun des points ayant pour abscisse :

3π, $\frac{7\pi}{2}$ et -2π.

Une courbe d'équation : $y=b \sin(ax+ c)$ avec $ab \neq 0$ s'appelle une sinusoïde

ETUDE DE LA FONCTION COSINUS

Activité 10

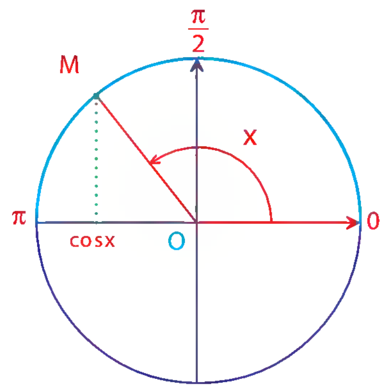
On considère la fonction $v : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ et on désigne par C sa courbe représentative

$$x \longmapsto \cos x$$

dans Le plan rapporté à un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) En utilisant le cercle trigonométrique, recopier et compléter le tableau de signe suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cosx		0	

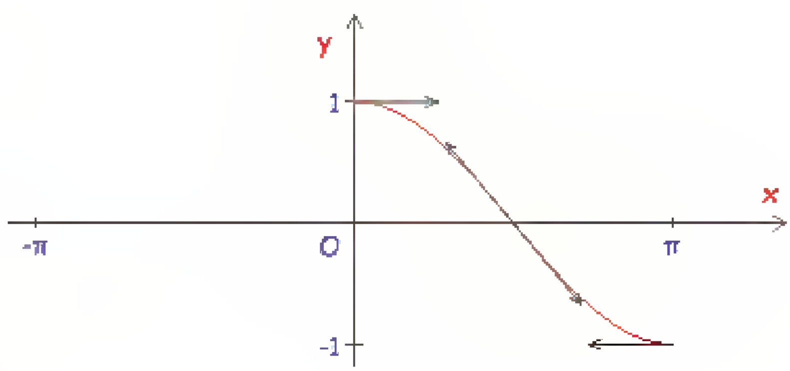


2) Dresser alors le tableau de variation de la fonction v

3) Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe C en O, au point R d'abscisse π et au point T d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

Activité 11

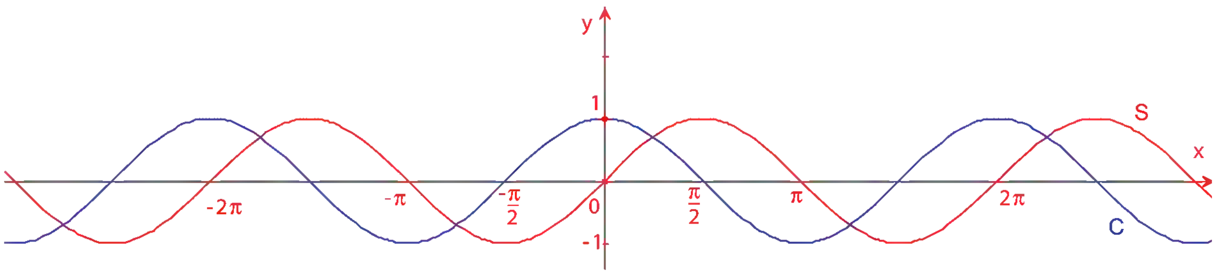
On vous donne la représentation graphique de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$ La reproduire et la compléter d'abord sur $[-\pi, \pi]$ puis sur $[-3\pi, 3\pi]$.



Activité 12

On présente ci-dessous les deux courbes C et S dans le même repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit t la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\,\vec{i}$



a) Soit M (x, cosx) un point de C ; déterminer son image M' par t et montrer que M' est un point de S.

b) Soit N (x , sinx) un point de S ; montrer que N est l'image par t d'un point de C.

c) Conclure.

ETUDE DE FONCTIONS DE TYPE : $x \mapsto \cos(ax+b)$ ou : $x \mapsto \sin(ax+b)$

Activité 13

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{Sin}(2x - \frac{\pi}{6})$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Déterminer la période de g et en déduire son domaine d'étude D

b) Calculer g'(x) pour tout $x \in D$

2) a) Montrer l'équivalence suivante : $\begin{cases} \mathrm{Cos}(2x - \frac{\pi}{6}) = 0 \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\}$

b) Dresser le tableau de variation de g sur $[0, \pi]$.

3) a) Tracer la partie (C_0) de (C), correspondante au domaine D.

b) En déduire la construction de (C) en précisant les étapes de cette construction

Activité 14

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{Cos}(-\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3})$ et (H) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Déterminer la période de h et en déduire un domaine d'étude D.

b) Calculer h'(x) sur D.

2) a) Montrer l'équivalence suivante : $\begin{cases} \mathrm{Sin}(-\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}) = 0 \\ x \in [0, 3\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{2}, 2\pi\}$

b) Dresser le tableau de variation de h sur $[0,3\pi]$.

3) a) Tracer la partie (H_0) de (H), correspondante au domaine D.

b) En déduire la construction de H en précisant les étapes de cette construction

Activité 15

1) Soit $f : t \longmapsto \sin(-t + \frac{2\pi}{3})$

Etudier f et tracer sa courbe représentative sur $[-2\pi, 2\pi]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Dans chacun des cas suivants, étudier f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) $f : x \longmapsto \cos(-2x - \frac{\pi}{3})$

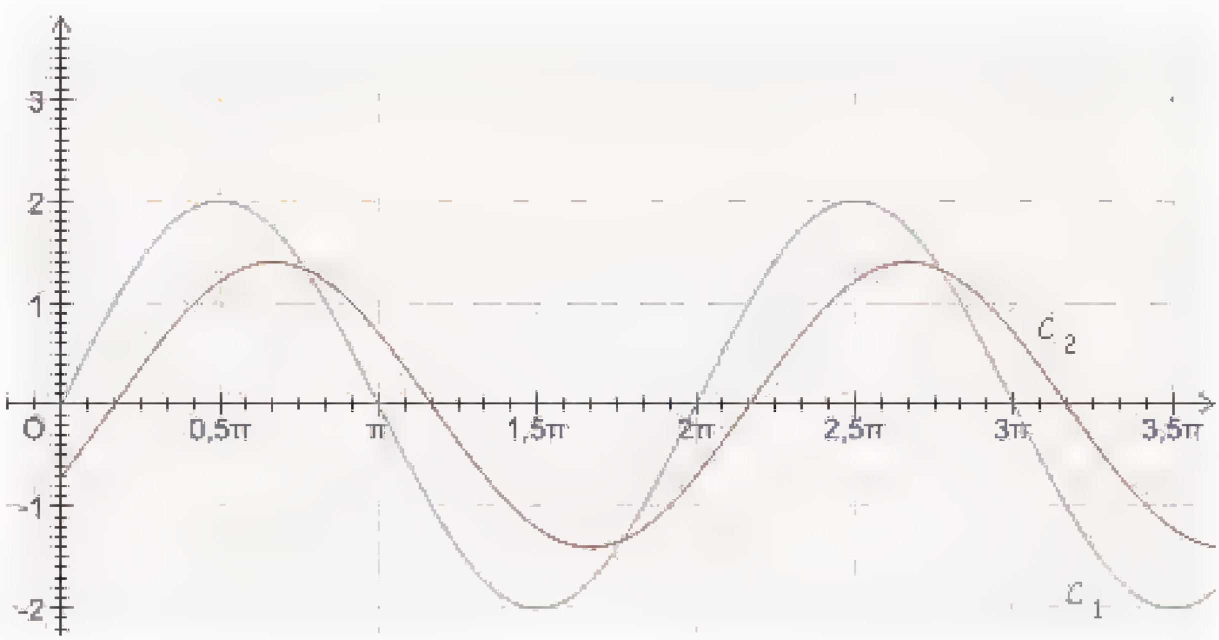
b) $f : x \longmapsto \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$

c) $f : x \longmapsto \cos 3x$

Activité 16

Sur le graphique ci – dessous sont tracées les courbes C_1 et C_2 représentatives de deux tensions $U_1(\theta)$ et $U_2(\theta)$ définies sur $[0,+\infty[$ et dont les expressions sont de la forme :
$U(\theta) = a \sin(\theta + \varphi)$ où $a \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$

Déterminer, pour chacune des tensions, a et φ par lecture graphique.



01 Soit $f : t \longmapsto \sin(wt + \varphi)$ où $w \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1) Déterminer les réels w et φ pour que la période de f soit égale à π et que $f(0) = \frac{1}{2}$.

2) Etudier la fonction f obtenue et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

02 On considère la fonction

$g : x \longmapsto 2\mathrm{Cos}^2 x - 1$

1) Trouver deux réels a et b tels que pour tout réel x, $g(x) = \sin(ax+b)$.

2) Etudier alors g et tracer sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

➢Dans chacun des exercices de 3 à 8 Etudier les variations de la fonction f et construire sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

03 $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$

04 $f(x) = \sin(-2x)$

05 $f(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$

06 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

07 $f(x) = \cos(3x - \frac{3\pi}{4})$

08 $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$

09 1) Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C d'équation $y = \sin x$

2) Montrer que la courbe C' d'équation $y = \sin(x + \frac{2\pi}{3})$ se déduit de C par une translation que l'on précisera

3) Construire C' dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

10 La courbe C_1 d'équation $y = \cos x$ étant tracée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Tracer dans ce repère la courbe d'équation $y = |\cos x|$.

11 Soit $h : x \longmapsto \cos x + |\cos x|$. Construire la courbe représentative de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

12 1) Etudier la fonction $f : x \longmapsto 2\sin 2x$ et construire sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé

2) En déduire la courbe représentative de la fonction $g : x \longmapsto 2\sin 2x - 1$

13 On donne la fonction

$$g : [0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a\sin 2x + b(1 + \cos 2x)$$

1) Déterminer les réels a et b sachant que f admet un extremum au point $x_0 = \frac{5\pi}{12}$ et $g(0) = 2\sqrt{3}$.

2) a) Montrer que l'on a alors pour tout x de $[0,\pi]$, $g(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}$

b) Etudier les variations de g.

3) Soit la fonction

$$h : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1 + \mathrm{Cos}\,2x}{\sqrt{3} + 2\mathrm{Cos}(2x + \frac{\pi}{6})}$$

Déterminer le domaine de définition de h

14 On dit qu'un mobile a un mouvement vibratoire simple lorsqu'il est animé d'un mouvement rectiligne dont la loi horaire est définie par $x(t) = a.\cos(wt+\varphi)$ où
a, w et φ sont des réels avec $w \neq 0$.
La représentation graphique de la fonction : $t \longmapsto x(t)$ est appelée diagramme des espaces celle de la fonction : $t \longmapsto x'(t)$ est appelée diagramme des vitesses et celle de la fonction $t \longmapsto x''(t)$ est appelée diagramme des accélérations.

1) La loi horaire d'un mouvement rectiligne est définie par :
$x(t) = 2\cos\left(-t + \frac{\pi}{3}\right)$
Construire le diagramme des espaces de ce mouvement.

2) La loi horaire d'un mouvement rectiligne est définie par :
$z(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$
a) Montrer qu'il s'agit d'un mouvement vibratoire simple .
b) Construire le diagramme des espaces, des vitesses et des accélérations de ce mouvement.

Chapitre 7

Suites réelles

INTRODUCTION

Activité 1

Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites suivantes:

a) (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = 2^n - 1$.

b) (V_n) définie par : $\begin{cases} V_0 = -2 \\ V_{n+1} = 2V_n + 5 \quad \textit{pour } n \geq 0 \end{cases}$.

c) (W_n) définie par : $\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_n = \dfrac{2W_{n-1} + 1}{W_{n-1} + 1} \quad \textit{pour } n \geq 1 \end{cases}$

d) (t_n) définie par : $t_n = \dfrac{3n^2 - 2}{n}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Une suite peut être définie :

- Par une formule explicite (terme général)
- Par récurrence : Par la donnée du premier terme et d'une relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction

Activité 2

Dire dans chacun des cas suivants si la suite proposée est finie ou infinie :

a) (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \sqrt{n^2 + 1}$.

b) (V_n) définie par : $V_n = (-1)^n$; $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) (S_n) définie par : $S_n = (-1)^n$; $n \in \mathbb{N}$

d) (T_n) définie par : $T_n = \dfrac{1}{n}$; $n \in \{1, 2, 3\}$

Activité 3

On considère la suite W définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = E(\dfrac{3}{n})$. (E désigne la partie entière)

a) Calculer les quatre premiers termes de W.

b) Calculer W_n pour $n \geq 4$

SUITES ARITHMÉTIQUES

Activité 4

Parmi les suites définies ci-après, quelles sont celles qui sont des suites arithmétiques ?

a) $U_n = 3n + 2$; $n \in \mathbb{N}$

b) $U_n = n^2$; $n \in \mathbb{N}$.

c) $\begin{cases} U_0 = \sqrt{2} \\ U_{n+1} = U_n + n \end{cases}$ pour $n \geq 0$

d) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n - 2 \end{cases}$ pour $n \geq 0$

e) $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_n = U_{n-1} + 3 \end{cases}$ pour $n \geq 1$

f) $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = 2U_n + 5 \end{cases}$ pour $n \geq 0$

Définition

Soit n_0 un entier naturel, $I = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \}$ et U une suite définie sur I .
On dit que U est une suite arithmétique si, et seulement si, il existe un réel r tel que $U_{n+1} = U_n + r$ pour tout entier $n \in I$.
r est appelé la raison de la suite arithmétique

Activité 5

1) Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r
Rappeler l'expression de U_n en fonction de U_0 et r

2) Soit (U_n) la suite arithmétique définie sur IN , telle que $U_3 = 13$ et $U_8 = -7$
Déterminer la raison r et le premier terme U_0 de la suite (U_n)

Activité 6

a et b étant deux réels donnés

On considère la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = an + b$ (suite affine)

Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison

Théorème

(U_n) est une suite arithmétique si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $U_n = an + b$

Activité 7

Calculer les sommes suivantes :

a) $S_1 = 1 + 2 + \cdots + n, \quad n \in \mathbb{N}$

b) $S_2 = 3 + 7 + 11 + \cdots + 99 + 103$

c) $S_3 = \sum_{k=0}^{21} (2k - 3)$

La somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$S = \boxed{\text{nombre de termes}} \times \dfrac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$

Activité 8

Soit (Un) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.

On note Calculer : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

1) r et S_n lorsque : $n = 21$, $U_0 = 4$ et $U_n = 67$.
2) U_0 et U_n lorsque: $n = 15$, $r = -2$ et $S_n = -192$.
3) U_0 et S_n lorsque: $n = 10$, $U_n = 19$ et $r = 2$.

La somme $U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ est notée $\sum_{k=0}^{n} U_k$

(lire : somme des U_k, k allant de 0 à n)

Activité 9

Ali est entrain de lire un livre. (qui commence à la page 1)

En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 276

En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 805

1) A quelle page en est Ali ?

2) Combien de pages comporte ce livre ?

Activité 10

Les marches d'un escalier ont une hauteur de 18cm, la première marche est située à 7 cm au dessus du sol.

1) On note h_n la hauteur séparant le sol et la marche numéro n.

Montrer que (h_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

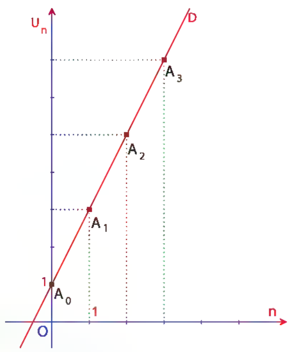
2) Pour atteindre son appartement, Ghassen doit monter 100 marches, a quelle hauteur se situe son appartement?

Activité 11

Exprimer en fonction de n, la somme des n premiers nombres entiers pairs
Comparer le résultat à la somme des n premiers nombres entiers. Expliquer

Activité 12

Dans le graphique ci contre, D est la droite contenant les points A_n (n,U_n) où (U_n) est une suite.
Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.



SUITES GÉOMÉTRIQUES

Activité 13

Parmi les suites définies ci-après, quelles sont celles qui sont des suites géométriques ?

a) $U_n = 3^n$; $n \in \mathbb{N}$

b) $U_n = n^2$; $n \in \mathbb{N}$

c) $U_n = \dfrac{3}{2^n}$

d) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n \end{cases}$ pour $n \geq 0$

e) $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = 2U_n + 5 \end{cases}$ pour $n \geq 0$

Définition

Soit n_0 un entier naturel, $I = \{ n \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \}$ et U une suite définie sur I .
On dit que U est une suite géométrique si, et seulement si, il existe un réel q tel que $U_{n+1} = qU_n$ pour tout entier n de I.
q est appelé la raison de la suite géométrique

Activité 14

1) Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison q.
Rappeler l'expression de U_n en fonction de U_0 et q.

2) Soit (U_n) la suite géométrique définie sur IN , telle que $U_3 = 3$ et $U_6 = 24$.
Déterminer la raison q de la suite (U_n).

Activité 15

Soit U la suite définie sur IN par $U_n = a^n b$, où a et b sont deux réels non nuls.
Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

Théorème

(U_n) est une suite géométrique si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que :
$U_n = a^n b$

Evidemment, a est la raison de la suite géométrique (Un)

Activité 16

Calculer les sommes suivantes :

a) $S_1 = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$; $x \in \mathbb{R}$

b) $S_2 = 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots + 10^{-n}$; $n \in \mathbb{N}$.

c) $S_3 = \sum_{k=1}^{5} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k$

d) $S_4 = \sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - \cdots - 32 + 32\sqrt{2}$

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q $(q \neq 1)$ est :

$$S = \boxed{\text{premier terme}} \; \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Activité 17

Un ruban de papier de 0,1 mm d'épaisseur ; on le plie
en deux, puis encore en deux et ainsi de suite. En effectuant ainsi 8 pliages.
Quelle est l'épaisseur (en mètres) du ruban obtenu ?

Activité 18

Pour creuser un puits, un agriculteur fait un appel d'offre à deux sociétés de forage
La première propose le contrat suivant :

- 15 dinars pour le premier mètre,
- 20 dinars pour le deuxième mètre et chaque mètre supplémentaire coûte 5 dinars de plus que le précédent

La deuxième propose :

- 10 dinars pour le premier mètre,
- chaque mètre supplémentaire coûte 10% de plus que le précédent.

1) Exprimer, en fonction de n, les coûts C_n et C'_n du forage d'un puits profond de n mètres par chacune des sociétés

2) a) Quel est le contrat le plus avantageux (pour l'agriculteur) si la profondeur de puits atteint 20 mètres ?

b) Même question si la profondeur de puits atteint 50 mètres ?

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Activité 19

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 4 \end{cases}$

On se propose de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < 6$

la propriété « $U_n < 6$ » qui dépend de n est notée P_n

1) Enoncer la propriété P_0 . est-elle vraie ?

2) a) Enoncer la propriété P_{n+1}

b) Montrer que si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie

3) Conclure

LE PRINCIPE

Soit n_0 un entier naturel donné.

Pour démontrer par récurrence q'une propriété P_n relative à un entier naturel n est vraie pour tout $n \geq n_0$ on doit :

- Démontrer que la propriété est vraie pour n_0 (initialisation)
- Démontrer que si la propriété est vraie pour un rang $n \geq n_0$ alors elle reste vraie pour le rang suivant (n+1) (la propriété est héréditaire)

Remarque :

On peut illustrer le principe de raisonnement par récurrence à l'aide de l'image d'une échelle :

Si l'on peut

- se placer sur le premier barreau de l'échelle

  et

- passer d'un barreau quelconque à son suivant

Alors on peut gravir tous les barreaux de cette échelle

Activité 20

1) Soit (U_n) une suite arithmétique définie sur IN, de raison r et de premier terme U_0 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 + nr$.

2) Soit (U_n) une suite géométrique définie sur IN, de raison r et de premier terme U_0 ; Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = q^n U_0$.

Activité 21

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n} \end{cases}$

a) Calculer U_2, U_3 et U_4.

b) Conjecturer une expression de U_n en fonction de n, pour tout $n \geq 1$ et la montrer par récurrence.

Activité 22

Montrer par récurrence les propositions suivantes:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b) $9^n - 1$ est un multiple de 8, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Activité 23 étape indispensable

On considère la propriété Q_n : « $4^n + 1$ est un multiple de 3 »

a) Vérifier que : $4^{n+1} + 1 = 3.4^n + 4^n + 1$

b) En déduire que la propriété Q_n a un caractère héréditaire.

c) Peut-on conclure que Q_n est vraie pour tout entier naturel n ?

Avec L'image de l'échelle :
Il est indispensable de pouvoir mettre le pied sur le premier barreau

Activité 24

Le but de cette activité est d'établir une formule explicite donnant la somme S_n des n premiers entiers naturels impairs :

$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1)$

Avec EXCEL :

a) Générer dans la colonne A, la suite des premiers entiers naturels impairs.

b) Générer dans la colonne B, la somme des n premiers entiers naturels impairs. (Utilisez la fonction "somme")

c) Quelle conjecture peut-on faire ? La démontrer.

SOMME =SOMME($A$1:A1)

	A	B	C	D
1	1	=SOMME($A$1:A1)		
2	3			
3	5			
4	7			
5	9			
6	11			
7	13			
8	15			
9	17			
10	19			
11	21			

SUITES MONOTONES

Définition

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $I = \{ n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0 \}$ et (U_n) une suite définie sur I . On dit que :

- La suite (U_n) est croissante (respectivement strictement croissante) sur I si, et seulement si, pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \geq U_n$ (respectivement $U_{n+1} > U_n$).
- La suite (U_n) est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I si, et seulement si, pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \leq U_n$ (respectivement $U_{n+1} < U_n$).
- La suite (U_n) est une suite constante sur I si et seulement si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} = U_n$
- La suite (U_n) est dite stationnaire si tous les termes sont égaux à partir d'un certain rang p de I.
- Une suite croissante ou décroissante est dite monotone

Remarque :

Les termes d'une suite monotone sur IN sont rangés comme suit :

- $U_0 \leq U_1 \leq \cdots \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \cdots$ pour une suite croissante.
- $U_0 \geq U_1 \geq \cdots \geq U_n \geq U_{n+1} \geq \cdots$ pour une suite décroissante.

Activité 25

1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

Etudier sa monotonie, selon le signe de r.

2) Soit V la suite définie par : $V_n = a^n$. Etudier, suivant les valeurs de a, la monotonie de V

Activité 26

1) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \dfrac{n}{2^n}$.

Calculer $U_{n+1} - U_n$. En déduire le sens de variation de U.

2) Retrouver le résultat précédant en utilisant le rapport $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$

Activité 27

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 1} \end{cases}$.

Montrer par récurrence que U est croissante

Activité 28

Soit U la suite définie par : $U_n = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$.

En étudiant les variations de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ déduire le sens de variation de U.

Point méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite On peut :

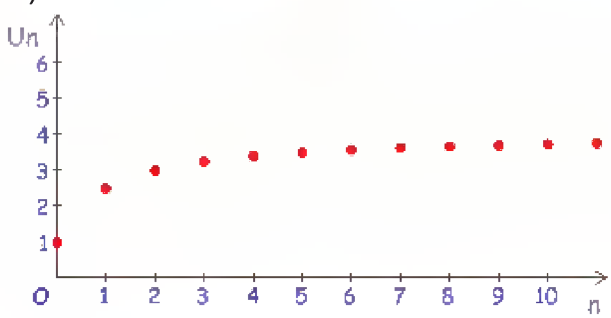
1. Etudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$
2. Comparer $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1, dans le cas où tous les termes sont non nuls et de même signe
3. Utiliser le raisonnement par récurrence.
4. S'il existe une fonction f telle que, $U_n = f(n)$, étudier les variations de f.

LIMITE D'UNE SUITE

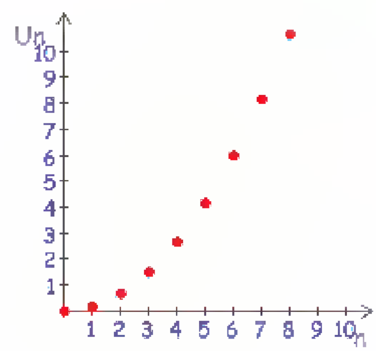
Activité 29

Les graphiques suivantes représentent des suites réelles. Indiquer celles dont les termes généraux se rapprochent d'un nombre fini lorsque n augmente

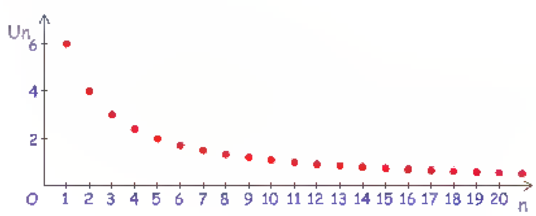
a)



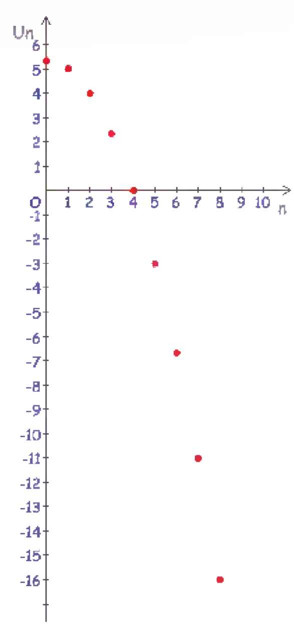
b)



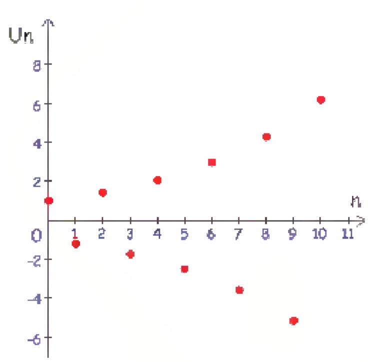
c)



d)



e)



Activité 30

Soit les suites U et V définies par : $U_n = n^2$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $V_n = \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	10	10^3	10^6	10^{10}
$U_n = n^2$				
$V_n = \frac{1}{n}$				

b) Que peut-on dire de U_n et V_n, lorsque n devient de plus en plus grand?

Commentaires : Comme pour les fonctions

On remarque que la suite U tend vers $+\infty$, quand n tend vers $+\infty$ et on note :

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

Pour la suite V, on dit qu'elle tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

Définition

Une suite qui admet une limite finie ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) , est dite convergente .
Dans le cas contraire elle est dite divergente

Une suite est divergente si :
-elle tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$
Ou
- elle n'admet pas de limite

Remarque : On parle de la limite d'une suite seulement lorsque n tend vers $+\infty$

Théorèmes sur les Limites

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a , +\infty[$ et (U_n) la suite définie par : $U_n = f(n)$.

Si f a pour limite ℓ en $+\infty$, alors (U_n) a pour limite ℓ .

En particulier :

. Les suites de termes généraux $\frac{a}{\sqrt{n}}$ et $\frac{a}{n^p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$) convergent vers 0

. Les suites de termes généraux $\sqrt{n}$, n^2 et n^p ($p \in \mathbb{N}$) ont pour limite $+\infty$

Activité 31

Calculer les limites éventuelles des suites de termes généraux suivants :

$U_n = \frac{4n+1}{n+1}$; $V_n = \frac{n^2 - 1}{2n+3}$; $W_n = 1 - 3n$; $t_n = (-3)^n$

Remarque :

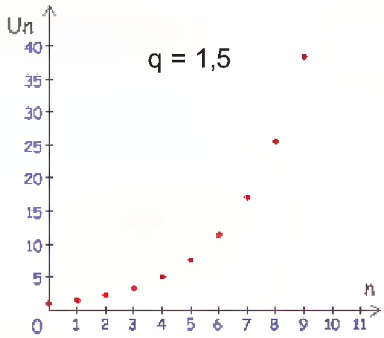
Les théorèmes sur la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient énoncés pour les fonctions restent valables pour les suites réelles

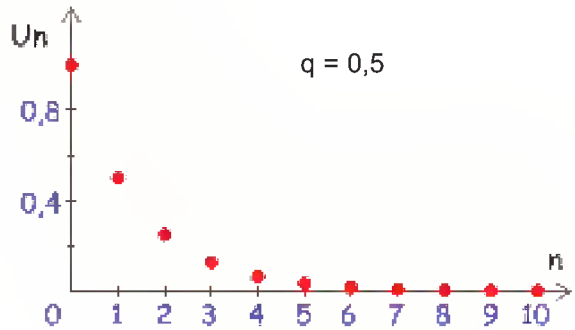
Limite d'une suite géométrique :

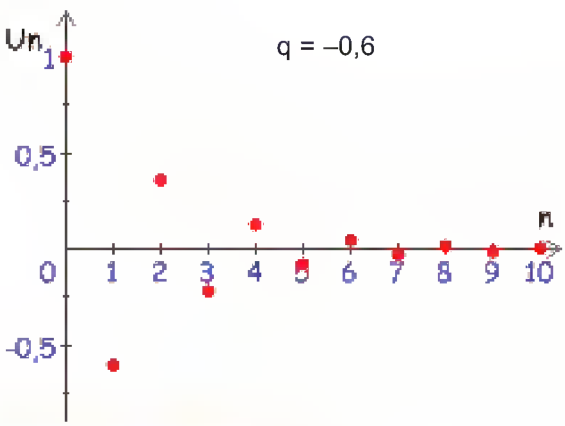
Activité 32

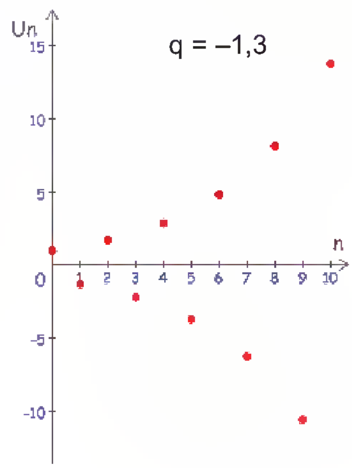
On considère les représentations graphiques de la suite U définie sur IN par : $U_n = q^n$.

Conjecturer la limite de U dans chacun des cas suivants :









Activité 33 (A l'aide de la calculatrice)

a) Reproduire Compléter le tableau suivant :

U_n \ n	3	10	25	40
$\left(\frac{1}{2}\right)^n$				
$(1,3)^n$				
$(-2)^n$				

b) Dans chaque cas, conjecturer la limite éventuelle de la suite (Un)

Théorème (admis)

Soit q un réel non nul

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q < -1$, alors q^n n'admet pas de limite

Remarque :

Si $q = 1$, on a : $q^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$

Activité 34

Etudier la limite de la suite (U_n), dans chacun des cas suivants :

a) $U_n = 2 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$; b) $U_n = -3.2^n$; c) $U_n = \dfrac{1}{2 - 3^n}$; d) $U_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

Activité 35

On considère la suite (U_n) définie sur IN par: $U_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et on pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

Etudier les limites éventuelles des suites (U_n) et (S_n).

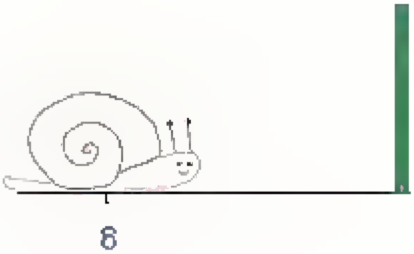
Activité 36

Un escargot est placé à 8 mètres d'un mur.

Sa position initiale est alors $d_0 = 8$.

Il se dirige vers le mur.

Dans la 1ere heure, il parcourt 4 mètres puis chaque heure la moitié de la distance parcourue à l'heure précédente.



On désigne par d_n la distance parcourue à la $n^{ème}$ heure

a) Montrer que $(d_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le 1er terme.

b) Montrer que cette suite converge vers 0

c) On désigne par S_n la distance parcourue par l'escargot après n heures

Calculer S_{24} puis $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Activité 37 Développement décimal périodique :

1) On considère un nombre r dont l'écriture dans le système décimal est r = 0,333…3...
et on pose $U_1 = 0{,}3$; $U_2 = 0{,}33$; … ; $U_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{\text{n chiffres 3}}$

a) Montrer que U_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique.

b) Déterminer la limite éventuelle de la suite (U_n).

c) En déduire une écriture fractionnaire de r.

2) Donner une écriture fractionnaire de a = 1, 272727……27…

SUITES DE TYPE : $U_{n+1} = aU_n + b$:

Activité 38

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + \frac{3}{5}$

1) Le plan étant muni d'un repère orthonormé. Construire les droites d'équations respectives $\Delta : y = x$ et $D : y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$.
En utilisant D et Δ représenter les 4 premiers termes de (U_n) sur l'axe des abscisses

2) On pose $V_n = U_n - 1$

a) Calculer V_n pour $n \in \{0, 1, 2\}$

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

c) Exprimer V_n en fonction de n.

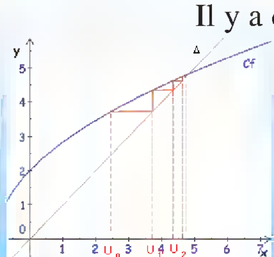
d) En déduire l'expression de Un en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Point méthode

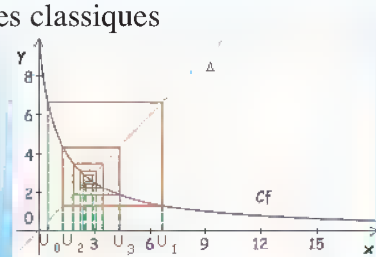
Pour représenter les termes d'une suite de type $U_{n+1} = f(U_n)$ sur l'axe des abscisses :

- Tracer la courbe de f ainsi que la droite Δ : y= x.
- Placer U_0 sur l'axe des abscisses.
- Construire $U_1 = f(U_0)$ sur l'axe des ordonnées.
- A l'aide de Δ , reporter U_1 sur l'axe des abscisses.
- Réitérer le procédé afin d'obtenir les termes U_2, U_3, U_4 …

Il y a deux allures classiques



L'escalier (f est croissante)



La spirale ou toile d'araignée (f est décroissante)

Activité 39

Soit (U_n) est la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 \end{cases}$

et (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = U_n - 3$

1) a) Représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite U

b) Conjecturer graphiquement $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

2) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

3) Exprimer V_n, puis U_n, en fonction de n.

4) Quelle est la limite éventuelle de (V_n). Déduire celle de (U_n).

5) Soit $S = V_0 + V_1 + \cdots + V_{99}$ et $S' = U_0 + U_1 + \cdots + U_{99}$

Calculer S et S'.

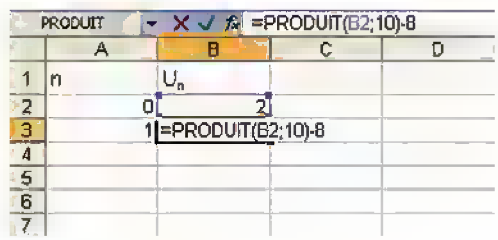
Activité 40

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 10U_n - 8 \end{cases}$

1) a) A l'aide d'un tableur, conjecturer une expression de U_n en fonction de n

b) Démontrer, par récurrence, cette Conjecture.

2) déterminer la limite de U



Activité 41

A son ouverture, le nombre initial des élèves d'un lycée est de 800. Il évolue ainsi :
Chaque année, 25% quittent le lycée et 140 élèves le joignent

On note e_n le nombre des élèves au bout de n années.

1) Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n .

2) On pose $U_n = e_n - 560$

a) Montrer que U est une suite géométrique.

b) Exprimer e_n en fonction de n .

c) Calculer e_{16} et e_{22}. Sur quelle valeur se stabilise le nombre des élèves

Activité 42 **Point méthode**

Soit a un réel différent de 1 et U une suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_{n+1} = aU_n + b \\ U_0 \text{ donné} \end{cases}$

On désigne par α la solution de l'équation $ax + b = x$

Montrer que la suite V, définie sur IN par : $V_n = U_n - \alpha$, est une suite géométrique

SUITES HOMOGRAPHIQUES:

Activité 43

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2+3U_n}{2+U_n} \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2 et déduire que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) a) Représenter dans un repère orthonormé les 4 premiers termes de U.

b) Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite U .

3) Pour démontrer la conjecture on considère la suite V définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que V est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de U_n

Activité 44

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2 - U_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \le U_n \le 1$

2) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4 Conjecturer une expression de U_n en fonction de n, pour tout $n \ge 0$ et la montrer par récurrence.

3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$

a) Montrer que V est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

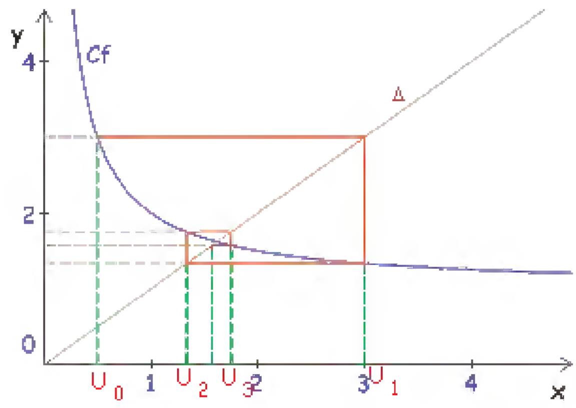
b) Exprimer U_n en fonction de n puis Calculer $\lim U_n$

Activité 45

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1+U_n}{U_n} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que la suite U est à termes strictement positifs.

2) On vous donne dans ce qui suit la représentation graphique sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1+x}{x}$ ainsi la demi droite Δ : $\begin{cases} y = x \\ x \ge 0 \end{cases}$ et la représentation graphique des premiers termes de U.



a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe de f et de Δ

b) Que peut-on dire de la monotonie de la suite U.

c) Peut-on induire (à partir de la représentation ci-dessus) la convergence de U et sa limite éventuelle

Activité 46

Reprenons la suite U définie dans l'activité précédente
Le but de cette activité est de conjecturer la convergence de la suite U et donner une valeur approchée de sa limite
A l'aide du tableur Excel, on a obtenu les résultats suivants:

n	U_n
0	0,5
1	3
2	1,3333333
3	1,75
4	1,57142857
⋮	⋮
16	1,61803353
17	1,61803416
18	1,61803392
19	1,61803401
20	1,61803398
21	1,61803399
22	1,61803399
23	1,61803399
25	1,61803399

Commentaires :

On peut conjecturer que U converge vers le réel $\Phi \approx 1{,}61803399$

Φ est le nombre d'or $\left(\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Résumé

• Suites arithmétiques - Suites géométriques

Le tableau suivant résume les principaux résultats concernant les suites arithmétiques et les suites géométriques

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Relation de récurrence	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = qU_n$
Formule explicite	$U_n = b + nr$	$U_n = b\,q^n \;,\; b \in \mathbb{R}$
Relations entre deux termes (p et n $\in \mathbb{N}$)	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = q^{n-p}\,U_p$
S = Somme de m termes consécutifs	$S = m \cdot \left(\dfrac{1^{\text{ér}}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$	$S = 1^{\text{ér}}\text{ terme}\left(\dfrac{1-q^m}{1-q}\right)\;;\; q \neq 1$
Somme particulière	$1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$1+a+a^2+\cdots+a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ $a \neq 1$
Comportement a l'infini	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ si $r > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ si $r < 0$	U est convergente vers 0, pour $-1 < q < 1$

• Raisonnement par récurrence

Soit n_0 un entier naturel fixé

Soit P_n une propriété relative à un entier naturel n et telle que :

(i) la propriété P est vraie pour n_0

(ii) Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à n_0, on a « si P est vraie pour l'entier p, elle est vraie pour l'entier p+1 »

La propriété P est alors vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0

• Monotonie d'une suite réelle

Soit n_0 un entier naturel et $I = \{ n \in \mathbb{N};\; n \geq n_0 \}$ et U une suite définie sur I .

- La suite U est strictement croissante sur I si et seulement si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} > U_n$
- La suite U est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} < U_n$
- La suite U est une suite constante sur I si et seulement si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} = U_n$

01 **Suite de Lamé**

La suite de Lamé est construite comme suit : $U_1 = 1$, $U_2 = 2$ et $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

Donner les dix premiers termes de cette suite

02 Calculer les cinq premiers termes de chacune des suites suivantes :

a) $U_n = n^2$, $n \in IN$; b) $U_n = -2^n$; $n \in IN^*$

c) $U_n = \dfrac{2}{n-3}$, $n \geq 4$; d) $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + n - 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_{n+1} = 3U_n + (-1)^n \end{cases}$ pour $n \geq 0$

02 On considère la suite (t_n) définie sur IN* par : $t_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

a) Montrer que , pour tout $n \in IN^*$:

$$t_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

b) Exprimer en fonction de n la somme S_n de n premiers termes de cette suite

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)}$

04 Considérons la suite (U_n) définie par $U_1 = 1, U_2 = 11$, $U_3 = 111$, $U_4 = 1111$, ... , $U_n = \underbrace{11 \cdots 1}_{\text{n chiffres}}$

Définir (U_n) par une relation de récurrence

05 Le 7ème terme d'une suite arithmétique est 111 et le 39ème terme est 15.

Calculer le 68ème terme de cette suite.

06 Trois réels donnés sont dits en progression arithmétique (respectivement géométrique) s'ils sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique (respectivement géométrique).

1) Si a, b et c sont en progression arithmétique, montrer qu'il en est de même pour :

(i) $a^2 - bc$, $b^2 - ac$ et $c^2 - ab$.

(ii) $b^2 + bc + c^2$, $c^2 + ac + a^2$ et $a^2 + b + b^2$

2) Etudier la réciproque

07 U_1,U_n et r désignent respectivement le 1er terme, le nème terme et la raison d'une suite arithmétique.

Calculer :

a) U_n connaissant $U_1 = 2$, $r = 4$; $n = 57$

b) U_n connaissant $U_1 = 97$, $r = -2$; $n = 100$

c) U_n connaissant $U_1 = -\dfrac{15}{7}$, $r = -\dfrac{2}{3}$ et $n = 125$

d) U_1 connaissant $U_n = 326$, $r = 2$ et $n = 72$

e) U_1 connaissant $U_n = -115$, $r = -3$ et $n = 1000$

f) r connaissant $U_1 = -4$, $U_n = -378$ et $n = 188$

g) r connaissant $U_1 = 212$, $U_n = -528$ et $n = 1111$

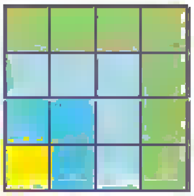
h) n connaissant $U_1 = 2$, $U_n = 3617$ et $r = 5$

i) n connaissant $U_1 = 378$, $U_n = 4$ et $r = -\dfrac{2}{5}$

08 1) Exprimer en fonction de n la somme des n premiers nombres entiers impairs

2) Expliquer le résultat en s'inspirant de la figure ci-contre.

3) Application : calculer la somme des nombres impairs de 101 à 999.



09 U_1, U_n et q désignent respectivement le 1^{er} terme, le $n^{ème}$ terme et la raison d'une suite géométrique.

Calculer :

a) U_n connaissant $U_1 = 3$, $q = -10$, $n = 11$

b) U_1 connaissant $U_n = 12$, $q = \frac{3}{2}$, $n = 6$

c) q connaissant $U_1 = 162$, $U_n = 32$, $n = 5$

d) n connaissant $U_1 = 160$, $U_n = 1215$, $q = \frac{3}{2}$

10 1) si a, b et c sont en progression géométrique montrer que :

i) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

ii) $(bc + ca + ab)^2 = abc\,(a + b + c)^2$

2) Etudier la réciproque.

3) Application : trouver trois nombres en progression géométrique connaissant leurs somme 91 et la somme de leurs carrés 4459.

11 U_1 , U_n , q et S désignent respectivement le 1^{er} terme, le $n^{ème}$ terme, la raison et la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Calculer :

a) U_n et S connaissant $U_1 = 2$; $q = 3$ et $n = 5$

b) q et S connaissant $U_1 = 162$; $U_n = 32$ et $n = 5$

c) U_1 et S connaissant $U_n = 54$; $q = 3$ et $n = 4$

d) U_1 et U_n connaissant $U_1 = 0{,}5$; $q = 7$ et $S = 571{,}5$

e) n et q connaissant $U_1 = 48$; $U_n = 243$ et $n = 633$

f) n et U_n connaissant $U_1 = 2$; $q = 4$ et $S = 682$

g) n et U_1 connaissant $U_n = 7$; $q = \frac{1}{3}$ et $n = 2548$

12 Supposons que a, b et c soient trois termes consécutifs d'une suite arithmétique et que a, c et b soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Supposons de plus que $a + b + c = 99$. Déterminer a, b et c.

13 La règle d'un jeu est telle que le gagnant reçoit le double de la somme qu'il a misée.
Un joueur mise p dinars à la première partie.
Il perd. Il mise alors 2p dinars à la seconde partie qu'il perd également.
Il continue ainsi à jouer, en doublant sa mise à chaque partie, jusqu'à la n^e partie qu'il gagne.
Montrer que le bénéfice du joueur est, quelque soit n, égale à sa première mise a.
Application :

A = 1 dinar, n = 15

Un tel jeu, présente-t-il un intérêt ?

14 Un marteau pilon frappe toutes les secondes un morceau de métal dont l'épaisseur de départ U_0 est 15 mm.
A chaque coup, l'épaisseur de morceau de métal diminue de 1%.
On note U_n l'épaisseur de morceau de métal après n coups

1) Etablir une relation entre U_1 et U_0

2) Etablir un relation entre U_{n+1} et U_n et en déduire la nature de la suite (U_n).

3) Calculer l'épaisseur de morceau de métal après 20 coups

4) A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de coup minimal a donné pour que l'épaisseur de la pièce soit inférieure à 4,5mm

15 La légende prétend que l'inventeur du jeu d'échec demanda comme récompense un grain de blé pour la 1ere case, deux pour la seconde, quatre pour la troisième et ainsi de suite en doublant de case en case jusqu'à la 64e et dernière.

Sachant que $2^{10} = 1024$ grains de blé ont une masse de 0,050kg.

Calculer la masse de ce blé

Remarque : La production mondiale annuelle du blé est en moyenne de 556348000 tonnes en 2003(d'après FAO)

16 Dans chacun des cas suivants, calculer les premiers termes de la suite, conjecturer une formule explicite de Un et la démontrer par récurrence :

a) $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 - n \end{cases}$ b) $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2 - U_n} \end{cases}$

c) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{4} \\ U_{n+1} = 1 - U_n \end{cases}$

17 Montrer que pour tout $n \in IN$,n^3-n est un multiple de 3.

18 Etudier la monotonie des suites (U_n) :

a) $U_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $n \in IN^*$

b) $U_n = n + (-1)^n$, $n \in IN$.

c) $U_n = 2.(\dfrac{1}{3})^n$, $n \in IN$.

d) $U_n = \dfrac{2^n}{n}$, $n \in IN^*$

e) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 1} \end{cases}$ f) $U_n = \dfrac{2n}{n+1}$, $n \in IN$.

19 Soit U la suite définie sur IN par .

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}.$$

a) Démontrer par récurrence que pour tout, $n \in IN$, $U_n \le 2$.

b) En déduire le sens de variation de U

20 Déterminer la limite de la suite (U_n)

a) $U_n = n^2 - 2n + 5$. b) $U_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{n}$

c) $U_n = -n.\,2^n$. d) $U_n = \dfrac{3n+4}{2n - 1}$

e) $U_n = 1 - \dfrac{3}{5} + \dfrac{9}{25} + \cdots + \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$

21 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x^2$ et C sa courbe représentative

On définit la suite (α_n) par : $\alpha_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, α_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à C au point d'abscisse α_n

1) Représenter, α_0 , α_1 et α_2 .

2) Déterminer la nature de la suite (α_n).

3) Calculer sa limite.

22 On considère un nombre r dont l'écriture dans le système décimal est :r = 1,16666...6...

On pose $U_0 = 1,1$ et $U_1 = 1,16$ et de manière générale $U_n = 1,1\underbrace{66\cdots6}_{\text{n chiffres}}$

1) Vérifier que pour tout $k \ge 1$,

$$U_k = U_{k-1} + \frac{6}{10^{K+1}}$$

2) En déduire que pour tout $n \in IN$,

$$U_n = 1{,}1 + 6.\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

3) En déduire la limite de (U_n) et une écriture fractionnaire de r

23 Calculer la limite de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants :

i) $U_n = 2{,}777\ldots 7\ldots$

ii) $U_n = 1{,}04545\ldots 45\ldots$

24 **Où est l'erreur ?**

On pose

$$1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^n + \cdots = \alpha$$

Alors

$$\frac{4}{3}\alpha = \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} + \cdots = \alpha - 1$$

On obtient ainsi $\alpha = -3$, or $\alpha > 1$!!

25 **Rebondissement d'une balle :**

Une balle élastique est lâchée d'une hauteur de un mètre par rapport au sol. A chaque rebond, elle à la moitié de son altitude précédente.

1) A partir de combien de rebonds la balle s'élèvera à moins de 1 cm du sol (utiliser une calculatrice)

2) Quelle est la distance totale parcourue par la balle avant de s'arrêter au sol?

26 1) soit ABC un triangle équilatéral de coté a.

On construit le triangle A'B'C' dont les sommets sont les milieux des cotés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ puis le triangle A''B''C'' dont les somment sont les milieux des cotés , $[B'C']$, $[C'A']$ et $[A'B']$, et ainsi de suite .

Trouver les limites vers lesquelles tendent la somme des périmètres et la somme des aires des triangles lorsqu'on poursuit indéfiniment la construction.

2) Même question à partir d'un carré ABCD.

27 (U_n) désigne une suite réelle définie sur IN par la donnée de U_0 et la relation de récurrence $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 4$; $n \in IN$

1) Déterminer U_0 pour que (U_n) soit une suite constante.

2) <u>Dans la suite on prend $U_0 = 5$</u>

On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = U_n - 8$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Ecrire V_n en fonction de n ,

En déduire le terme général de (U_n)

c) calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

28 On considère la suite U définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$$

1) Calculer les 4 premiers termes de U

2) Montrer qu'il existe un réel α tel que la suite V définie sur N par $V_n = U_n + \alpha$ soit une suite géométrique.

3) Dans ce cas déterminer V_n en fonction de n et déterminer sa limite.

4) En déduire U_n en fonction de n et Calculer $\lim U_n$.

5) Tracer dans un repère orthonormé les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -\frac{1}{2}x + 3$ puis interpréter graphiquement la convergence de la suite U vers sa limite.

29 On considère la suite U définie sur IN par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n + 3 \end{cases}$$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3.

2) On pose $V_n = U_n + 2 - 4n$.

a) Montrer que V est une suite géométrique.

b) Calculer en fonction de n, $S_1 = \sum_{k=0}^{n} V_k$

c) Calculer V_n puis U_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite de U_n

3) On pose $W_n = 4n - 2$, $n \in IN$

a) Quelle est la nature de la suite W

b) Calculer en fonction de n, $S_2 = \sum_{k=0}^{n} W_k$

4) En déduire, en fonction de n, la valeur de $S = \sum_{k=0}^{n} V_k$

30 Soit U la suite définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{2 + U_n} \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $0 \leq U_n \leq 1$.

b) En déduire le sens de variation de U

2) On considère la suite V définie par $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$

a) Montrer que V est géométrique.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Calculer $\lim U_n$

31 Une suite numérique (U_n) est définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence $U_{n+1} = \dfrac{6 + U_n}{2 + U_n}$

1) Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de U_1 $(a < b)$ pour lesquelles la suite est constante.

2) Montrer que si $U_1 \neq a$ et $U_1 \neq b$, il en est de même pour U_n.

Calculer alors $\dfrac{U_{n+1} - a}{U_{n+1} - b}$ en fonction de $\dfrac{U_n - a}{U_n - b}$

3) En déduire que la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{U_n - a}{U_n - b}$ est une suite géométrique.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} |V_n|$ et en déduire la limite de (U_n).

32 On considère la suite $(U_n)_{n \in IN}$ définie par la donnée de son premier terme U_0 et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \dfrac{-3}{U_n - 2\sqrt{3}}$

1) Pour quelle valeur U_0, la suite U est constante ?

2) On suppose dans la suite que $U_0 = -2\sqrt{3}$

a) Montrer que la suite $(V_n)_{n \in IN}$ définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 3}$ est une suite arithmétique de raison $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

b) Calculer V_n en fonction de n et en déduire le terme général de la suite (U_n)

c) Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$

33 Soit U la suite définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n - 1}{1 + U_n} \end{cases}$$

1) Conjecturer graphiquement la limite de U et sa monotonie

2) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \geq 1$

3) Etudier la monotonie de U

4) On considère la suite V définie sur IN

par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de U_n

En déduire que V est une suite arithmétique.

b) En déduire les termes généraux de V et U.

c) Calculer $\lim U_n$

5) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Déterminer n pour que S_n soit égale à 252

L'histoire des mathématiques montre que les suites arithmétiques et géométriques étaient manipulées depuis l'antiquité par les Perses et les Egyptiens.

Par exemple une table d'argile (civilisation Perse) conservée au musée du Louvre à Paris mentionne les résultats suivants :

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^9 = 2^9 + (2^9 - 1) = 2^{10} - 1.$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... 10^2 = \left[1.\frac{1}{3} + 2.\frac{10}{3}\right].55 = 385.$$

Chez les anciens, les suites ont surtout été utilisées dans la résolution de problèmes concrets (ARCHIMEDE (-287 ; -212) évoque une suite géométrique de raison ; LIUHI (3ième siècle) parle d'un procédé qui donne la longueur du coté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle et ayant n sommets et inscrit dans le même cercle, FIBONACCI (1170, 1245) symbolise un problème de reproduction de lapins par une suite qui est restée désormais célèbre dans l'histoire.

Avant l'invention d'un symbolisme adéquat, les règles de sommation étaient souvent exprimées en vers surtout par les arabes.

La contribution de ces derniers dans l'évolution des connaissances relativement aux suites a été reconnue comme fondamentale par les historiens.

Parmi les mathématiciens arabes nous citerons :

- IBN BADR qui a vécu au 13e siècle à Seville et qui a donné un aperçu sur le calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique finie.
- ELKALSADI et ELKORKHI (15ième siècle) qui ont calculé les sommes :

  $1 + 2 + 3 + ... + n$

  $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

  $2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n$
- El KHASHI qui a vécu à Samarkand au 15ième siècle et qui a calculé

  $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4.$

Au cours des siècles, les suites se démarquent des problèmes concrets et deviennent des êtres mathématiques étudiés en tant que tels. La notation U_n fait son apparition pour la première fois dans les travaux de Lagrange mathématicien français (1736, 1813)

Chapitre 8

Dénombrement

" Le poète dort le jour pour compter les étoiles la nuit, le mathématicien dort la nuit pour compter le soleil le jour " Aphorisme contemporain .

INTRODUCTION

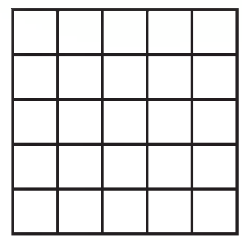
Activité 1

Dans une classe de 25 élèves, 14 élèves s'intéressent à la musique, 9 s'intéressent à la danse et 3 s'intéressent à la fois à la musique et à la danse.

Combien d'élèves ne s'intéressent ni à la musique ni à la danse?

Activité 2

Dénombrer tous les carrés contenus dans la figure suivante :



Activité 3

Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- d'une entrée à choisir parmi deux entrées possibles notées : E_1 , E_2
- d'un plat à choisir parmi trois plats possibles : P_1 , P_2 , P_3
- d'un dessert à choisir parmi trois desserts possibles : D_1 , D_2 , D_3

a) Combien un client peut-il composer de menus différents ?

b) Combien un client peut-il composer de menus comportant le plat P_2 ?

Activité 4

1) Combien peut-on former de nombres à deux chiffres distincts en utilisant les chiffres: 1 ; 2; 3 ?

2) Est-il simple de dénombrer les nombres à 5 chiffres distincts en utilisant 1; 2;..; 9 ?

Activité 5

1) Dans une famille il y a quatre enfants qui veulent tous participer à une excursion.

a) combien y a-t-il de choix si les revenus de leurs père ne permettent qu'à un seul de participer?

b) Combien y a-t-il de choix si les revenus du père ne permettent qu'à deux enfants seulement de participer ?

2) Dans une classe de 30 élèves on permet seulement à 7 élèves de participer à cette excursion pouvez-vous compter le nombre de choix possibles ?

Activité 6

1) Les 30 élèves d'une classe de 3ème sciences techniques se partagent en deux parties :

- 16 aiment l'équipe de football du Real Madrid et détestent l'équipe du F.C Barcelone
- 14 aiment l'équipe du F.C Barcelone et détestent l'équipe du Real Madrid

Il n'y a aucun élève qui aime les deux équipes en même temps.

Ziad, Hafedh et Taher sont 3 élèves de cette classe.

Combien peut-on faire de schémas décrivant les relations de ces 3 élèves avec les deux équipes?

2) Vous- est-il simple de trouver le nombre de schémas illustrant les relations de 30 élèves avec les deux équipes ?

On vous donne un exemple de schéma :

$$\begin{array}{lcl} Z & \longrightarrow & \text{Real} \\ H & \nearrow & \text{Barcelone} \\ T & \nearrow & \end{array}$$

Ziad et Hafedh aiment le Real et Taher aime le F.C Barcelone

Activité 7

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5 :

1) Une première épreuve consiste à tirer successivement avec remise deux boules de cette urne.

a) Dénombrer tous les tirages possibles

b) B_1B_3 et B_3B_1 désignent ils un même tirage ?

c) Peut-on donner dans chacun des cas précédents le nombre total d'échantillons?

Voila un tirage possible B_3B_1 : on tire une première boule on obtient B_3, on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième boule on obtient B_1

2) Une deuxième épreuve consiste à tirer successivement sans remise deux boules de cette urne.

a) Dénombrer tous les tirages possibles et comparer avec le résultat précédent

b) B_1B_1 est-il un tirage possible?

c) Peut-on donner dans chacun des cas précédents le nombre total d'échantillons?

3) Une troisième épreuve consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne.

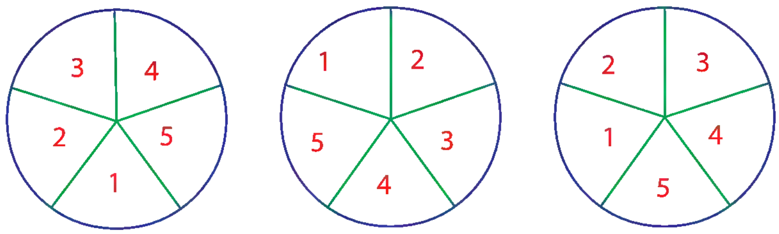
a) Dénombrer tous les tirages possibles

b) B_2B_4 et B_4B_2 désignent ils un même tirage ?

NOMBRE D'APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE FINI DANS UN ENSEMBLE FINI :

Activité 8

Le numéro gagnant d'une petite loterie est désigné en faisant tourner 3 roues divisées en secteurs numérotés de 1 à 5



1er chiffre (Chiffre des centaines) — 2ème chiffre (Chiffre des dizaines) — 3ème chiffre (Chiffre des unités)

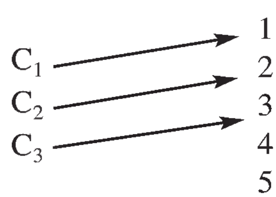
On se propose de vous aider à déterminer le nombre de résultats possibles, c'est-à-dire de nombres à trois chiffres, à l'aide d'un arbre de choix incomplet.

1er chiffre (5 choix)	2eme chiffre (5 choix)	3eme chiffre (5 choix)	Résultats
1	1	1	231
2	2	2	232
	3	3	233
3	4	4	234
	5	5	235
4			
5			

Combien de nombres à trois chiffres peut-on obtenir ?

Remarque: On constate que chaque résultat peut être représenté par une application d'un ensemble à 3 éléments $E = \{ C_1 , C_2 , C_3 \}$ dans un ensemble à 5 éléments $F = \{ 1, 2, 3, 4, 5\}$ où Ci désigne le chiffre n° i ($i \in \{1,2,3\}$)

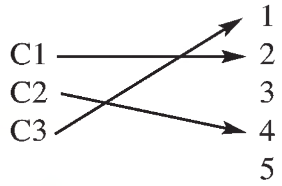
Exemple: Le nombre 123 est représenté par l'application suivante :

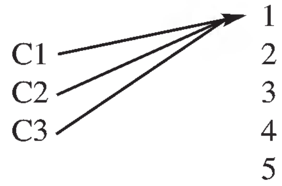


Activité 9

1) Représenter par une application de E dans F convenable chacun des résultats suivants de l'activité précédente 241, 535, 444.

2) Soit les deux applications suivantes :





Déterminer les deux résultats correspondants.

Activité 10

Montrer à l'aide d'un arbre de choix que le nombre d'applications d'un ensemble à 3 éléments dans un ensemble à 2 éléments est 8 (c'est-à-dire 2^3)

Théorème

Soit E un ensemble de p éléments ($p \in \mathbb{N}^*$) et F un ensemble de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) le nombre d'applications de E dans F est égal à n^p

Remarques:

❖ Soit E un ensemble non vide

- On sait qu'un élément de E x E s'appelle un couple.
- On sait qu'un élément de E x E x E s'appelle un triplet
- Plus généralement un élément de $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{\text{p fois}}$ s'appelle un p-uplet

Exemple :

Soit E = {a, b, c}

L'élément (a, b, c, b) de E x E x E x E est un quadruplet

❖ Une application de l'ensemble E = {1, 2, ... , p} dans un ensemble F de n éléments est représentée par un p-uplet d'éléments de F

Activité 11

Montrer que le nombre de p-uplet d'un ensemble à n éléments est égal à n^p

Exercice résolu :

De combien de manières, peut-on ranger 4 livres dans 3 tiroirs ?

Un rangement sera réalisé lorsque chacun des 4 livres sera mis dans l'un des tiroirs.

Solution :

Il y a autant de manières possibles que d'applications de l'ensemble L des 4 livres vers l'ensemble T des tiroirs. Or il y a 3^4 applications de L vers T. Il y a donc 81 manières de ranger 4 livres dans 3 tiroirs.

Activité 12

Reprendre l'activité 6 page 133 où on étudie la relation entre 30 élèves d'une classe 3$^{\text{ème}}$ sciences techniques et les deux équipes de football et répondre à la dernière question posée.

Activité 13

On lance 4 fois de suite, un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Trouver le nombre de triplets possibles qu'on peut obtenir.

NOMBRE D'ARRANGEMENTS:

Activité 14

Quatre chevaux numérotés de 1 à 4 prennent le départ dans une course.
Des parieurs essaient de deviner le tiercé dans l'ordre gagnant.
Pour les aider à déterminer le nombre de tiercés dans l'ordre possibles, compléter d'abord l'arbre de choix suivant :

Problème équivalent :
Tirer successivement et sans remise 3 boules d'une urne qui en contient 4

1^{er} cheval (4 choix)	2^{eme} cheval (3 choix)	3^{eme} cheval (2 choix)	Résultats
1 2 3 4	2 3 4	2 4	(1, 3, 2) (1, 3, 4)

Avec 13 chevaux. Dénombrer les tiercés en utilisant une démarche analogue.

Définition

Soit E un ensemble non vide à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) et p un entier vérifiant $1 \le p \le n$
On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplet formé de p éléments distincts de E

Théorème

Soit n un entier naturel non nul et p un entier vérifiant $1 \le p \le n$
Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments est égal à $n(n-1)\ldots(n-p+1)$ et noté A_n^p

Le symbole A_n^p se lit « A, n, p »

Activité 15

Calculer A_6^3, A_{11}^2, A_4^4

Remarque :

(a , b , c ,d) est un arrangement de quatre lettres dans l'ensemble des lettres de l'alphabet français, (b , a , c ,d) est un autre arrangement distinct du premier .

Activité 16

Déterminer le nombre des arrangements de six lettres de l'alphabet français.

Activité 17

Le bureau régional de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques (ATSM) se compose de 13 membres.

On veut former un comité comprenant un président, un secrétaire général et un trésorier.

Combien de comités peut-on former ?

Activité 18

Reprendre l'activité 4 au début de ce chapitre et répondre à la question n° 2 (dénombrer les nombres à 5 chiffres distincts en utilisant : 1 , 2 ,3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 .)

Exercice résolu :

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 12, on trie 4 boules successivement et sans remise. Déterminer le nombre de résultats possibles.

Solution :

Un tirage successif sans remise de 4 boules parmi 12 peut être considéré comme un arrangement de 4 éléments parmi 12.

Le nombre de possibilités est donc $A_{12}^4 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11880$

PERMUTATIONS :

Activité 19

Une revue propose à ses lecteurs une liste de 4 chanteurs et leur demande un classement par ordre de préférence. Combien y a-t-il de classements possibles?

Commentaire:

Si on note $E = \{C_1 , C_2 , C_3 , C_4\}$ l'ensemble des quatre chanteurs.

Chaque classement des quatre chanteurs est considéré comme un arrangement de 4 éléments d'un ensemble E à 4 éléments. On l'appelle permutation de l'ensemble E.

Définition

Soit E un ensemble de n éléments ($n \in IN$) On appelle permutation de E, tout arrangement des n éléments de E.

Théorème

Soit E un ensemble de n éléments ($n \in IN$) Le nombre des permutations de E est $A_n^n = n(n-1) \times \cdots \times 1$

Notation :

Pour tout $n \in IN^*$, l'entier n(n - 1) x ... x 1 est noté n! (on lit factorielle n)

Exemple : 1! = 1

2! = 2 x 1

3! = 3 x 2 x 1 = 6

Par convention : 0! = 1

Activité 20

a) Calculer 5! ; 7! ; $\frac{13!}{12!}$; $\frac{12!}{10!}$

b) Simplifier $\frac{n!}{(n-1)!}$; $\frac{n!}{(n-2)!}$,$n \geq 2$

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ et pour tout entier p vérifiant $1 \leq p \leq n$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Activité 21

a) Déterminer les permutations de chacun des ensembles

$F = \{1, 2\}$ et $G = \{1, 2, 3\}$.

b) Dénombrer les permutations de l'ensemble $H = \{a, b, c, d, e, f\}$

c) Déterminer le nombre des mots ayant un sens ou non qu'on puisse former à partir du mot MATHS.

Activité 22

Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire successivement et sans remise les vingt boules et on note à chaque fois le numéro de la boule tirée.

Déterminer le nombre de tirages possibles.

Activité 23

Le championnat professionnel tunisien de première division de football est formé de 14 équipes.

Déterminer le nombre de tous les classements possibles à la fin du championnat.

NOMBRE DE COMBINAISONS:

Activité 24

Une société industrielle emploi 7 techniciens. L'administration veut choisir 3 d'entre eux pour participer à un stage à l'étranger. On se propose de déterminer le nombre de choix possibles.

1) Notons $T = \{a , b , c , d , e , f , g \}$ l'ensemble de ces techniciens et considérons le groupe

   $H = \{a , b , c \}$ qui est une partie de 3 éléments parmi 7

   a) La partie H est elle différente de $\{c , b , a \}$ et de $\{b , a , c \}$?

   b) De combien de façons peut-on arranger la partie H ?

2) Soit N le nombre de parties de 3 éléments parmi 7.

   a) Montrer que $3!.N = A_7^3$

   b) En déduire N

Définition

Soit p et n deux entiers naturels vérifiant : $p \leq n$.

On appelle Combinaison de p éléments d'un ensemble E de n éléments, toute partie de p éléments de E.

Le nombre de ces combinaisons est noté C_n^p (on lit "Cnp").

Théorème

Soit n et p deux entiers naturels vérifiant $p \leq n$. $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Activité 24

Montrer que pour tous entiers naturels n et p tels que $0 \leq p \leq n$ on a : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Activité 25

Montrer en appliquant la formule puis en revenant à la définition chacun des résultats suivants : $C_n^1 = n$, $C_n^0 = 1$ et $C_n^n = 1$ pour tout $n \in IN^*$

Activité 26

Une urne contient 12 boules numérotes de 1 à 12, on tire simultanément 7 boules.
Déterminer le nombre de tirages possibles.

Activité 27

Répondre à la question 2 de l'activité 5 page 132 du début de ce chapitre où on demande le nombre de choix possibles de 7 élèves qui veulent participer à une excursion dans un classe de 30 élèves .

Activité 28

32 équipes sont qualifiées pour la phase finale de la coupe du monde de football
On fait un tirage au sort pour former des groupes de quatre équipes
De combien de façon peut-on former ces groupes ?

Exercice résolu :

Une urne contient 4 boules rouges et 7 boules noires.
On tire simultanément 3 boules de l'urne.
a) Calculer le nombre de tirages possibles.
b) Calculer le nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur.
c) Calculer le nombre de tirages contenant exactement 2 boules noires.
d) Calculer le nombre de tirages contenant au moins 2 boules noires

Solution :

a) Un tirage possible est une partie de 3 boules parmi 11.

Donc le nombre de tirage cherché est $N = C_{11}^3 = \dfrac{11!}{3!(11-3)!} = 165$

b) Le nombre de tirages de 3 boules rouges parmi 4 est C_4^3

Le nombre de tirages de 3 boules rouges parmi 7 est C_7^3

d'où Le nombre de tirages de 3 boules de même couleur est $C_4^3 + C_7^3 = 39$

c) Un tirage contenant 2 boules noires contient nécessairement une boule rouge.

Il y a C_7^2 choix de 2 boules noirs parmi 7 et à chaque choix correspond C_4^1 choix d'une boule rouge parmi 4 ; on a donc $C_7^2 \times C_4^1$ choix possibles de 3 boules contenant exactement 2 boules noires c'est à dire 21 x 4 = 84 tirages.

d) Un tel tirage doit comporter (2 boules noires et 1 boule rouge) ou (3 boules noires)

Le nombre cherché est donc : $C_7^2 \times C_4^1 + C_7^3 \times C_4^0 = 84 + 35$

$= 119$

Propriétés des nombres C_n^p **:**

Soit n et p deux entiers naturels, montrer les propriétés suivantes:

$\boxed{P_1}$ pour $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = C_n^{n-p}$

$\boxed{P_2}$ pour $0 < p < n$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ (dite relation de Pascal).

Activité 29

1) Calculer C_{10}^8, C_{10}^2 et C_{2006}^{2003}

2) Montrer que $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

Triangle de Pascal:

La relation de Pascal permet de calculer C_n^p connaissant C_{n-1}^{p-1} et C_{n-1}^p

On peut donc calculer tous les C_n^p en utilisant le schéma :

$$\begin{array}{cc} C_{n-1}^{p-1} & + \ C_{n-1}^{p} \\ & = C_n^p \end{array}$$

On dépose les calculs de la manière suivante :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	1	6	1	
⋮								

$C_5^1 + C_5^2 = C_6^2$

Ce tableau est appelé triangle de Pascal en hommage à Blaise Pascal qui écrivit en 1654 son traité du triangle arithmétique dans lequel il expose d'innombrables applications du ''triangle''

Ce triangle semble être connu des Arabes dès le XIII^e siècle

Activité 30

a) Expliquer la symétrie des coefficients sur chaque ligne du tableau.

b) Recopier ce triangle et terminer les lignes 7 et 8.

c) Donner directement du tableau C_7^3 et C_8^4

Activité 31 Formule du binôme de Newton:

Vérifier que : $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$

$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$

On admet le théorème suivant :

Théorème

Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel non nul n on a :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^p a^{n-p} b^p + \cdots + C_n^n b^n$$

Cette formule est appelée formule du binôme de Newton ou simplement la formule du binôme. On l'écrit aussi $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^p . a^{n-k} . b^k$

Remarque :

Les coefficients de la formule du binôme sont fournis par le triangle de Pascal :

$(a+b)^1 \rightarrow$ 1 1

$(a+b)^2 \rightarrow$ 1 2 1

$(a+b)^3 \rightarrow$ 1 3 3 1

$(a+b)^4 \rightarrow$ 1 4 6 4 1

....

Activité 32

1) Développer les expressions suivantes: $(a+b)^5$, $(1+x)^5$, $(1-x)^5$, $(1+x)^n$ $(n \in IN^*)$

2) En appliquant la formule du binôme et en s'aidant du triangle de Pascal calculer $(a+b)^6$ puis $(a+b)^7$

Activité 33

Soit $E = \{a_1, a_2, \ldots , a_n\}$ un ensemble à n éléments $(n \in IN^*)$.

On se propose dans cette activité de déterminer le nombre de parties de E:

1) a) Quelle est la partie de E contenant 0 élément ?

b) Quelle est la partie de E contenant n élément ?

c) Déterminer toutes les parties de E contenant un élément ?

Combien sont-elles ?

d) Citer deux parties de E contenant chacune 3 éléments de E.

Combien a-t-on de parties de E contenant exactement trois éléments ?

2) Montrer que le nombre N de parties de E est : $N = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^p + \cdots + C_n^n$

3) a) Développer à l'aide de formule du binôme $(1+1)^n$

b) En déduire N

Activité 34

Soit x un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2

a) Développer l'expression $(1 + x)^n$.

b) En déduire que $(1 + x)^n > 1 + nx$

Résumé

le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments ou le nombre de p-uplet d'un ensemble à n éléments est égal à n^p
($n \in IN^*$; $p \in IN^*$)

le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments est

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad , \ 1 \le p \le n$$

le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est égal à $n!$

le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments (ou le nombre de parties de p éléments d'un ensemble à n éléments)
est égal à C_n^p, $0 \le p \le n$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}; \quad 0 \le p \le n$$

$$C_n^0 = 1 \quad ; \quad C_n^1 = 1 \quad ; \quad C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p, \quad 1 \le p < n$$

Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel non nul n

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^p a^{n-p} b^p + \cdots + C_n^n b^n$$

01 Quel est le nombre de codes de cadenas à 4 roues à 10 chiffres chacune ?

02 Un test d'aptitude consiste à poser à chaque candidat une série de quatre questions auxquelles il doit répondre par "Oui" ou "Non".
Un candidat répond au hasard. Dénombrer toutes les possibilités de répondre au test

03 En informatique, on appelle octet une liste de 8 éléments pris dans l'ensemble $\{0\ ;\ 1\}$
Exemples d'octets : 01001110 ; 11100101
1) Combien y a-t-il d'octets possibles ?
2) Combien y a-t-il d'octets commençant par 0 ?
3) Combien y a-t-il d'octets contenant exactement trois 0

04 Vous tapez sur un cadran de téléphone un numéro à 8 chiffres. Déterminer dans chaque cas le nombre de numéros différents :
1) Avec 8 chiffres pairs.
2) Avec au moins un chiffre 9.

05 1) Combien de nombres de trois chiffres distincts peut-on former à l'aide des six chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9
2) Combien de ces nombres sont :
(i) inferieurs à 500 ?
(ii) pairs.
(iii) impairs
(iv) multiples de Cinq

06 On dispose de huit jetons qui portent chacun un chiffre. On dispose en ligne quatre de ces jetons de façon à former un nombre.
Par exemple :
1960 est un nombre à quatre chiffres.
0196 est un nombre à trois chiffres.
0060 est un nombre à deux chiffres.
0006 est un nombre à un chiffre.
Déterminer le nombre de nombres distincts de quatre chiffres, que l'on peut former dans chacun des cas suivants :
a) Les jetons portant les numéros : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8.
b) Les jetons portant les numéros : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7.
c) Les jetons portant les numéros : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.
d) Les jetons portant les numéros : 0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 1 ; 3 ; 4 ; 5.
e) Les jetons portant les numéros : 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2.

07 La fabrication d'une pièce nécessite de passer celle-ci sur quatre machines A, B, C, D.
Dénombrer les trajets possibles dans chacun des cas suivants :
a) L'ordre de passage est indifférent.
b) La pièce doit d'abord passer par A.
c) La pièce doit passer en B avant C et D

08 Les initiales d'une personne sont le couple formé par la première lettre de son prénom et la première lettre de son nom.

Dans un lycée, il existe au moins 677 élèves, montrer que toujours, il y a des élèves dans ce lycée ayant même initiale.

09 Résoudre dans IN les équations suivantes

a) $C_n^2 = 190$; b) $C_n^8 = C_n^4$

c) $A_n^3 = 90n$

10 Dans une classe il y a 15 filles.

Une équipe de basket-ball est formée de 5 joueurs.

Combien d'équipes féminines peut-on ainsi former avec ces 15 filles de la classe

11 a) De combien de façons différentes, trois contremaitres et deux ingénieurs peuvent-ils prendre place sur un banc.

b) De combien de façons peuvent-ils s'assoir si les ingénieurs s'assoient l'un à côté de l'autre.

c) De combien de façons peuvent-ils s'assoir si les contremaitres seulement s'assoient l'un à côté de l'autre.

12 Dans un lot de 20 petits moteurs électriques ; on prélève quatre

a) De combien de façons différentes peut-on faire ce prélèvement

b) On suppose que parmi les 20 moteurs quatre sont défectueux; de combien de façons différentes peut-on avoir

i) les 4 moteurs choisis sont non défectueux

ii) Un au moins entre eux est défectueux

iii) Un et un seul est défectueux

iv) Deux au moins sont défectueux

13 A l'écrit d'un examen; on doit traiter 8 exercices au choix parmi 10.

a) Combien y a-t-il de choix possibles

b) Même question sachant que les deux premiers exercices sont obligatoires

14 Pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq 51$; on pose $u_p = C_{51}^p$

a) montrer que pour $0 \leq p \leq 50$; on a : $\dfrac{U_{p+1}}{U_p} = \dfrac{51-p}{p+1}$

b) En déduire que $u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_{25}$

et $u_{51} < u_{50} < u_{49} < \ldots\ldots < u_{26}$

15 Un sac contient 5 boules rouges; 7 boules blanches et 10 boules noires.

Les boules rouges portent les numéros 1, 1, 2, 2 et 3.

Les boules blanches portent les numéros de 1 à 7.

Les boules noires portent les numéros 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4 et 5.

On tire simultanément 5 boules de l'urne.

1- Combien de tirages peut-on faire ?

2- Combien de tirages peut on faire dans chacun des cas suivants:

a) Les 5 boules tirées sont de même couleur.

b) Aucune des 5 boules ne porte le numéro 1

c) Au plus 2 boules qui portent le numéro 1.

d) Au moins 3 boules qui portent le numéro 1

e) Les 5 boules tirées sont de même couleur et portent des numéros différents.

16 On dispose d'un jeu de 32 cartes et on appelle "main" la donnée de 5 cartes. Déterminer le nombre de mains distinctes contenant:

- Exactement un roi.
- Exactement 2 rois.
- Aucun roi.
- Au moins un roi
- 2 cœurs et 3 piques.
- 2 carreaux ; 3 piques et 1 cœur.
- 2 cœurs et trois dames.

17 Un sac contient 10 boules numérotées comme suit:

1 boule qui porte le numéro 1

2 boules qui portent le numéro 2

3 boules qui portent le numéro 3

4 boules qui portent le numéro 4

On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne

a) Combien y a t-il de façons possibles ?

b) De combien de façons peut-on avoir 3 boules qui portent le numéro 4 ?

c) De combien de façons peut-on avoir 3 boules qui portent le même numéro ?

d) De combien de façons peut-on avoir 3 boules qui portent des numéros distincts ?

18 Une boite contient 8 jetons colorés et numérotés de la façon suivante:

4 rouges : 1, 2, 3 et 4.

2 vertes : 1 et 5.

2 noires : 1 et 6.

1) De combien de façons peut-on tirer simultanément 3 jetons dans chacun de ces cas:

a) Aucun jeton tiré n'est noir

b) Les trois jetons tirés sont d'une même parité

c) Les trois jetons tirés vérifient : Un seul jeton porte le numéro 1 et un seul jeton est rouge.

d) Avoir une somme égale a 6.

2) On place en ligne trois jetons et on lit le numéro obtenu. Combien de nombres peut-on lire dans chacun des cas:

a) Dans le nombre obtenu ne figure aucun chiffre 1.

b) Dans le nombre obtenu figure un seul chiffre 1

c) Dans le nombre obtenu figure deux fois le chiffre 1

d) En déduire le nombre de résultats qu'on peut lire.

Pascal et les combinaisons

Dans ce passage, Blaise Pascal introduit la notion de « combinaison ».
On appréciera la différence entre le langage scientifique actuel et celui du XVIIe siècle

Texte de Pascal	Commentaires
<u>Usage de triangle arithmétique pour les combinaisons</u> Le mot de combinaison a été pris en plusieurs sens différents, de sorte que, pour ôter l'équivoque, je suis obligé de dire comment je l'entends. Lorsque de plusieurs choses on donne le choix d'un certain nombre, toutes les manières d'en prendre autant qu'il est permis entre toutes qui sont présentées, s'appellent ici les différentes combinaisons. Par exemple si de quatre choses exprimées par ces quatre lettres, A, B, C, D, on permet d'en prendre, par exemple, deux quelconques, toutes les manières d'en prendre deux différentes dans les quatre qui sont proposées, s'appellent Combinaisons.	Il s'agit du triangle de Pascal
Ainsi on trouvera, par expérience, qu'il y a six manières différentes d'en choisir deux dans quatre ; car on peut prendre A et B, ou A et C, ou A et D, ou B et C, ou B et D, ou C et D.	En effet, $C_4^2 = 6$
Je ne compte pas A et A pour une des manières d'en prendre deux ; car ce ne sont pas deux choses différentes, ce n'en est qu'une répétée. Ainsi je ne compte pas A et B puis B et A pour deux manières différentes car on ne prend en l'une et en l'autre manière que les deux mêmes choses, mais d'un ordre différent seulement ; et je ne prends point garde à l'ordre : de sorte que je pouvais m'expliquer en un mot à ceux qui sont accoutumés de considérer les combinaisons, en disant simplement que je parle seulement des combinaisons qui se font sans changer l'ordre.	Une combinaison est un échantillon sans remise Une combinaison est un échantillon non ordonné
On trouvera de même, par expérience, qu'il y a quatre manières de prendre trois choses dans quatre ; car on peut prendre ABC, ou ABD, ou ACD, ou BCD.	$C_4^3 = 4$
Enfin on trouvera qu'on n'en peut prendre quatre dans quatre qu'en une manière, savoir, ABCD.	$C_4^4 = 1$
Je parlerai donc en ces termes : 1 dans 4 se combine 4 fois. 2 dans 4 se combine 6 fois. 3 dans 4 se combine 4 fois. 4 dans 4 se combine 1 fois.	$\left.\begin{array}{l} C_4^1 = 4 \\ C_4^2 = 6 \\ C_4^3 = 4 \\ C_4^4 = 1 \end{array}\right\}$ **Total = 15**

Texte de Pascal	Commentaires
Ou ainsi : La multitude des combinaisons de 1 dans 4 est 4. La multitude des combinaisons de 2 dans 4 est 6. La multitude des combinaisons de 3 dans 4 est 4. La multitude des combinaisons de 4 dans 4 est 1. Mais la somme de toutes les combinaisons en général qu'on peut faire dans 4 est 15, parce que la multitude des combinaisons de 1 dans 4, de 2 dans 4, de 3 dans 4, de 4 dans 4, étant jointes ensemble, font 15	Pascal ne pense pas à C_n^0 Du coup, la propriété $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$ lui échappe. Il obtient seulement : $\sum_{p=1}^{n} C_n^p = 2^n - 1$ (exprimé dans un tout autre language).

Chapitre 9

PROBABILITÉS

« Ne compter que sur le hasard est fou ; ne pas compter sur le hasard est plus fou encore ». Rémy de Gourmont

INTRODUCTION

Lorsqu'un phénomène est déterminé par une loi connue on peut utiliser cette loi pour faire des prévisions.

Par exemple la formule d = v . t donnant la distance à parcourir par un véhicule en fonction de sa vitesse et du temps mis, permet au chauffeur de **prévoir** à l'avance son heure d'arrivée (à moins d'un imprévu !) Cependant toutes les situations ne sont pas aussi simples. Par exemple dans une partie de pile ou face, on ne peut pas dire à l'avance si c'est pile qui sortira ou si c'est face. Un tel phénomène est dit **aléatoire.**

Cependant acceptez-vous à jouer à pile ou face avec les conditions suivantes:

si c'est pile vous gagnez 1 dinar, si c'est face vous perdez 2 dinars ?

Vraisemblablement non, car on pense intuitivement que face a **autant de chance** de sortir que pile !

L'objet de la probabilité c'est l'étude des **phénomènes aléatoires.**

Activité 1

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On lance le dé une fois et on lit le numéro de la face supérieure du dé.

Le lancer du dé est une épreuve.

Le résultat de la lecture est une **éventualité.**

1) 7 est il une éventualité ?

   5 est il une éventualité ?

2) Quel est l'ensemble de toutes les éventualités ?

On le note Ω et on l'appelle **univers** des cas possibles. Compléter Ω = {,...............,}

3) Quelles sont les éventualités où le nombre lu est pair ?

L'ensemble A de ces éventualités est appelé un **évènement.**

4) Déterminer l'évènement B :" Le nombre lu est multiple de 3".

5) a) Soit C l'évènement :" obtenir la face numérotée 4"

Compléter C = {,......,}

C est appelé un évènement **élémentaire**.

b) Déterminer tous les évènements élémentaires de Ω

6) Déterminer chacun des évènements suivants:

" Obtenir le numéro 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6"

" Obtenir un numéro supérieur à 7"

Ω est appelé l'évènement **certain**.

$\varnothing$ est appelé l'évènement **impossible**.

Activité 2

On considère l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de l'épreuve décrite dans l'activité 1.

1) Soit D l'évènement ‘‘obtenir un nombre non multiple de 3’’

a) Déterminer D

D s'appelle l'évènement **contraire** de B et noté $\overline{B}$

b) Déterminer $B \cup \overline{B}$ et $B \cap \overline{B}$

2) Déterminer l'évènement contraire de Ω.

Définitions et langage probabiliste:

Soit une épreuve dont l'univers des cas possibles est Ω

Langage ensembliste	Langage probabiliste
A : une partie de Ω ou un sous-ensemble de Ω	A est un évènement
$A = \Omega$	A est l'évènement certain
$A = \varnothing$: ensemble vide	A est l'évènement impossible
e: un élément de Ω, $e \in \Omega$	e est une éventualité ou un cas possible.
$\{e\}$ est un singleton, $\{e\} \subset \Omega$	$\{e\}$ est un évènement élémentaire
$A \cup B$ est la réunion de A et B	$A \cup B$ est l'évènement ‘‘A ou B’’
$A \cap B$ est l'intersection de A et B	$A \cap B$ est l'évènement ‘‘A et B’’
$\overline{A} = C_\Omega A$ est le complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$ est l'évènement contraire de A.
Si $A \cap B = \varnothing$; A et B sont deux parties disjointes de Ω.	A et B sont deux évènements incompatibles.

Remarque :

L'ensemble des parties de Ω est noté $\mathscr{P}(\Omega)$

Soit A une partie de Ω, on écrit: $A \subset \Omega$ ou $A \in \mathscr{P}(\Omega)$

Activité 3

On lance deux dés distincts D_1 et D_2 dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe les numéros inscrits sur les deux faces supérieures.

Ainsi le couple (3, 5) signifie qu'on a obtenu 3 sur la face supérieure de D_1 et 5 sur la face supérieure de D_2.

1) a) Déterminer l'univers Ω des cas possibles.

   Combien Ω contient d'éléments ?

   b) On désigne par A l'évènement : ‘‘La somme des numéros inscrits sur les deux faces supérieures est égale à 8 ’’

   Compléter $A = \{ \ldots\ldots\ldots \}$

   $\overline{A} = \{ \ldots\ldots\ldots \}$

2) Soit B l'évènement: ‘‘ le produit des numéros obtenus est un multiple de 5 ’’

   a) Déterminer B

   b) Déterminer l'événement ‘‘A ou B’’ puis l'événement ‘‘A et B ’’

PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT

Activité 4

Une urne contient trois boules blanches numérotées de 1 à 3 et cinq boules vertes numérotées de 1 à 5.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Une épreuve consiste à tirer au hasard une boule de l'urne.

On note B_1, B_2, B_3 les boules blanches et V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 les boules vertes

L'univers des cas possibles est $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$.

Comme les boules sont indiscernables au toucher, chacune d'elles a ‘‘ une chance sur huit’’ d'être tirée.

On traduit ce fait, en disant que : la probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{8}$

Considérons les événements suivants :

A " la boule tirée est blanche "

B " la boule tirée porte un numéro supérieur ou égal à 4"

C " la boule tirée est verte et porte un numéro pair"

On a: $A = \{B_1, B_2, B_3\}$: On conçoit qu'on a "trois chances sur huit" pour que l'évènement A soit réalisé.

On traduit ce fait, en disant que : la probabilité de l'événement A est $\frac{3}{8}$ et on écrit $p(A) = \frac{3}{8}$

1) Déterminer les évènements B et C et donner p(B) et p(C).

2) a) Déterminer $A \cup B$

b) Déterminer $p(A \cup B)$ et vérifier que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

c) A-t-on $p(B \cup C) = p(B) + p(C)$?

Définition

Ω étant un ensemble fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

On appelle probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ toute application $p: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ vérifiant:

a) $p(\Omega) = 1$

b) Pour tout (A, B) de $\mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $A \cap B = \varnothing$.

On a $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

• Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ est appelé espace probabilisé fini.

Activité 5

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ est un espace probabilisé fini avec $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

Montrer que $\boxed{\sum_{i=1}^{n} p(\{e_i\}) = 1}$

Activité 6

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, e_3\}$ et p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$, telle que :

$p(\{e_1\}) = \frac{1}{4}$ et $p(\{e_2\}) = \frac{1}{5}$

a) montrer que $p(\{e_3\}) = \frac{11}{20}$

b) Déterminer $\mathcal{P}(\Omega)$ et calculer la probabilité de chacun de ses éléments.

Activité 7

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini.

1) Soit $A_1, A_2, \ldots, A_k$ des évènements deux à deux incompatibles,

Montrer que $p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_k)$

2) Posons $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans le cas ou tous les réels $p(\{ei\})$ $1 \leq i \leq n$, sont égaux on dit que les évènements élémentaires sont équiprobables

a) Montrer dans ce cas que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $p(\{ei\}) = \frac{1}{n}$.

b) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$; tel que $\mathrm{Card}A = m$. ($0 \leq m \leq n$)

Montrer que $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{\mathrm{card}A}{\mathrm{card}\Omega}$

Théorème

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini
tel que tous les évènements élémentaires sont équiprobables.

Pour tout évènement A de $\mathscr{P}(\Omega)$ on a : $p(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{\text{card} A}{\text{card} \Omega}$

Dans le cas d'équiprobabilité on dit que :

$p(A) = \dfrac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}}$

EXERCICE RESOLU :

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.

1) Déterminer l'univers des cas possibles.

2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : ‘‘ obtenir deux fois pile ’’

B : ‘‘ obtenir pile au premier lancer et face au troisième lancer’’

C : ‘‘ obtenir au moins une fois face ’’.

Solution:

1) Si on note P et F respectivement les cotés pile et face de la pièce de monnaie, une éventualité dans cette épreuve est un triplet de l'ensemble {P, F}.

Pour simplifier, le triplet (F, P, F) par exemple sera noté FPF et signifie qu'on a obtenu face dans le 1^{er} lancer, pile dans le $2^{ème}$ lancer et face dans le $3^{ème}$ lancer

Ainsi Ω={PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF} et card $\Omega = 8$.

2) La pièce étant non truquée, les événements élémentaires sont équiprobables.

Pour tout $w \in \Omega$, $p(\{w\}) = \dfrac{1}{8}$

On a : A = {PPF, PFP, FPP}, donc $p(A) = \dfrac{3}{8}$

B = {PPF, PFF}, donc $p(B) = \dfrac{1}{4}$

C = Ω-{PPP} d'où $p(C) = \dfrac{7}{8}$

PROPRIÉTÉS D'UNE PROBABILITÉ :

Activité 8

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini

Démontrer les propriétés suivantes :

$\boxed{P_1}$ Pour tout A de $\mathscr{P}(\Omega)$; $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

En déduire que $p(\varnothing) = 0$

$\boxed{P_2}$ Pour tous A et B de P (Ω), si $A \subset B$ alors $p(A) < p(B)$

$\boxed{P_3}$ Pour tous A et B de P (Ω), $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

- A titre d'exemple, on donne la démonstration de P_3

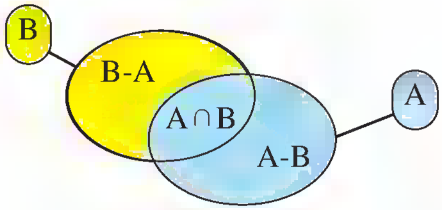
On a : $A \cup B = (A-B) \cup (B-A) \cup (A \cap B)$

Les parties (A-B), (B-A) et $A \cap B$ sont deux à deux disjointes.

Donc $p(AUB) = p(A-B) + p(B-A) + p(A \cap B)$ (1)

D'autre part : $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ et les parties (A-B) et $(A \cap B)$ sont disjointes donc $p(A) = p(A-B) + p(A \cap B)$ et par suite :

$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$ (2)



De même on démontre que $p(B-A) = p(B) - p(A \cap B)$ (3)

(1), (2) et (3) donnent : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Activité 9

Montrer que pour tous A, B et C de $\mathcal{P}(\Omega)$

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$

EXERCICES RESOLUS :

EXERCICE 1 :

Dans une ville 50 % des habitants parlent le français, 20% parlent l'anglais et 10% des habitants parlent le français et l'anglais à la fois.

Un habitant est pris au hasard, calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) l'habitant parle le français ou l'anglais

b) l'habitant ne parle ni français ni anglais

c) l'habitant parle le français sans parler anglais

Solution :

Soit Ω l'ensemble des habitants de la ville. Notons :

F l'évènement : " l'habitant parle français "

A l'évènement : " l'habitant parle anglais "

On a donc $p(F) = 0{,}5$; $p(A) = 0{,}2$ et $p(F \cap A) = 0{,}1$

a) Il s'agit de l'évènement $F \cup A$

$$\begin{aligned} p(F \cup A) &= p(F) + p(A) - p(F \cap A) \\ &= 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}1 \\ &= 0{,}6 \end{aligned}$$

b) Il s'agit de $\overline{F \cup A}$

$p(\overline{F \cup A}) = 1 - p(F \cup A)$

$= 1 - 0{,}6$

$= 0{,}4$

c) Il s'agit de F-A

$p(F - A) = p(F) - p(F \cap A)$

$= 0{,}5 - 0{,}1$

$= 0{,}4$

EXERCICE 2 :

On tire simultanément et au hasard 5 cartes d'un jeu ordinaire de 32 cartes.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : ‘‘ obtenir exactement trois cartes cœurs ’’

B : ‘‘ obtenir au moins une carte cœur ’’

C : ‘‘ obtenir 2 as et 3 cartes carreaux ’’

Solution :

• Rappelons d'abord qu'un jeu ordinaire de 32 cartes est composé comme suit : les ‘‘valeurs’’ sept, huit, neuf, dix, valet, dame, roi et as, chacune en quatre ‘‘couleurs’’ : trèfle, pique, cœur et carreau.

L'univers Ω des cas possibles dans cette épreuve est l'ensemble des parties de 5 cartes parmi 32.

Il y a donc $C_{32}^{5} = 201376$ cas possibles.

• Comme le tirage est au hasard, les évènements élémentaires sont équiprobables.

La probabilité de chacun est $\dfrac{1}{201376}$

a) Un cas favorable de l'évènement A est formé par 3 cartes cœurs parmi 8 et 2 cartes ‘‘ non cœur’’ parmi 24 donc card (A) $= C_{8}^{3} \times C_{24}^{2} = 15456$

$$p(A) = \frac{C_{8}^{3} \times C_{24}^{2}}{C_{32}^{5}} = \frac{69}{899} \approx 0{,}077$$

b) Dans cette question il est plus simple de calculer $p(\overline{B})$.

$\overline{B}$ est l'évènement suivant : ‘‘les cinq cartes tirées ne sont pas des cartes cœurs’’.

Ainsi card $(\overline{B}) = C_{24}^{5} = 42504$

$$p(\overline{B}) = \frac{C_{24}^{5}}{C_{32}^{5}} = \frac{42504}{201376} = \frac{759}{3596} \approx 0{,}211 \text{ d'où } p(B) = 1 - p(\overline{B}) = \frac{2837}{3596} \approx 0{,}789$$

c) Pour déterminer le nombre de cas favorables dans C, il faut éviter le raisonnement faux : choisir 2 as parmi 4 puis choisir 3 cœurs parmi 8.

En effet un cas favorable à C est composé comme suit :

‘‘ l’as carreau, un as non carreau, deux carreau parmi 7 et d’une carte ni as ni carreau parmi 21 **ou** 2 as non carreaux et 3 cartes carreaux parmi 7 ’’.

D’où card C = $C_1^1 \times C_3^1 \times C_7^2 \times C_{21}^1 + C_3^2 \times C_7^3 = 1428$

Par suite $p(C) = \dfrac{51}{7192} \approx 0,007$

EXERCICE 3 :

Une boite contient 3 jetons blancs, 4 jetons rouges et 5 jetons noires, tous indiscernables au toucher.

On tire au hasard trois jetons successivement sans remise

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A : ‘‘ les trois jetons tirés sont de la même couleur’’

b) B : ‘‘ les trois jetons tirés sont tous de couleurs différentes’’

c) C : ‘‘ les trois jetons tirés sont de deux couleurs différentes seulement’’.

Solution :

L’univers Ω associé à cette épreuve est l’ensemble des arrangements de 3 jetons parmi 12.

Ainsi Card $\Omega = A_{13}^3 = 12 \text{ x } 11 \text{ x } 10 = 1320$

a) L’évènement A est réalisé avec : 3 jetons blancs ou 3 jetons rouges ou 3 jetons noirs.

Donc Card $A = A_3^3 + A_4^3 + A_5^3 = 90$

D’où $p(A) = \dfrac{90}{1320} = \dfrac{3}{44}$

b) B est réalisé avec un jeton blanc et un jeton rouge et un jeton noir dans un ordre quelconque.

D’où Card $A = A_3^1 \times A_4^1 \times A_5^1 \times 3! = 360$

Par suite $p(B) = \dfrac{360}{1320} = \dfrac{3}{11}$

c) On remarque que $\overline{C} = A \cup B$

Comme $A \cap B = \emptyset$ alors $p(\overline{C}) = p(A) + p(B) = \dfrac{3}{44} + \dfrac{3}{11} = \dfrac{15}{44}$

$p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \dfrac{15}{44} = \dfrac{29}{44}$

Activité 10

Reprendre l’exercice précédent avec un tirage successif avec remise.

Résumé

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini

$p(\Omega) = 1$, $p(\varnothing) = 0$

Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $p(A) \in [0, 1]$; $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega) \times \mathscr{P}(\Omega)$,

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$

Si les évènements élémentaires sont équiprobables, pour tout événement A on a :

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombres des cas possibles}}$$

01 Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé fini et A et B deux évènements de Ω

a) Comparer $p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$ et $p(A)$.

b) Calculer $p(B)$ Sachant que $p(A) = 0{,}42$ $p(A \cap B) = 0{,}10$ et $p(A \cup B) = 0{,}67$

c) Calculer $p(A \cap B)$ Sachant que $p(A) = 0{,}5$, $p(B) = 0{,}2$ et $p(A \cup B) = 0{,}6$

02 Soit un ensemble $\Omega = \{a, b, c, d\}$ et une probabilité définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ par :

$p(\{a\}) = \frac{1}{2}$, $p(\{b\}) = \frac{1}{4}$ et $p(\{c\}) = 2\,p(\{d\})$

Déterminer $p(\{d\})$, $p(\{c\})$, $p(\{a, c, d\})$

03 On jette deux dés cubiques différents D_1 et D_2 dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On se place dans l'hypothèse de l'équiprobabilité

a) Calculer la probabilité des évènements suivants:

A:" Obtenir au moins une face supérieure qui porte le nombre 1".

B:" Obtenir une somme égale à 5 ".

b) Définir les évènements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$ $A \cup B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ puis calculer leurs probabilités respectives.

04 Une urne contient cinq boules rouges et trois boules noires. L'épreuve consiste à extraire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

a) Définir l'univers Ω des cas possibles et calculer card Ω.

b) Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules rouges et une boule noire.

c) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule rouge et deux boules noires.

d) Déterminer la probabilité d'obtenir trois boules de même couleur.

05 Une urne contient 5 boules rouges, 4 boules noires et une boule blanche, indiscernables au toucher.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants:

A:" Deux boules au moins, parmi les trois, sont rouges"

B:"Deux boules au moins, parmi les trois, sont de même couleur"

C:"les trois boules sont de couleurs différentes"

Calculer p (A), p (B) et p (C).

06 On prend au hasard trois élèves dans un groupe de 15 élèves dont cinq de la section sciences techniques.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants:

a) Aucun élève n'est de la section sciences techniques.

b) Un élève et un seul est de la section sciences techniques.

c) Au moins un élève est de la section sciences techniques.

07 Un club comporte 100 membres (hommes et femmes), Parmi les membres du club 48 hommes et 12 femmes parlent une langue étrangère.

16 hommes et 24 femmes ne parlent aucune langue étrangère. On choisit une personne au hasard.

Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) La personne choisie est un homme.

b) La personne choisie est une femme.

c) La personne choisie parle une langue étrangère.

d) La personne choisie ne parle aucune langue étrangère.

e) La personne choisie est un homme parlant une langue étrangère.

08 Dans le dépôt d'une usine, il y a un lot de 20 pièces ; 4 d'elles sont défectueuses et les 16 autres sont bonnes. Le magasinier prélève simultanément et au hasard 4 pièces parmi les 20 pièces.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : "les 4 pièces prélevées sont défectueuses "

B : "L'une au moins des 4 pièces prélevées est défectueuse"

C : " 3 au moins des 4 pièces prélevées sont défectueuses"

09 On distribue au hasard à un joueur 8 cartes d'un jeu de 32 cartes.

Calculer la probabilité pour que la "main" de 8 cartes contienne:

a) Un carré d'as.

b) deux carrés.

c) Un carré exactement.

d) Au moins un as

10 Un accident de travail s'est produit dans un chantier. 5 ouvriers ont été témoins; parmi eux on sait que deux seulement sont menteurs, mais on ignore lesquels.

On choisit au hasard deux témoins et on les questionne sur cet accident.

Quelle probabilité a-t-on:

a) D'obtenir à chaque fois une description véridique de l'accident.

b) D'obtenir deux versions contradictoires

c) D'obtenir deux versions fausses.

11 Un sac contient n jetons noirs ($n \geq 2$) et 10 jetons rouges. On tire au hasard et simultanément 2 jetons du sac. Déterminer l'entier naturel n pour que la probabilité d'avoir 2 jetons noirs soit égale à $\frac{2}{7}$.

12 Dans une usine, il y a 12 ouvriers spécialisés et 8 manœuvres. Le patron choisit 3 au hasard pour faire un stage à l'étranger.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants:

A :" Le patron a choisi deux ouvriers spécialisés"

B : "Le patron a choisi un ouvrier spécialisé "

C :" Le patron a choisi au moins un manœuvre ".

D : " Le groupe choisi est de la même catégorie''

13 Une boite contient 15 jetons dont 4 rouges et 11 blancs On tire simultanément 4 jetons. On suppose que les triages sont équiprobables.

1) Quelle est la probabilité pour que les 4 jetons soient blancs?

2) Quelle est la probabilité pour qu'aucun jeton ne soit blanc?

3) Quelle est la probabilité pour qu'un jeton au moins soit blanc?

14 Un sac contient : cinq boules rouges numérotées : 1, 1, 1, 0, 0 et quatre boules vertes numérotées : 1, 1, 1, 0 .

Les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir 3 boules de même couleur »

B : « obtenir 3 boules portant le même numéro »

2) a) Calculer p $(A \cap B)$.

b) Quelle est la probabilité d'avoir 3 boules de même couleur ou 3 boules portant le même numéro

15 Une urne contient 6 boules :

3 rouges, 2 noires et une jaune.

1) On tire simultanément 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir exactement deux boules rouges »

B : « Obtenir au plus deux boules rouges »

C : « Obtenir au moins une boule rouge ».

2) On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « Le tirage est tricolore ».

F : « Le tirage est monocolore ».

G : « Le tirage est bicolore ».

H : « La boule jaune apparaît pour la première fois au deuxième tirage ».

K : « La boule jaune apparaît pour la dernière fois au deuxième tirage »

16 Une urne contient 5 boules noires et 5 boules rouges

1) On tire simultanément 3 boules.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « obtenir exactement une boule noire »

B : « obtenir au moins une boule noire »

C : « obtenir trois boules noires ».

b) On gagne 5 dinars pour chaque boule noire obtenue.

Soit X le réel qui prend pour valeur la somme gagnée

(i) Déterminer l'ensemble E de valeurs k prises par X

(ii) Calculer la probabilité de chacun des événements $\{X=k\}$.

17 Une urne contient 7 boules: 5 noires et 2 blanches indiscernables au toucher.

On extrait ces 7 boules l'une après l'autre sans remettre la boule tirée dans l'urne.

1) Déterminer l'univers Ω des cas possibles et calculer Card (Ω)

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : ‘‘ La $1^{\text{ère}}$ boule tirée est blanche’’.

F : ‘‘ La $1^{\text{ère}}$ boule tirée est noire et la $2^{\text{ème}}$ est blanche’’.

G : ‘‘ La $1^{\text{ère}}$ boule blanche tirée est en $3^{\text{ème}}$ position’’.

H : ‘‘ La $1^{\text{ère}}$ boule blanche tirée est en $6^{\text{ème}}$ position’’.

18 Un sac contient : cinq jetons rouges numérotées : 1, 2, 2, 3, 3 , trois jetons vertes numérotées : 2, 2, 3 et deux jetons blancs numérotées : 3, 4

Les jetons sont indiscernables au toucher

1) On tire simultanément 3 jetons du sac

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : ‘‘ obtenir 3 jetons de même couleur’’

B : ‘‘ obtenir 3 jetons de même numéro’’

C : ‘‘ obtenir au moins un jeton portant un numéro pair’’

b) Chaque jeton rouge rapporte un dinar

Chaque jeton vert rapporte 2 dinars

Chaque jeton blanc ne rapporte rien.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « On gagne 6 dinars »

F : « On gagne 8 dinars »

2) On tire au hasard, l'un après l'autre et sans remise tous les jetons du sac.

a) Calculer la probabilité pour que le premier jeton soit blanc

b) Calculer la probabilité pour que le premier jeton vert tiré apparaisse pour La première fois au troisième tirage.

3) On effectue n tirages successifs d'un jeton en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac Calculer la probabilité d'avoir au moins un jeton numéro 2

19 Un sac contient : deux jetons rouges numérotés : -1, -1 et Cinq jetons blancs numérotés : 0, 1, 1, 1, 1

1) On tire simultanément 2 jetons de l'urne

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir deux jetons de même couleur»

B :« Obtenir deux jetons de même numéro »

C :« Obtenir deux jetons de même numéro et de même couleur »

D : « Obtenir deux jetons de même numéro ou de même couleur »

E : « Obtenir une somme nulle ».

F : « Obtenir un produit nul ».

2) Soit X le réel égal à la somme des chiffres marqués sur les deux jetons

a) Déterminer l'ensemble E de valeurs k prises par X.

b) Calculer la probabilité de chacun des événements $\{X=k\}$.

3) On tire successivement 2 jetons de la manière suivante :

- Si le jeton tiré est rouge, on le garde à l'extérieur

- S'il est blanc on le remet dans le sac

Calculer la probabilité d'obtenir deux jetons de couleurs différentes

20 Une urne contient n boules bleues ($n \geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes.

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1) Calculer la probabilité p_n d'obtenir 2 boules de même couleur.

2) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Ce résultat est-il prévisible ?

21 Chacun des quatre ingénieurs A, B, C et D dans une société laisse la clef de sa voiture, en entrant au travail chez le gardien du parking.
Un jour, le gardien est absent ; son remplaçant remet au hasard une clef à chaque ingénieur.
Calculer la probabilité de chacun des évènements:
E_1 " Les quatre ingénieurs retrouvent leur clef"
E_2 " Deux ingénieurs seulement retrouvent leur clef"
E_3 " L'ingénieur A est le seul à retrouver sa clef"

22 Dans un jeu de 32 cartes, on a remplacé une carte autre que le Valet carreau par un second Valet carreau.
Une personne prend au hasard et simultanément 3 cartes parmi les 32.
Quelle est la probabilité pour qu'elle s'aperçoive que le jeu est truqué?

23 On considère 3 billes numérotées 1, 2, 3, qui peuvent être mises dans 3 trous a, b et c. Chaque trou peut contenir les trois billes.
On étudie l'épreuve qui consiste à mettre chaque bille dans l'un des trous
1) Déterminer le cardinal de l'univers des cas possibles Ω
2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants:
A: " L'un des trous contient au moins deux billes ".
B: " Chaque trou contient une bille".
C: " L'un des trous contient les trois billes".

24 Un dé tétraédrique régulier a ses 4 faces numérotées 1, 2, 5, 10.
Lorsque le dé repose sur une face, trois faces sont alors visibles.
Lorsqu'on lance le dé, la probabilité pour qu'il se pose sur une face donnée est proportionnelle au nombre marqué sur cette face.
1) Déterminer la probabilité pour que le dé se pose respectivement sur les faces 1, 2, 5 et 10.
2) On lance le dé une fois et on désigne par S la somme des nombres visibles. Calculer la probabilité des événements suivants :
a) la somme S est égale à 8
b) la somme S est égale à 16
c) la somme S est supérieure ou égale à 16

25 On tire au hasard et simultanément trois cartes d'un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants:
A " Les trois cartes tirées sont des trèfles".
B " Les trois cartes tirées constituent une tierce"
C'est-à-dire trois trèfles, trois carreaux, trois cœurs ou trois piques qui se suivent.

26 On considère un dé cubique non pipé dont trois faces portent le numéro 3, deux faces le numéro 2 et une face le numéro 1.
1) Déterminer l'espace probabilisé qui permet d'étudier l'épreuve suivante: jeter le dé, attendre qu'il s'immobilise et examiner le point marqué sur la face supérieure.
2) Déterminer l'espace probabilisé qui permet d'étudier l'épreuve suivante: jeter deux dés indiscernables du type précédent, attendre qu'ils s'immobilisent et examiner les points marqués sur les faces supérieures.

Calculer dans ce cas la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : " Les deux points obtenus sont pairs''.

B : " Les deux points obtenus sont impairs''.

C :" La somme des points obtenus est paire''.

27 On jette deux dés cubiques, les six faces de chaque dé sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un six (Les dés sont supposés parfaits).

28 Un joueur utilise un dé à six faces qui a été truqué.

La probabilité de voir apparaître chacun des six numéros est donnée par le tableau suivant:

Numéro	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,4	0,15	0,15	0,05	a	b

1) Calculer p (5) et p (6), sachant que :
 p (5) = 4 p (6)

2) Calculer la probabilité d'obtenir un numéro pair?

29 Dans une urne il y a n boules rouges et 2n boules blanches, indiscernables au toucher

On tire simultanément p boules au hasard et sans remise.

1) Si n = 5 et p = 4, quelles sont les probabilités;

a) d'obtenir 2 boules rouges et 2 boules blanches?

b) d'obtenir au moins une boule blanche?

2) Si n est entier naturel non nul quelconque et p = 2.

a) Quelle est la probabilité p_n d'obtenir deux boules de couleurs différentes?

b) Quel est le sens de variation de la suite (p_n)?

c) Déterminer la limite de cette suite.

Les problèmes du chevalier de Méré

Les Historiens situent la naissance du calcul des probabilités dans un échange de correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat (en 1654), à propos de deux problèmes posés par le chevalier de Méré.

Le premier problème du chevalier de Méré :
A-t-on plus de chances d'obtenir un six (au moins une fois) en lançant un dé quatre fois, ou d'obtenir un double-six (au moins une fois) en lançant deux dés 24 fois ?

Le deuxième problème du chevalier de Méré :
Deux joueurs A et B engagent chacun 32 pistoles dans le jeu suivant : on lance une pièce de monnaie jusqu'à l'apparition de 3 piles ou de 3 faces (pas forcément consécutives). Si les 3 piles sortent d'abord, le joueur A gagne, sinon B gagne.
(Ainsi le jeu se termine en 5 lancers au plus.) Le vainqueur emporte les 64 pistoles.
"Au premier lancer, pile sort. Mais pour une raison mystérieuse, on doit arrêter le jeu.
Comment répartir les 64 pistoles ?"

- Blaise Pascal : (1623-1662), mathématicien, physicien, théologien, mystique, philosophe, moraliste et polémiste français du XVIIe siècle, passionné de mathématiques dès son plus jeune âge (il écrit à 16 ans ''un Essay pour les coniques''), il abandonne les sciences à 21 ans pour la théologie. Plus tard, Pascal se « remet » aux sciences : la géométrie, l'analyse infinitésimale, les probabilités, ...

- Pierre de Fermat : (1601-1665) Un génial mathématicien français du XVIIe siècle, qui a contribué avec Descartes à la création de la géométrie analytique (il est le premier à donner une méthode générale pour la détermination des tangentes à une courbe plane), à celle du calcul infinitésimal (avec Leibniz et Newton), et à celle du calcul des probabilités (avec Pascal). C'est surtout le fondateur de la théorie moderne des nombres, la branche des mathématiques qui étudie les nombres entiers.

- Le chevalier de Méré : Un noble de la cour de Louis XIV. Selon une lettre de Pascal à Fermat (datant du 29/07/1654)," il avait très bon esprit, mais n'était pas géomètre" .

Chapitre 10
Statistiques

« Dans un avenir rapproché, pour être un citoyen effectif, il sera aussi important de savoir raisonner statistiquement que de savoir lire et écrire » H.G.Wells

INTRODUCTION

En classe de 2ème année secondaire, les élèves ont été initiés à l'étude d'une série statistique à un caractère.

Dans ce chapitre les élèves apprendront à étudier une série statistique à deux caractères.

Auparavant nous proposons quelques activités à titre de rappel.

Activité 1

Une enquête statistique faite sur l'ensemble des élèves de troisième d'un lycée, afin de déterminer le nombre d'enfants par famille, a donné les résultats suivants :

3	1	3	1	4	2	3	5	3	2
2	4	2	3	6	4	2	3	5	4
1	2	1	2	5	3	2	3	1	3
2	6	3	1	3	4	2	4	3	5

a) Quel est le caractère étudié ?

b) Organiser les données dans un tableau faisant apparaître les effectifs.

c) Construire un diagramme en bâtons des effectifs.

d) Déterminer les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants.

e) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et le polygone des effectifs cumulés décroissants dans un même graphique.

Activité 2

Le nombre d'interventions journalières des pompiers d'une ville durant une année est résumé dans le tableau suivant :

Nombre d'interventions journalières : x_i	0	1	2	3	4	5	6
Effectif : n_i	84	105	72	59	28	15	2

1) Déterminer les fréquences cumulées croissantes et les fréquences cumulées décroissantes.

2) Quel est le mode de cette série ?

3) Déterminer la moyenne, la médiane et les quartiles Q_1 et Q_3 de cette série.

Les paramètres de position d'une série statistique sont :

- la moyenne est : $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{n}$
- Un mode : C'est une valeur du caractère pour laquelle l'effectif est le plus élevé.
- La médiane : est la valeur M_e du caractère telle que l'effectif des individus dont la valeur du caractère est inférieure à M_e est égal à l'effectif des individus dont la valeur du caractère est supérieure à M_e.
- C'est aussi la valeur du caractère qui correspond à un effectif cumulé égal à $\frac{n}{2}$ (ou $\frac{n+1}{2}$)
- Les quartiles : Q_1 , Q_2 , Q_3

• Q_1 est la valeur du caractère pour laquelle 25% de l'effectif ont des valeurs du caractère inférieure ou égale à Q_1,

• Q_1 est aussi la valeur du caractère qui correspond à une fréquence cumulée croissante égale à $\frac{1}{4}$.

• Q_2 est la médiane.

• Q_3 est la valeur du caractère pour laquelle 75% de l'effectif ont des valeurs du caractère inférieures ou égales à Q_3.

• Q_3 est aussi la valeur du caractère qui correspond à une fréquence cumulée croissante égale à $\frac{3}{4}$.

Activité 3

Une entreprise a effectué une étude statistique sur la durée de vie X des compresseurs qu'elle fabrique. Le tableau ci-dessous rend compte de cette étude.

Durée de vie en heures	Nombre de compresseurs
[50 000; 6 0 000 [	1 800
[60 000; 7 0 000 [	3 200
[70 000; 8 0 000 [	5 300
[80 000; 9 0 000 [	2 700
[90 000; 1 00 000[	2 000

1) Calculer la durée de vie moyenne $\overline{X}$ des compresseurs et l'écart-type σ de cette série statistique.
(Les résultats seront arrondis à l'unité)

2) Quel est le nombre de compresseurs qui appartient à l'intervalle
$\left[\overline{X}-\sigma \ , \ \overline{X}+\sigma\right]$
L'exprimer en pourcentage du nombre total de compresseurs.

On rappelle que pour une serie statistique :

❖ La variance est : $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \left(\overline{X}\right)^2$

❖ L'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque :

Pour des séries statistiques continues et relativement symétriques :

Au moins 68% de l'effectif a une valeur du caractère qui appartient à l'intervalle

$\left[\overline{X}-\sigma \ , \ \overline{X}+\sigma\right]$

Au moins 75% de l'effectif a une valeur du caractère qui appartient à l'intervalle

$\left[\overline{X}-2\sigma \ , \ \overline{X}+2\sigma\right]$

Au moins 88% de l'effectif a une valeur du caractère qui appartient à l'intervalle

$\left[\overline{X}-3\sigma \ , \ \overline{X}+3\sigma\right]$

Si l'écart type d'une série est faible, les intervalles précédents sont de faibles amplitudes. Dans ces conditions, la moyenne est fiable et fournit un bon renseignement sur le caractère étudié

Activité 4

On a relevé le prix de vente en millimes d'un CD et le nombre de CD vendus chez différents fournisseurs.
Les résultats forment une série statistique à une variable, donnée dans le tableau suivant :

Prix de vente en millimes	350	400	450	500	600
Nombre de CD vendus	83	48	32	20	17

a) Quelles sont les différentes valeurs de la série ?

b) Donner la fréquence de chacune de ces valeurs.

c) Donner la moyenne et l'écart-type de la série. Que représentent ces nombres?

d) Représenter cette série par un diagramme en bâtons

e) Déterminer le mode et la médiane de cette série.

Activité 5

Une classe compte 15 filles et 15 garçons.

On a relevé les tailles en cm des élèves de cette classe et obtenu les listes suivantes :

Filles : 155, 164, 162, 168, 158, 164, 152, 160, 158, 162, 155 160, 158, 160, 150

Garçons : 159, 161, 170, 168, 170, 159, 162, 167, 168, 165, 174, 170, 168, 171, 172

1) a) Calculer la moyenne des tailles des filles puis celle des tailles des garçons.

   b) En déduire la moyenne des tailles des élèves de la classe.

2) a) Déterminer une médiane des tailles des filles puis des tailles des garçons.

   b) Déterminer une médiane des tailles des élèves de la classe.

3) Calculer l'écart-type de la série des tailles des filles, puis celui de la série des tailles des garçons. Quelle est la série la plus dispersée ?

4) On décide d'évaluer la dispersion des tailles en utilisant l'écart interquartile. Calculer l'écart interquartile de chacune de deux séries. Conclure

Les paramètres de dispersion d'une série statistique

- **étendue:** c'est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs
- **variance et écart-type:** calculés généralement en complément de la moyenne, pour mesurer la plus ou moins grande dispersion autour de celle-ci.
- **écart interquartile**: $(Q_3 - Q_1)$ mesure la dispersion des 50 % valeurs les plus centrales

Exercice résolu n°: 1

Le tableau suivant donne la répartition de 80 familles suivant le nombre d'enfants :

Nombre d'enfants x_i :	0	1	2	3	4	5	6	7
Effectif n_i	5	3	14	24	20	9	2	3

1) Déterminer les fréquences cumulées croissantes (en pourcentage) de cette série.

2) a) Déterminer le mode et la médiane de cette série.

   b) Déterminer les quartiles Q_1 et Q_3.

3) Déterminer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série.

Solution :

On dispose les calculs de la manière suivante :

❖ P_i désigne la fréquence en pourcentage associée au caractère x_i.

❖ $P_i^{\nearrow}$ désigne la fréquence cumulée croissante en pourcentage associée à x_i.

1)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	Total
n_i	5	3	14	24	20	9	2	3	80
p_i	6,25	3,75	17,5	30	25	11,25	2,5	3,75	100
$P_i^{\nearrow}$	6,25	10	27,5	57,5	82,5	93,75	96,25	100	
$n_i.x_i$	0	3	28	72	80	445	12	21	261
$ni.x_i^2$	0	3	56	216	320	255	72	147	1069

2) a) De la lecture du tableau on déduit :

- Le mode est 3 enfants car cette valeur du caractère correspond au plus haut effectif.
- De même la médiane est 3 puisque la fréquence cumulée croissante en pourcentage est 57,5 (immédiatement supérieure à 50%).

b) $Q_1 = 2$ et $Q_3 = 4$

3) $\overline{X} = \frac{1}{80}\sum_{i=1}^{8} n_i.x_i = \frac{261}{80} = 3,3$ (3,3 signifie que 10 familles ont en moyenne 33 enfants)

$$V(X) = \frac{1}{80}\sum_{i=1}^{8} n_i.x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1069}{80} - \left(\frac{261}{80}\right)^2 \simeq 2,72$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 1,6$$

Exercice résolu n° : 2

La série suivante donne la répartition des notes d'oral en mathématiques de 145 candidats admissibles à l'écrit d'un examen.

Notes	[0,5[	[5,8[	[8,10[	[10, 12[	[12, 15[	[15, 18[	[18,20[
Nombre de candidats	5	7	6	17	57	40	13

1) a) Construire l'histogramme des effectifs de cette série.

   b) Déterminer la classe modale.

2) a) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants.

   b) Déterminer graphiquement la médiane M_e de cette série.

   c) Déterminer M_e par le calcul.

3) Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.

Solution :

1) a) Remarquons que les classes n'ont pas la même amplitude. Choisissons 2 comme unité d'amplitude.

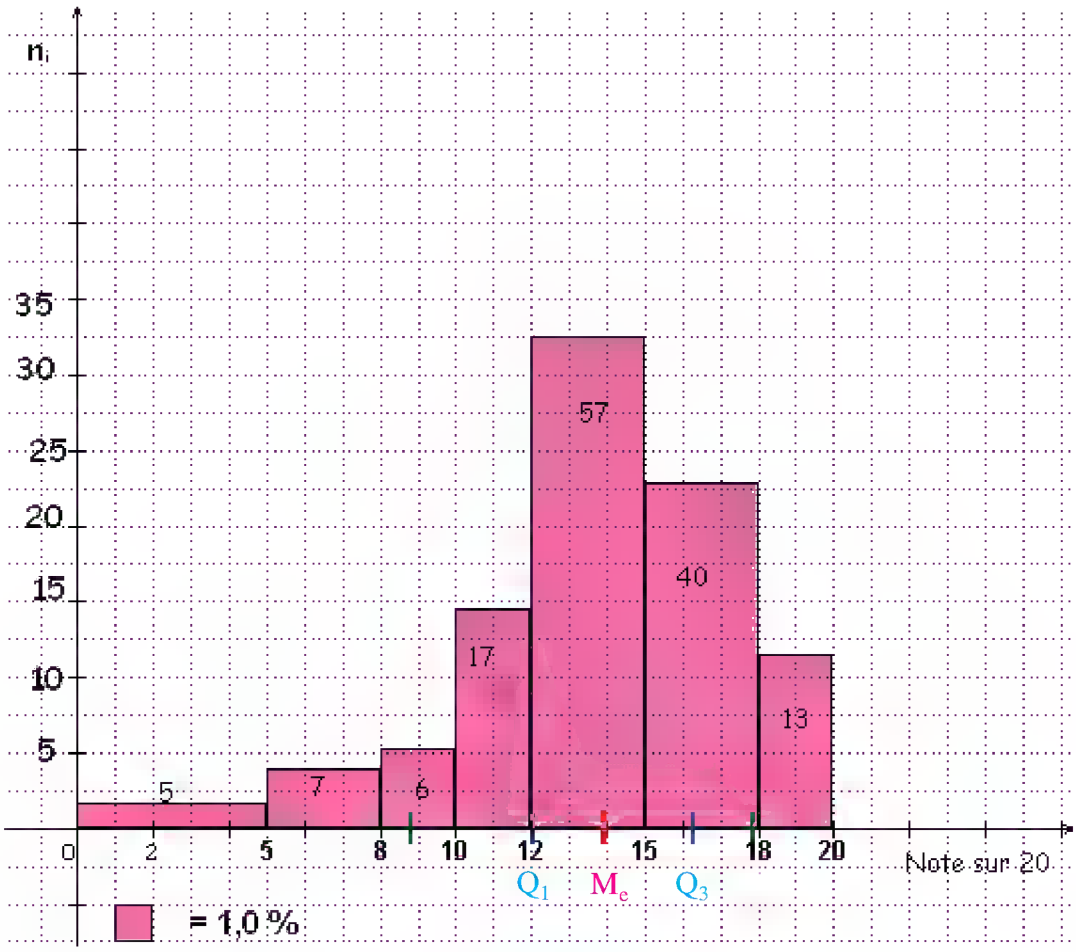
Soit hi la hauteur du rectangle de l'histogramme associé à la classe $[x_i , x_i +1[$, on a :

$h_i = n_i . \frac{2}{x_{i+1} - x_i}$ On obtient le tableau suivant :

Classe	[0,5[	[5,8[	[8,10[	[10, 12[	[12, 15[	[15, 18[	[18,20[
n_i	5	7	6	17	57	40	13
h_i	2	4,6	6	17	38	26,6	13

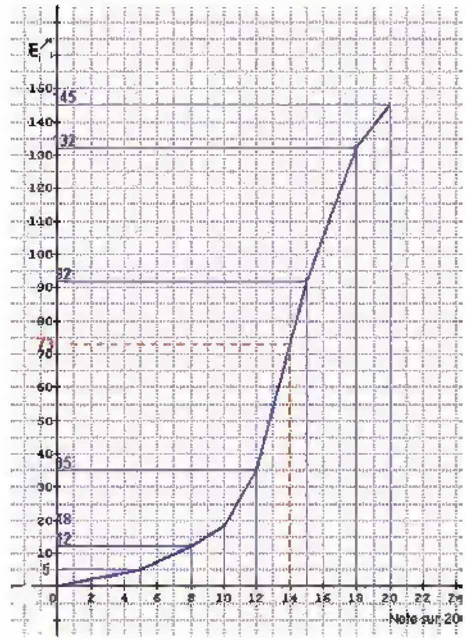
D'où l'histogramme suivant :

b) L'histogramme des effectifs montre bien que la classe modale est [12, 15[



2) a) Déterminons d'abord les effectifs cumulés croissants :

Classes	n_i	$E_i^{\nearrow}$
[0,5[	5	5
[5,8[	7	12
[8,10[	6	18
[10, 12[	17	35
[12, 15[	57	92
[15, 18[	40	132
[18, 20]	13	145



Rappelons qu'on obtient le polygone des effectifs croissants en joignant les points de coordonnées $(x_{i+1}, E_i^{\nearrow})$, le premier point étant $(x_1, 0)$

b) L'effectif total de cette série est

n = 145. C'est un nombre impair.

La médiane Me de cette série est donc la valeur du caractère correspondant à un effectif cumulé égal à $\dfrac{n+1}{2}$ c'est-à-dire 73.

Par lecture directe du graphique on trouve $M_e \simeq 14$ c'est-à-dire 50% des candidats ont une moyenne supérieure à 14.

c) Retrouvons M_e par le calcul.

La recherche de l'effectif cumulé 73 dans le tableau des effectifs cumulés croissants permet d'affirmer que Me appartient à la classe [12, 15[.

On dispose les calculs de la manière suivante :

x_i	$E_i^{\nearrow}$
12	35
M_e	73
15	92

$\dfrac{M_e - 12}{15 - 12} = \dfrac{73 - 35}{92 - 35}$. Le calcul donne $M_e = 14$

3) Pour calculer la moyenne et l'écart type de cette série, dressons le tableau suivant :

Classes	[0,5[	[5,8[	[8,10[	[10, 12[	[12, 15[	[15, 18[	[18, 20]	
C_i	2,5	6,5	9	11	13,5	16,5	19	Total
n_i	5	7	6	17	57	40	13	145
n_iC_i	12,5	45,5	54	187	769,5	660	247	1975,5
$n_i^2 C_i$	31,25	295,75	486	2057	10388,25	10890	4693	28841,25

❖ Dans ce tableau C_i désigne le centre de la classe $[x_i , x_{i+1}[$, $C_i = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{2}$

❖ $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} c_i n_i = \dfrac{1975,5}{145} \simeq 13,6$

❖ $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} c_i^2 \; n_i - \overline{X}^2 = \dfrac{28841,25}{145} - (13,6)^2 \simeq 13,29$

❖ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 3,64$

Activité 6

Une machine remplit automatiquement des paquets de farine (marqués 1 kg).

Un échantillon de 100 paquets fournit les renseignements suivants (en g) :

Masse (g)	Effectifs
[992 ; 996[	3
[996 ; 1 000[	5
[1 000 ; 1 004[	24
[1 004 ; 1 008[	35
[1 008 ; 10 12[	21
[1 012 ; 1 016[	12

1) Calculez les fréquences en pourcentages, les fréquences cumulées croissantes et les fréquences cumulées décroissantes
2) Tracez, dans le même repère, les polygones des fréquences cumulées croissantes et des fréquences cumulées décroissantes
3) Déterminez graphiquement la médiane
4) Calculez la moyenne et l'écart-type de cette série.
5) Dire si la machine est bien réglée ? Il est nécessaire pour cela que la moyenne soit comprise entre 1004 et 1012 et que l'écart-type soit inférieur à 2g et que 68% de l'échantillon soit dans l'intervalle $\left[\overline{X} - \sigma \; , \; \overline{X} + \sigma\right]$

Activité 7

La série suivante donne la taille en cm des 550 nourrissons nés dans une maternité

Taille x_i	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
Nombre	20	31	52	56	65	90	80	82	38	18	9	9

a) Donnez les différents paramètres de position et de dispersion de cette série.

b) Dessinez le diagramme en boîtes de cette série.

Activité 8

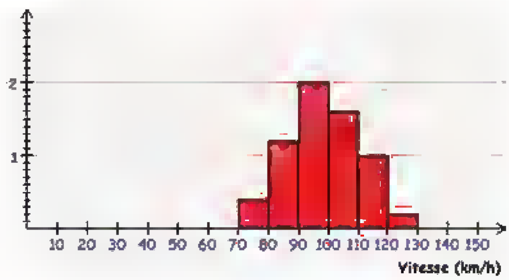
Lors d'un contrôle sur une route nationale (vitesse limitée à 90 km/h) , des relevés de vitesse par radar, effectués sur des véhicules ont permis de dresser l'histogramme ci-contre :

1) Quelle est la classe modale ?

2) a) Dresser le tableau des effectifs.

b) Calculer les fréquences et les fréquences en pourcentages.

3) a) Déterminer la vitesse moyenne et l'écart-type



b) Déterminer le pourcentage des véhicules qui respectent la limitation de vitesse

c) Déterminer la vitesse médiane.

Avec l'outil informatique

Le tableau suivant représente la répartition des élèves d'une classe selon le nombre de frères et sœurs

Nombre de frères et sœurs x_i	0	1	2	3	4	5
Effectif n_i	3	6	12	9	3	2

1) Mettre votre ordinateur sous tension et charger l'application Excel.

2) a) Ouvrir une nouvelle feuille de calcul.

b) Saisir et enregistrer le tableau ci-dessus sous le nom : " Activité "

3) a) • Positionner le curseur dans la cellule où vous voulez recevoir la valeur de la médiane: D5

• Sélectionner l'option: Fonction du menu: Insertion

• Sélectionner la catégorie "Statistiques" dans la fenêtre qui s'ouvre.

• Sélectionner " MEDIANE " dans la liste qui apparaît dans la fenêtre.

• Une nouvelle fenêtre s'ouvre, sélectionner la plage des cellules A5: B11 puis valider. Ainsi la valeur de la médiane s'affiche dans la cellule D5.

• Reprendre les mêmes étapes pour le calcul des autres paramètres.

b) Comparer ces résultats avec ceux que vous avez obtenu dans I).

4) • Sélectionner l'option: Graphique du menu: Insertion

• Sélectionner le type de graphique désirée puis valider.

SÉRIE STATISTIQUE À DEUX CARACTÈRES

Au cours d'enquêtes ou d'expériences de laboratoire, on est parfois amené à étudier une population selon deux caractères à la fois.

Par exemple :

- Un médecin scolaire notera pour chaque enfant : sa taille et son poids.
- Des ingénieurs, procédant à l'étude d'un nouveau système de freinage sur un véhicule, mesureront au cours de plusieurs essais : la vitesse du véhicule et la distance parcourue en ligne droite avant l'arrêt.
- Un sociologue rassemblera pour une population à une date donnée les informations suivantes : l'âge et l'état matrimonial

..etc..

Dans chacun de ces cas, on obtient un ensemble de couples formant une série statistique à deux caractères.

Une série statistique à deux caractères s'appelle une série statistique double

PRÉSENTATION D'UNE SÉRIE STATISTIQUE À DEUX CARACTÈRES EN TABLEAU :

Soit une série statistique à deux caractères X et Y.

Lorsque la population étudiée est d'effectif faible, on peut écrire pour chaque individu ω le couple $\left(X(\omega),Y(\omega)\right)$. On obtient un tableau de la forme :

individu	1	2	...	i	...	n
X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Ainsi la population est étudiée individu par individu.

Le tableau obtenu est dit : **Tableau élémentaire**

Activité 9

Le tableau suivant représente la production X de fonte et la production Y d'acier (en millions de tonnes) de quatre pays européens A, B , C et D.

	A	B	C	D	Totaux
X	27,2	15,9	17,6	3,5	
Y	37,5	19,8	26,7	9,8	
Totaux		35,7			

1) Recopier puis compléter le tableau ci-dessus.

2) a) Que représente la somme des nombres inscrits dans la 1ère ligne ?

b) Que représente la somme des nombres inscrits dans la 3ème colonne ?

c) Que représente la somme des nombres inscrits dans toutes les lignes et toutes les colonnes ?

Lorsque l'effectif est grand il est plus commode de représenter une série statistique double par un tableau à double entrée.

Activité 10

Les résultats de l'étude de 40 logements en fonction du nombre X de pièces et du nombre Y de personnes habitant ce logement sont donnés dans le tableau élémentaire suivant :

Numéro de logement	X	Y	Numéro de logement	X	Y	Numéro de logement	X	Y		Numéro de logement	X	Y
1	2	3	11	3	3	21	4	3		31	4	2
2	2	1	12	2	2	22	3	2		32	2	2
3	4	4	13	3	3	23	3	1		33	3	4
4	2	3	14	4	3	24	4	3		34	3	3
5	3	4	15	3	2	25	4	5		35	4	3
6	3	5	16	2	1	26	2	2		36	4	5
7	4	5	17	3	4	27	3	3		37	3	3
8	3	2	18	3	2	28	2	4		38	2	4
9	2	3	19	2	3	29	3	4		39	3	5
0	4	4	20	3	3	30	2	2		40	4	4

1) Quelles sont les valeurs prises par X et celles prises par Y?

2) a) Reproduire et compléter le tableau à double entrée suivant :

Y / X	1	2	3	4	5
2				2	
3					
4					

Le nombre d'individus vérifiant simultanément $X = x_i$ et $Y = y_j$ est noté n_{ij} et appelé l'effectif associé au couple (x_i , y_j)

b) Que représente la valeur 2 se trouvant à l'intersection de la première ligne et la quatrième colonne ?

Cette valeur est notée n_{14}

c) Donner n_{22} et n_{32}

$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$ est la fréquence associée au couple (x_i , y_j) (Où n est l'effectif total)

3) Présenter un tableau similaire dans lequel seront indiquées les fréquences calculées par rapport a l'effectif total

Activité 11

Le tableau ci-dessous indique les résultats aux différentes sections du baccalauréat dans un lycée à la fin de l'année scolaire 2005/2006

Section / Résultat	Lettre	Math	Sc. exp.	Tech .	E.G.	Total
Admis	32	27	34	36	20	
Refusés	18	3	12	4	8	
Total						

1) Les modalités des caractères statistiques étudiés X et Y sont elles quantitatives ou qualitatives.

1) a) Reproduire et compléter ce tableau d'effectifs en remplissant la dernière ligne et la dernière colonne (qui sont appelées les marges).

b) Déterminer n_{14} et n_{21}

c) Que représente la valeur se trouvant à l'intersection de la ligne ''Admis'' et de la colonne ''Total'' ?

Cette valeur s'appelle l'effectif marginal de la catégorie ''Admis'' et notée $n_{1.}$ (lu n1 point)

d) Que représente la valeur se trouvant à l'intersection de la colonne ''sciences techniques'' et de la ligne ''Total'' ?

Cette valeur, notée $n_{.4}$, (lu n point 4) est l'effectif marginal de la catégorie '' Techniques''. On a : $n_{.4} = n_{14} + n_{24} = 40$

2) a) Présenter un tableau similaire dans lequel seront indiquées les fréquences (en pourcentage) calculées par rapport à l'effectif total

$p_{ij} = 100\, f_{ij}$, est la fréquence en pourcentage associée au couple (x_i , y_j).

b) Que représente la valeur se trouvant à l'intersection de la colonne " techniques" et de la ligne "Total" ?

Cette valeur s'appelle fréquence marginale en pourcentage de la catégorie "Techniques ", notée $p_{.4}$

c) Que représente la valeur se trouvant à l'intersection de la ligne "Admis" et de la colonne "Total" ?

Cette valeur s'appelle fréquence marginale en pourcentage de la catégorie "Admis" notée $p_{1.}$

DISTRIBUTIONS MARGINALES :

Définition

- On appelle effectif marginal associé à la valeur (modalité) x_i de la variable X, la somme des effectifs correspondant à la ligne i du tableau à double entrée, il est noté $n_i.$ (lu « n_i point ») : $n_i. = n_{i1} + n_{i2} + ... + n_{iq}$
- On appelle effectif marginal associé à la valeur (modalité) y_j de la variable Y, la somme des effectifs correspondant à la colonne j du tableau à double entrée, il est noté $n_{.j}$ (lu « n point j ») : $n_{.j} = n_{1j} + n_{2j} + ... + n_{Pj}$
- La fréquence marginale associée à chaque valeur (modalité) x_i de X est

$$f_{i.} = \frac{n_{i.}}{n} = f_{i1} + f_{i2} + ... + f_{iq}$$

- La fréquence marginale associée à chaque valeur (modalité) y_i de Yest

$$f_{.j} = \frac{n_{.j}}{n} = f_{1j} + f_{2j} + ... + f_{Pj}$$

Remarques :

1) x_i (respectivement y_i) désigne selon le cas une valeur numérique de X (respectivement de Y) ou une classe si les valeurs de X (resp Y) sont regroupés en classes ou une modalité si la variable X (resp Y) est qualitative

2) $n_{i.}$représente l'effectif de l'ensemble ($X = x_i$).

$n_{.j}$ représente l'effectif de l'ensemble ($Y = y_j$)

3) Déterminer **la distribution marginale** d'une série statistique double c'est déterminer les effectifs $n_{i.}$ et $n_{.j}$ ou les fréquences $f_{i.}$ et $f_{.j}$ pour $i \in\{1, 2, \dots,p\}$ et $j \in\{1, 2, \dots,q\}$

Activité 12

On dispose des résultats suivants où X est l'âge de 20 personnes et Y leurs loisirs préférés

X \ Y	Sport	Cinéma	Télé	Lecture	Total
[12, 30[	3	2	1	1	
[30, 40[	1	3	1	0	
[40, 60[	0	2	2	4	
Total					

❖ Les valeurs de X sont exprimées en années et regroupées en tranche d'âges.

❖ Y est une variable qualitative

1) a) Reproduire le tableau et le compléter par les distributions marginales de X et de Y

   b) Déterminer le mode de Y et la classe modale de Y.

2) Déterminer la moyenne, la variance et l'écart type de X

Activité 13

On donne dans le tableau ci-dessous la répartition des 400 employés en fonction du revenu mensuel en dinars (noté Y) et le nombre d'enfants à charge (noté X)

X \ Y	[400, 500[	[500, 600[	[600, 700[	[700, 800[	[800, 900[	[900, 1000[
0	12	7	5	0	0	0
1	10	28	22	6	0	0
2	4	30	81	13	2	0
3	0	11	40	55	7	0
4	0	0	12	29	10	1
5	0	0	0	5	7	3

1) a) Déterminer la distribution marginale de X

   b) Calculer sa moyenne et sa variance.

2) a) Déterminer la distribution marginale de Y

   b) Déterminer sa médiane, le premier et le troisième quartile

   c) Calculer sa moyenne et son écart-type .

   d) Trouver la proportion d'employés de revenu se trouvant dans l'intervalle

$\left[\bar{X} - 2\sigma , \bar{X} + 2\sigma\right]$

NUAGE DE POINTS :

Activité 14

Des élèves effectuent diverses mesures de la longueur d'un ressort pour différentes masses accrochées à ce ressort.

Observations	1	2	3	4	5	6	7
Masse X en grammes	100	200	300	500	1OOO	1500	2000
Longueur Y en cm	20,3	20,8	21,2	22	23,9	26	28

1) Représenter les points $M_i(x_i, y_i)$ associés à cette série double dans un repère orthogonal

2) Placer sur la figure le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$.

3) En examinant **le nuage** de points, peut-on conclure qu'il existe une relation entre Y et X ? De quel type ?

Lorsque les deux caractères sont quantitatives,l'ensemble des points $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal est appelé nuage de points.
Le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$. est appelé le point moyen du nuage
Si l'un des deux caractère est continu par exemple X, x_i est le centre de la i^{ème} classe

Activité 15

De 2000 à 2005, les ventes d'une entreprise de fabrication d'ordinateurs ont presque triplé. Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'ordinateurs vendus (en milliers) de 2000 (année 0) à 2005 (année 5)

Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre d'ordinateurs en milliers y_i	14	22	28	33,5	38,5	41

1) Représenter les points $M_i(x_i, y_i)$ associés à cette série double dans un repère orthogonal. (On prendra comme échelle, 2 cm sur l'axe des abscisses pour représenter une année et 1cm sur l'axe des ordonnées pour représenter 4000 ordinateurs)

2) Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ et placer sur la figure le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$.

3) a) Donner une équation de la droite Δ de coefficient directeur 5,4 et passant par G

b) Construire la droite Δ . Que remarquez vous ?

Exercice résolu :

Dans une classe de 3ème On a observé les deux caractères

X : note obtenue en mathématiques.

Y : note obtenue en physiques

On a obtenu le tableau suivant :

X \ Y	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[	[12, 16[	[16, 20]
[0, 4[	1				
[4, 8[	1	3	2		
[8, 12[		2	5	1	1
[12, 16[			2	4	2
[16, 20]			1	3	2

1) Représenter graphiquement la série statistique (X, Y) par un nuage de points.

2) Placer sur la figure le point moyen G du nuage.

Dans le cas où la série statistique est présentée à l'aide d'un tableau à double entrée, on appelle nuage de points l'ensemble des points $M_{ij}(x_i, y_j)$, chacun de ces points est accompagné de l'effectif n_{ij} qu'il représente (on peut aussi le marquer par une tache circulaire ou carrée dont l'aire est proportionnelle à l'effectif n_{ij})

Solution :

On désigne par $(x_i)_{1\leq i\leq 5}$ les centres des classes relatives aux notes de mathématiques et par $(y_j)_{1\leq j\leq 5}$ ceux des classes relatives aux notes de physique. On a donc :

$x_1 = 2$; $x_2 = 6$; $x_3 = 10$; $x_4 = 14$; $x_5 = 18$

$y_1 = 2$; $y_2 = 6$; $y_3 = 10$; $y_4 = 14$; $y_5 = 18$

Les distributions marginales de X et Y sont déterminées par le tableau suivant :

x_i \ y_i	2	6	10	14	18	**Distribution marginale de X**
2	1					**1**
6	1	3	2			**6**
10		2	5	1	1	**9**
14			2	4	2	**8**
18			1	3	2	**6**
Distribution marginale de Y	**2**	**5**	**10**	**8**	**5**	**30**

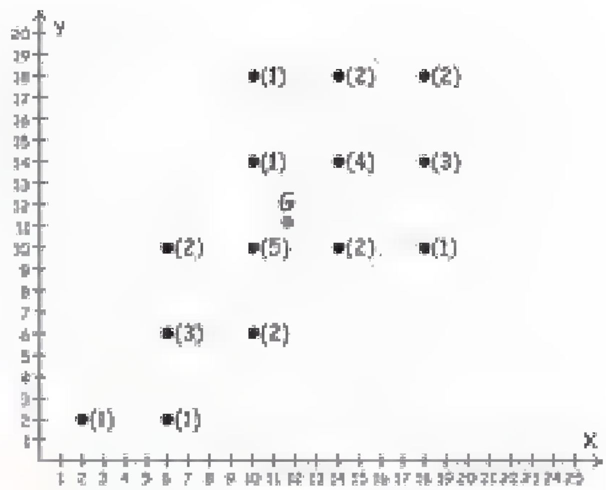
x_i	2	6	10	14	18
n_i	1	6	9	8	6

y_j	2	6	10	14	18
n_j	2	5	10	8	5

On a : $\overline{X} = 11{,}6$ et $\overline{Y} = 11{,}2$

donc le point moyen est le point G (11,6 ; 11,2)

- Le nuage de points représentant la série statistique donnée est l'ensemble des points $M_{ij}(x_i\ ,\ y_j)$:



Activité 16

On a mesuré la taille et la performance au « 60 mètres » de 52 filles.

Les tailles (en centimètre) et les temps (en secondes) ont été groupés en classes :

[149,5 ; 154,5[, [154,5 ; 159,5[, …, [169,5 ; 174,5[et [8 ; 9[, [9 ; 10[, …, [12 ; 13[.

On désigne par x_i et y_i les centres de ces classes :

Temps y_i / Taille x_i	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5
152					2
157		6	3		
162	2	11	7	2	
167		8	4	2	
172		3	2		

1) Déterminer n_{31} et n_{52}

2) a) Déterminer la distribution marginale de X

b) Calculer la taille médiane et la taille moyenne de ces filles

c) Calculer la variance V(X) de la taille et son écart-type G (X)

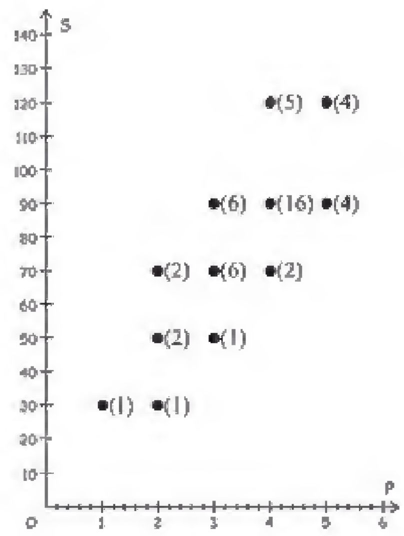
3) a) Déterminer la distribution marginale de Y

b) Déterminer son mode, sa moyenne, sa variance et son écart-type

4) Construire le nuage de points représentant la série statistique double donnée

Activité 17

Le nuage de points suivant représente la distribution de 50 logements en fonction de leur nombre P de pièces principales et de leur surface S en m^2



1) Reconstituer le tableau statistique définissant la distribution représentée par ce nuage.

2) a) Déterminer la distribution marginale associée au caractère P dont les valeurs sont : 1, 2, 3, 4 et 5.

b) Calculer $\overline{P}$ et $\sigma(P)$

3) a) Déterminer la distribution marginale associée au caractère S dont les valeurs sont : 30, 50, 70, 90 et 120.

b) Calculer $\overline{S}$ et $\sigma(S)$

Résumé

Soient deux variables X et Y définies sur une même population E d'effectif total n

Si x_1, x_2, … , xp désignent les valeurs (modalités) de X et y_1, y_2, … , y_q celles de Y

On peut organiser ces donnés dans un tableau à double entrée :

X \ Y	y_1	…	y_j	…	y_q	Distribution Marginale de X
x_1	n_{11}	…	n_{1j}	…	n_{1q}	$n_{1.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	n_{i1}	…	n_{ij}	…	n_{iq}	$n_{i.}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_p	n_{p1}	…	n_{pj}	…	n_{pq}	$n_{p.}$
Distribution Marginale de Y	$n_{.1}$	…	$n_{.j}$	…	$n_{.q}$	n

- n_{ij} est l'effectif de ($X = x_i$ et $Y = y_j$)
- $n_{i.} = n_{i1} + n_{i2} + ... + n_{iq}$ et $n_{.j} = n_{1j} + n_{2j} + ... + n_{pj}$
- La distribution marginale de X est donnée par le tableau suivant :

X	$n_{1.}$	…	$n_{i.}$	…	$n_{p.}$
Effectif marginal	x_1	…	x_i	…	x_p

La fréquence marginale associée à chaque valeur (modalité) x_i de X est $f_{i.} = \frac{n_{i.}}{n}$

- La moyenne marginale de X est $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_{i.} x_i}{n} = \sum_{i=1}^{p} f_{i.} x_i$

- La variance marginale de X est $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_{i.} x_i^2 - \left(\overline{X}\right)^2$

l'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

01 Une usine fabrique des boulons d'un diamètre de 20 mm. Mais les machines n'étant pas parfaites, il faut en vérifier le bon fonctionnement de temps à autre : on extrait alors une série de 100 boulons et on mesure leurs diamètres. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Diamètre en mm	Nombres des pièces
[18 ; 18,4[	1
[18,4 ; 18,8[	1
[18,8 ; 19,2[	11
[19,2 ; 19,6[	18
[19,6 ; 20[	33
[20 ; 20,4[	17
[20,4 ; 20,8[	11
[20,8 ; 21,2[	7
[21,2 ; 21,6[	1

1) Calculer le diamètre moyen des 100 boulons.
2) Tracer la courbe des effectifs cumulés croissants et estimer le diamètre médian.
3) La machine n'a pas besoin de réglage tant qu'elle respecte les normes suivantes:
- la moyenne des diamètres est 20 mm à 5% prés.
- 80% des boulons ont un diamètre de 20mm à 6% prés

La machine est-elle réglée ?

02 Déterminer la médiane, les 1^{er} et $3^{ème}$ quartiles de la série suivante donnant les Tailles en cm d'un groupe d'enfants :

104	107	107	107	108	108	109	110	111	111	112
112	112	112	113	113	114	114	114	114	115	115
115	115	115	116	116	117	117	117	118	118	118
119	119	120	120	120	121	121	122	123	123	125

03 Les résultats d'une épreuve d'examen sont donnés par le tableau suivant :

Notes	[2; 4[	[4; 6[	[6; 8[	[8; 10[	[10; 12[	[12; 14[	[14; 18[	[18; 20[
Fréquence	0,05	0,08	0,15	0,20	0,25	0,12	0,10	0,05

1) Déterminer le premier quartile Q_1, la médiane Me et le troisième quartile Q_3
2) Calculer la moyenne et l'écart-type.
3) On résume la série aux quatre intervalles $[2; Q_1[$, $[Q_1; M_e[$, $[M_e , Q_3[$ et $[Q_3 ; 20]$
   a) Calculer alors la moyenne et l'écart-type de cette nouvelle série.
   b) Comparer ces résultats à ceux de la deuxième question.

04 Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Maths et en Physique :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
physiques	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

1) a) Calculer la médiane M_e et les quartiles Q_1 et Q_3 des notes en Maths

b) Calculer la médiane M'_e et les quartiles Q'_1 et Q'_3 des notes en Physique.

c) Représenter les diagrammes en boite des notes en Maths et en Physique. Interpréter.

2) a) Calculer la moyenne m des notes en Maths et la moyenne m' des notes en Physique. Interpréter.

b) Calculer l'écart-type des notes en Maths et l'écart-type σ' des notes en Physique. Interpréter.

05 Dans une classe, la liste des notes obtenues à un devoir de mathématiques par les élèves classés par ordre alphabétique est la suivante :

8	16	9	18	9	11	9	13	7	3	14	7
10	10	10	17	13	14	10	13	5	15	13	19
10	6	12	5	12	1	9	9	8	8	4	

1) Déterminer une valeur approchée de la moyenne $\overline{X}$ de cette série statistique.

2) Le professeur décide de classer ses élèves en cinq groupes :

[0;4 [	[4;8 [	[8;12 [	[12; 16 [	[16; 20 [
faible	médiocre	Moyen	satisfaisant	très bon

Déterminer les effectifs de chaque classe.

En utilisant le centre des classes, calculer la moyenne $\overline{Y}$ de cette série statistique.

3) Le professeur envisage une autre répartition et refait ses calculs avec le regroupement suivant :

[0;5 [	[5;10 [	[10; 15 [	[15; 20 [
très faible	insuffisant	convenable	très satisfaisant

Quelle est la moyenne $\overline{Z}$ de cette dernière série statistique ?

06 Dans une classe de 30 élèves, la répartition des notes dans un devoir de mathématiques est la suivante :

Notes	[0 , 4 [	[4 , 8 [	[8 , 12[	[12 , 16 [	[16 , 20 [
Effectif masculin	2	3	2	1	2
Effectif féminin	2	4	6	4	4

1) Pour chaque série, déterminer les fréquences cumulées croissantes et construire les polygones sur le même graphique.

2) Pour chaque série, calculer la moyenne et l'écart-type

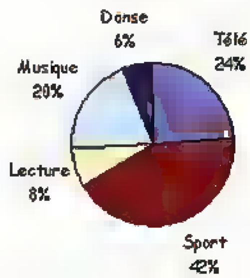
Sans faire le tableau du regroupement de 2 séries, déduire la moyenne de classe

07 On interroge un groupe de 150 élèves du lycée afin de connaître leur loisir favori.

Les résultats sont représentés par le diagramme circulaire ci-contre :

1) Compléter le tableau ci-dessous

Loisir	Fréquence en % p_i	Effectif n_i
Télé		
Musique		
Dance		
Sport		
Lecture		
total		



2) construire un diagramme à bâtons des effectifs.

3) Peut-on calculer la moyenne ? Pourquoi ?

08 On effectue 100 jets de deux dés. A chaque jet on relève le nombre X des six obtenus et la somme Y de deux numéros apparus sur les deux dés

Les résultats sont consignés dans le tableau ci-contre

X \ Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	3	7	9	10	15	9	8	6	2		
1						5	4	6	5	7	
2											4

1) Dessiner le nuage de points associé au couple (X,Y).

2) Calculer les moyennes et les variances de X et Y

09 Dans une population de 200 élèves, on a observé les deux caractères

X : note obtenue en mathématiques.

Y : note obtenue en physiques

On a obtenu le tableau suivant :

X \ Y	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[	[12, 16[	[16, 20]
[0, 4[	4	10	4		
[4, 8[	2	24	20	6	
[8, 12[		6	56	24	2
[12, 16[		2	10	20	4
[16, 20]				2	4

1) Représenter graphiquement la série statistique (X, Y) par un nuage de points.

2) Déterminer la distribution marginale de X ; calculer sa moyenne, sa médiane et son écart-type

3) Déterminer la distribution marginale de Y ; calculer sa moyenne, sa médiane et son écart-type

10 Une société a conçu un logiciel de gestion. Pour décider du prix de vente de ce logiciel, elle a effectué une enquête auprès de 100 entreprises susceptibles de l'acheter.

Le résultat est donné dans le tableau suivant où X désigne le prix de vente proposé, en dinars, et Y le nombre d'entreprises qui acceptent d'acheter le logiciel à ce prix

x_i	600	650	700	750	800	850	900	950
y_i	76	70	65	61	55	49	45	39

1) a) Ainsi, par exemple, 39 entreprises achèteraient le logiciel s'il était vendu 950 dinars. Quel serait, dans ce cas, le chiffre d'affaires ?

b) Parmi les 8 prix proposés, quel est celui qui permettrait à la société de réaliser le meilleur chiffre d'affaires ?

2) a) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points $M_i\,(x_i\ ,\ y_i)$.

Unités graphiques :

axe des abscisses : 2 cm pour 100 dinars et commencer les graduations à partir de 500

axe des ordonnées : 2 cm pour 10 entreprises.

b) On appelle G le point moyen associé au nuage de points.

Calculer les coordonnées de G. Placer ce point sur le graphique.

c) Déterminer une équation de la droite Δ passant par G de coefficient directeur -0,1.

Construire cette droite sur le graphique. Que remarquez vous ?

11 Un relevé statistique des tailles X en cm et des poids Y en kg du 100 élèves a permis de construire le tableau suivant :

X \ Y	[40, 50[	[50, 60[	[60, 70[	[70, 80[
[140, 150[	18	10	2	0
[150, 160[	3	16	5	1
[160, 170[	0	5	13	5
[170, 180[	0	2	6	14

1) a) Déterminer la distribution marginale de X.

b) Construire l'histogramme des effectifs pour cette distribution.

2) Déterminer la valeur moyenne et la variance de chacun des variables statistiques X et Y.

3) Représenter cette série par un nuage de points

12 Soit la série à deux caractères définie par le tableau suivant :

X \ Y	[4, 12 [	[12, 20[	[20, 28[	[28, 36[	[36, 44[
[2, 4 [	8	2			
[4, 6 [	1	15	6		
[6, 8 [		4	23	6	
[8, 10[			6	16	4
[10, 12[				2	7

1) Déterminer les distributions marginales de X et Y ; calculer leurs moyennes et leurs écart- types .

2) a) Construire le nuage de points associé au couple (X, Y) et placer son point moyen

b) Peut-on conclure à l'existence d'une relation entre X et Y ?

13 Les relevés de l'intensité du travail fourni exprimée en kilojoules par minute et la fréquence cardiaque (nombre de battement par minute) de 8 personnes sont consignés dans le tableau suivant :

x_i	9,6	12,8	18,4	31, 2	36,8	47,2	49,6	56,8
y_i	70	86	90	104	120	128	144	154

1) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points $M_i(x_i , y_i)$.

2) Déterminer les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ et les écart- types σ_X et σ_Y.

3) Construire le point moyen G

14 Le tableau ci-dessous donne, au cours de 12 années successives, la production B de blé et la production O d'orge dans un pays (en 10^6 m^3)

Blé b_i	12,9	15,4	18,1	17,8	19,1	15	16,1	17,5	21	19,5	23,5	22,8
Orge O_i	8,1	9	10,5	10,8	10	9,3	8,2	10,3	11,3	11,2	11,8	10,2

1) Calculer les moyennes $\overline{B}$ et $\overline{O}$

2) Représenter graphiquement cette série statistique

15 Une société d'assurance a réalisé, à partir de son fichier de clients, une enquête par sondage pour connaître la répartition du nombre d'accidents de la route selon l'âge des assurés. Le résultat de l'enquête est donné dans le tableau suivant où Y représente le nombre d'accidents et X l'âge des assurés

X \ Y	de 0 à 2	de 3 à 5
[20, 26[	23	22
[26, 50[	54	21
[50, 80[	16	14

Convention : les classes de la variable discrète Y seront résumées en leurs centres 1 et 4.

On se propose d'étudier si le nombre d'accidents de la route décroit selon l'âge des assurés

1) a) Déterminer la distribution marginale de X.

b) Calculer $\overline{X}$ et $\sigma(X)$

c) Peut- on dire que la majeure partie des assurés a moins de 35 ans

2) a) Déterminer la distribution marginale de Y.

b) Calculer $\overline{Y}$ et $\sigma(Y)$

c) Peut- on dire qu'un conducteur sur 4 a plus de 3 accidents ?

d) Que peut– on conclure ?

16 Le Tableau ci-dessous indique la puissance X en chevaux DIN et la cylindrée Y en cm^3 de 8 voitures à moteur diesel.

Voiture	A	B	C	D	E	F	G	H
Puissance X	37	55	60	60	65	70	72	76
Cylindrée Y	993	1579	1761	1697	1935	1986	1997	2498

1) Dessiner le nuage de points associé à ce tableau.
Unités graphiques : axe des abscisses : 4 cm pour 10 chevaux DIN
axe des ordonnées : 1 cm pour 100 cm^3

2) Calculer la puissance moyenne et la cylindrée moyenne de ces huit voitures.

3) On appelle G_1 et G_2 les points moyens des sous-nuages constitués d'une part par les voitures A, B, Cet D, d'autre part, par les voitures E, F, G et H

a) Calculer, en donnant les résultats arrondis à 10^{-2} , les coordonnées de G_1 et de G_2.

b) Déterminer une équation de la droite (G_1 G_2). La tracer sur le graphique.

DIVERS ASPECTS DE LA STATISTIQUE

Vous serez sans doute surpris d'apprendre que l'on trouve des embryons de la statistique en Chine, il ya environ 4000 ans ! Les Chinois utilisaient déjà à cette époque des tables de statistique agricole.

Au départ, ce sont surtout des dénombrements qui intéressent les états ; le plus souvent avec des intentions « néfastes » : lever des troupes, faire payer des impôts, …

Jusqu'au XVIII^{e} siècle, la statistique se contente d'enregistrer des données et garde un caractère purement descriptif.

Par exemple,

- en 1570, Cardan s'intéresse aux statistiques sur la durée de la vie humaine ;
- en 1662, Graunt publie des observations sur les tables de mortalité à Londres ;
- en 1693, Halley s'intéresse aux assurances vie ;
- en 1749, premier recensement moderne en Finlande ; en 1750 en Suède ; …

L'étude des jeux et le calcul des probabilités vont fournir à la statistique un fondement scientifique rigoureux : elle devient alors une science, dont les lois permettent d'interpréter les données et éventuellement de faire des prévisions.

La statistique ne se borne plus à étudier la Démographie, la Politique et l'Economie, mais son champ d'action s'élargit à l'analyse des données en Physiques, Biologie,

Météorologie, …

DEUXIEME PARTIE

Angles orientés

Formules trigonométriques

Equations et inéquations trigonométriques

Produit scalaire dans le plan

Nombres complexes

Vecteurs de l'espace, Repère cartésien de l'espace

Droites et plans de l'espace

Produit scalaire dans un repère orthonormé de l'espace

Produit vectoriel . Produit mixte

SOMMAIRE (2ème PARTIE)

Chapitre 1

Angles orientés

- **Angle orienté de deux demi-droites**
- **Angle orienté de deux vecteurs non nuls**
- **Mesure d'un angle orienté**

INTRODUCTION

Activité 1

[Ox) et [Oy) sont deux demi-droites du plan. α et β les mesures de l'angle $\widehat{xoy}$ respectivement en radian et en degré. Compléter le tableau suivant :

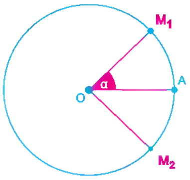
α	β	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}$				
	180			
$\frac{\pi}{3}$				
	30			
$\frac{3\pi}{4}$				
		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		

Activité 2

Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et passant par A. construire un point M de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$

Commentaire

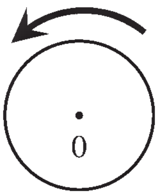
On remarque qu'on trouve deux points M_1 et M_2.

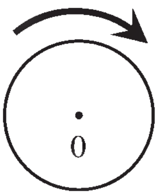


- La relation $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$ ne définit pas avec précision la position de M.
- Pour déterminer avec précision la position de M sur $\mathscr{C}$, on oriente le cercle $\mathscr{C}$ en supposant qu'il y a deux sens de parcours.

❖ Le sens contraire de celui dans lequel tournent les aiguilles d'une montre, par convention c'est le sens **positif** ou **direct** ou encore **trigonométrique**.

❖ L'autre sens est appelé sens **négatif** ou **indirect** ou encore **rétrograde**.

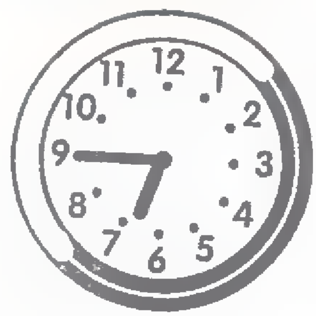
sens positif 

sens négatif 

ANGLE ORIENTÉ DE DEUX DEMI-DROITES

Un plan P est orienté si tous les cercles de ce plan sont orientés suivant la convention décrite précédemment

Dans le plan orienté le sens positif est le sens contraire dans lequel tournent les aiguilles d'une montre.



Définition

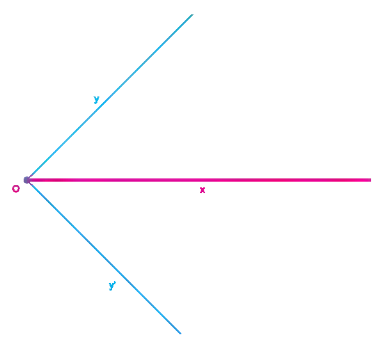
On appelle cercle trigonométrique tout cercle orienté de rayon 1.

Activité 3

Dans le plan orienté P, on donne une demi-droite [Ox).

Construire une demi droite [Oy) telle que : $\widehat{xoy} = \frac{\pi}{4}$

Commentaire



On remarque qu'il y a deux demi-droites [Oy) et [Oy')

telles que $\widehat{xoy} = \frac{\pi}{4}$

Ces deux demi-droites sont symétriques par rapport à (0x)

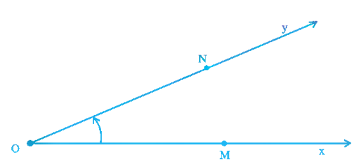
On a donc deux couples ([Ox) , [Oy)) et ([Ox) , [Oy'))

telles que $\widehat{xoy} = \widehat{xoy'} = \frac{\pi}{4}$

Notation :

- L'angle orienté défini par le couple ([ox) , [oy)) est noté $\left(\overrightarrow{ox}\ ,\overrightarrow{oy}\right)$
- Si M est un point de [ox) distinct de O et N un point de [oy) distinct de O, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{ox}\ ,\overrightarrow{oy}\right)$ est aussi noté :

$\left(\overrightarrow{OM}\ ,\overrightarrow{ON}\right)$



Remarques :

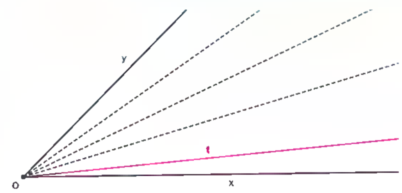
- $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{ox})$ est l'angle nul

- Si [Ox) et [Oy) sont opposées l'angle orienté $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$ est dit plat

- Si [Ox) et [Oy) sont perpendiculaires l'angle orienté $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$ est dit droit

MESURES D'UN ANGLE ORIENTÉ DE DEUX DEMI-DROITES :

Considérons l'angle orienté $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$ de l'activité 3, $\widehat{xoy} = \frac{\pi}{4}$



- On suppose qu'une demi droite [Ot) tourne autour du point O dans le sens positif, sa position initiale étant [Ox), arrive en [Oy). On dit que $\frac{\pi}{4}$ est une mesure, en radians, de l'angle orienté $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$
- On suppose que [Ot) ne s'arrête dans la position [Oy) qu'après avoir fait n tours dans le sens positif, $n \in IN^*$.

On exprime ce fait par $\frac{\pi}{4} + n.2\pi$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$

- On suppose que [Ot) tourne autour du point O dans le sens négatif, sa position initiale étant [Ox), ne s'arrête dans la position [Oy) qu'après avoir fait n tours dans le sens négatif, $n \in IN^*$.

On exprime ce fait par : $\frac{\pi}{4} + n.2\pi$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$

Conclusion

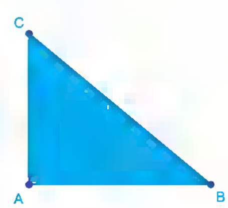
L'ensemble des mesures en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$ est $\left\{\frac{\pi}{4} + n.2\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

[Oy') étant la demi-droite symétrique de [Oy) par rapport à (Ox).

Expliquer pourquoi $\left\{\frac{\pi}{4} + n.2\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ est l'ensemble des mesures, en radian, de l'angle orienté $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy'})$

Activité 4

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que $+\frac{\pi}{2}$ soit une mesure, en radian, de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$



a) Déterminer l'ensemble des mesures, en radian, de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$

b) Montrer que $-\frac{11\pi}{2}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$

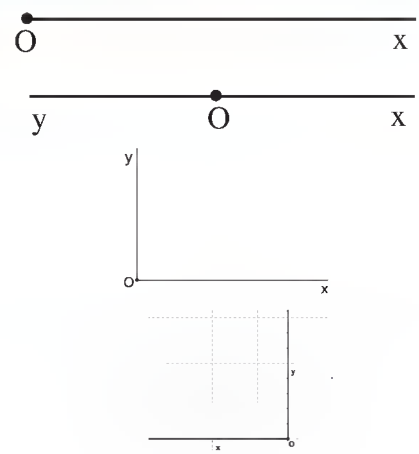
c) Déterminer l'ensemble des mesures, en radian, de l'angle $(\overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{BC})$

Notation :

Pour exprimer que α est une mesure, en radian, de l'angle orienté $(\vec{ox}\ ,\ \vec{oy})$ on écrit $(\widehat{\vec{ox},\vec{oy}}) = \alpha + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Si α est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{ox}\ ,\ \vec{oy})$, l'ensemble des mesures de cet angle est $\{\alpha + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

On a :



- $(\widehat{\vec{ox},\vec{ox}}) = k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- [Ox) et [Oy) sont opposées si et seulement si

$$(\widehat{\vec{ox},\vec{oy}}) = \pi + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

- $(\vec{ox}\ ,\ \vec{oy})$ est un angle droit positif ou direct si et seulement si $(\widehat{\vec{ox},\vec{oy}}) = \frac{\pi}{2} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $(\vec{ox}\ ,\ \vec{oy})$ est un angle droit négatif ou indirect si et seulement si $(\widehat{\vec{ox},\vec{oy}}) = -\frac{\pi}{2} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Activité 5

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et A un point de $\mathscr{C}$.

Placer sur $\mathscr{C}$ les points M, N , R et S définis par :

- $(\widehat{\vec{OA},\vec{OM}}) = \frac{\pi}{6} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $(\widehat{\vec{OA},\vec{OR}}) = -\frac{2\pi}{3} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $(\widehat{\vec{OA},\vec{ON}}) = \frac{3\pi}{4} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $(\widehat{\vec{OA},\vec{OS}}) = -\frac{5\pi}{6} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Activité 6

a) $-\frac{179\pi}{6}$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{oz}\ ,\ \vec{ot})$.
Déterminer la mesure θ de cet angle telle que $-\pi < \theta \le \pi$.

b) La demi-droite [Oz) étant donnée, construire la demi-droite [Ot) telle que $(\widehat{\vec{Oz},\vec{Ot}}) = -\frac{179\pi}{6} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

PROPRIÉTÉ : Pour toute demi-droite [Ox) et pour tout réel α il existe une unique demi-droite [Oy) telle que $(\widehat{\vec{ox},\vec{oy}}) = \alpha + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Définition

La mesure principale d'un angle $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$ est la mesure θ de cet angle telle que $-\pi < \theta \leq \pi$.

Si θ est la mesure principale de $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$ alors $|\theta| = \widehat{xoy}$

Exercice

Soit $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$ un angle orienté dont une mesure est $-\dfrac{29\pi}{4}$.

Donner la mesure principale de cet angle. En déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{xoy}$

RELATION DE CHASLES :

Activité 7

On considère dans le plan orienté P, une demi droite [ox).

a) Construire les demi-droites [oz) et [oy) telles que $\left(\widehat{\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oz}}\right) = \frac{\pi}{2} + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

et $\left(\widehat{\overrightarrow{oz}, \overrightarrow{oy}}\right) = \frac{\pi}{3} + k'.\ 2\pi\ ,\ k' \in \mathbb{Z}$

b) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés : $(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy})$ et $(\overrightarrow{oy}\ ,\ \overrightarrow{oz})$

c) Vérifier que l'on a : $\left(\overrightarrow{ox} \,\hat{,}\, \overrightarrow{oz}\right) = \left(\overrightarrow{ox} \,\hat{,}\, \overrightarrow{oy}\right) + \left(\overrightarrow{oy} \,\hat{,}\, \overrightarrow{oz}\right) + k''.\,2\pi\ ,\ k'' \in \mathbb{Z}$

Plus généralement on admet la relation :

Pour toutes demi-droites [ox) , [oy) et [oz) du plan orienté on a :

$\left(\overrightarrow{ox} \,\hat{,}\, \overrightarrow{oz}\right) = \left(\overrightarrow{ox} \,\hat{,}\, \overrightarrow{oy}\right) + \left(\overrightarrow{oy} \,\hat{,}\, \overrightarrow{oz}\right) + k''.\,2\pi\ ,\ k'' \in \mathbb{Z}$

Cette relation est appelée relation de Chasles pour les mesures des angles orientés de demi-droites du plan

Exercice 1

Montrer, en utilisant la relation de Chasles, que pour toutes demi-droites [ox) et [oy) du plan orienté on a : $\left(\overrightarrow{oy} \,\hat{,}\, \overrightarrow{ox}\right) = -\left(\overrightarrow{ox} \,\hat{,}\, \overrightarrow{oy}\right) + k\,.\,2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

Exercice 2

(xx') et (yy') sont deux droites sécantes en O.

Montrer, en utilisant la relation de Chasles, que

$\left(\widehat{\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{oy}}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{ox'}, \overrightarrow{oy'}}\right) + k\,.\,2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

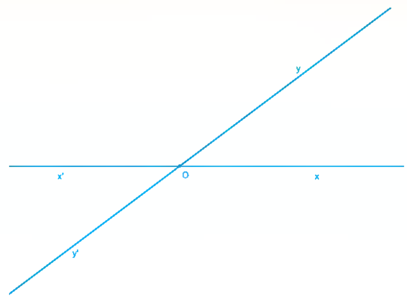
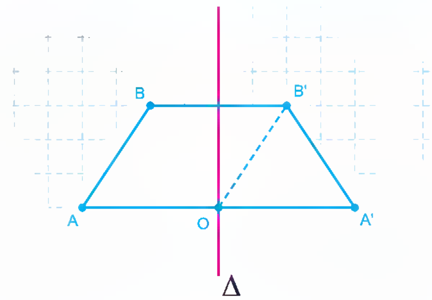


IMAGE D'UN ANGLE ORIENTÉ DE DEUX DEMI-DROITES PAR UNE SYMÉTRIE ORTHOGONALE, PAR UNE TRANSLATION

Activité 8

Dans la figure ci-contre on a: Δ est la médiatrice de [AA'] et de [BB'], $OA = BB'$ et $\widehat{OAB} = \alpha$ en radian.



1°) a) Déterminer $S_\Delta(A)$, $S_\Delta(B)$ et $S_\Delta(O)$.

b) En déduire que $\widehat{OA'B'} = \alpha$

2°) Le plan P étant orienté, donner une mesure principale des angles $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{A'O},\overrightarrow{A'B'})$

3°) a) Déterminer $t_{\overrightarrow{AO}}(A)$, $t_{\overrightarrow{AO}}(B)$ et $t_{\overrightarrow{AO}}(O)$.

b) Montrer que $\widehat{A'OB'} = \alpha$

c) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'})$

Commentaires :

- $(\overrightarrow{A'O},\overrightarrow{A'B'})$ est l'image de l'angle orienté $(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$ par S_Δ et on a :

  $(\widehat{\overrightarrow{A'O},\overrightarrow{A'B'}}) = -(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}) + k.2\pi, k \in \mathbb{Z}$

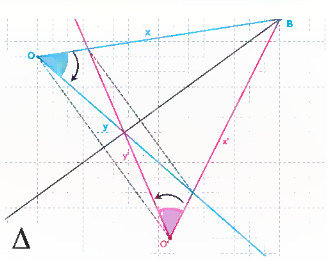
- $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'})$ est l'image de l'angle orienté $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ par $t_{\overrightarrow{AO}}$ et on a :

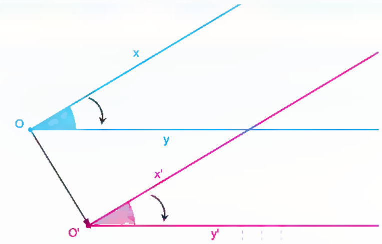
  $(\widehat{\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}) + k.2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D'une façon générale :

Si $[o'x') = S_\Delta([ox))$ et $[o'y') = S_\Delta([oy))$ on a : $(\widehat{o'x', o'y'}) = -(\widehat{ox,oy}) + k.2\pi$

Si $[o'x') = t_{\overrightarrow{u}}([ox))$ et $[o'y') = t_{\overrightarrow{u}}([oy))$ on a : $(\widehat{o'x', o'y'}) = (\widehat{ox,oy}) + k.2\pi$





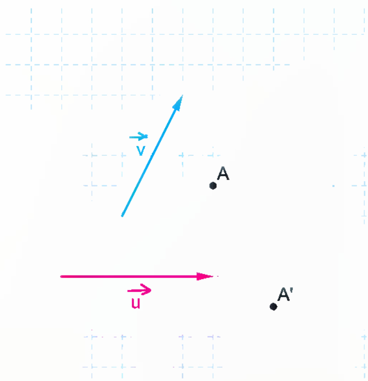
ANGLE ORIENTÉ DE DEUX VECTEURS NON NULS

Activité 9

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient A et A' deux points distincts.

a) Construire les points B , C , B' et C' tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{A'B'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \vec{v}$

b) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'} , \overrightarrow{A'C'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}}\right) + k.2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls du plan orienté. A , B et C étant des points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

L'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est par définition l'angle orienté des demi- droites [AB) et [AC).

Une mesure de $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est notée $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ et on a : $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}}\right) + k.2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

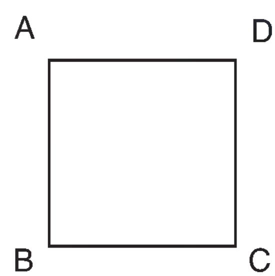
Remarque :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}}\right)$ désigne à la fois une mesure de l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et une mesure de l'angle des deux demi droites [AB) et [AC).

Activité 10

ABCD un carré direct, on a donc $\left(\widehat{\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$

Déterminer $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}}\right)$



Proprietés :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant des vecteurs non nuls

- $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{u}}\right) = k.2\pi$
- $\left(\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}\right) = \pi + k.2\pi$
- $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = -\left(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}\right) + k.2\pi$
- $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) + \left(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}\right) + k.2\pi$ (Relation de Chasles pour les angles des vecteurs)

Activité 11

Démontrer, en utilisant la relation de Chasles, que pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

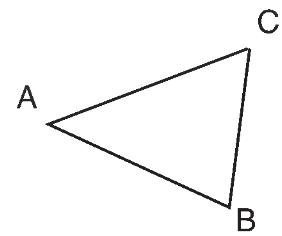
$$\left(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)+\pi+k.2\pi$$

$$\left(\widehat{-\vec{u},\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)+\pi+k.2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\left(\widehat{-\vec{u},-\vec{v}}\right)=\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)+k.2\pi$$

Activité 12

ABC étant un triangle du plan orienté P.



1°) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}}\right)+\pi+k.2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}}\right)+\pi+k.2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

2°) En déduire que dans tout triangle ABC on a :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)=\pi+n.2\pi\ ,n\in\mathbb{Z}$$

Activité 13

Dans le plan orienté P, on considère un triangle isocèle ABC de sommet principal A. Soit H le milieu de [BC]. Soit α une mesure, en radian, de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

1) a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC}}\right)+k.2\pi$

b) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}}\right)=\dfrac{\alpha}{2}+m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$

2) a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)+n.2\pi\ ,\ n\in\mathbb{Z}$

b) Montrer en utilisant la somme des angles orientés dans un triangle que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+p\pi,\ p\in\mathbb{Z}$$

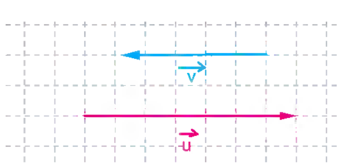
Activité 14

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

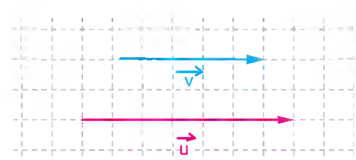
Montrer que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$

sont colinéaires si et seulement si

$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$



$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\pi+k.2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$



$\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=k.2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

Activité 15

Soient A et B deux points distincts du plan orienté P. Compléter :

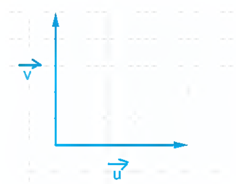
$$[AB] - \{A, B\} = \left\{ M \in P, \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \right\}$$

$$(AB) - \{A, B\} = \left\{ M \in P, \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \right\}$$

Activité 16

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Montrer que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$



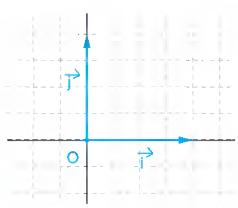
$\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

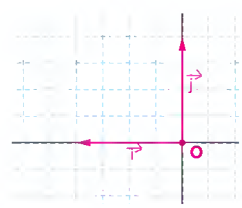
Sens d'un repère orthonormé

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan orienté P.

On a deux cas qui se présentent :

- $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dans ce cas $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit direct
- $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}\right) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dans ce cas $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit indirect





Activité 17

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.

Compléter le tableau suivant en mettant une croix dans la case correspondante :

	direct	indirect
$(O, \vec{i}, \vec{j})$	x	
$(O, \vec{j}, \vec{i})$		
$(O, -\vec{i}, \vec{j})$		
$(O, -\vec{i}, -\vec{j})$		
$(O, \vec{i}, -\vec{j})$		

Résumé

- Si α est la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{ox}\ ,\ \overrightarrow{oy}\right)$ on a : $-\pi < \alpha \leq \pi$ et

  $\left(\widehat{\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oy}}\right) = \alpha + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- Quelles que soient les demi-droites [ox) , [oy) et [oz) on a :

  $\left(\widehat{\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oz}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oy}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{oy},\overrightarrow{oz}}\right) + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

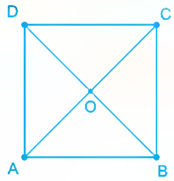
Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$

- $\left(\widehat{\vec{u},\vec{w}}\right) = \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) + \left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right) + k.2\pi$ (Relation de Chasles pour les angles des vecteurs)
- $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = -\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right) + k.2\pi$
- $\left(\widehat{\vec{u},-\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) + \pi + k.2\pi$
- $\left(\widehat{-\vec{u},\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) + \pi + k.2\pi$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- Le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est direct si et seulement si $\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

01 ABCD est un carré tel que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)=\frac{\pi}{2}+k2\pi$$



Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés

$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right),\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right),\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right),$$
$$\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\right),\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}\right),\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BC}\right).$$

02 ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\pi}{6}+k2\pi$

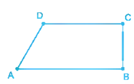
Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés.

$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right),\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right),\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)$$

03 ABCD est trapèze rectangle tel que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)=\frac{\pi}{3}+k2\pi$$

Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés



$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right),\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right),\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right),$$
$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right),\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}\right),\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\right)$$

04 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls tels que $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=-\frac{3\pi}{4}+k.2\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}$

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

$$\left(-\vec{u},\vec{v}\right),\left(\vec{v},\vec{u}\right),\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)$$

05 α est une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{oy}\right)$.

Déterminer la mesure principale de cet angle dans chacun des cas suivants :

$$\alpha=\frac{17\pi}{2}\ ,\ \alpha=\frac{134\pi}{3}\ ,\ \alpha=\frac{-67\pi}{6}\ ,\ \alpha=2005\,\pi$$

06 On donne dans le plan orienté P une demi droite [Ox), et on considère les demi-droites [Oy) et [Oz) telles que.

$$\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy}}\right)=\frac{31\pi}{4}+k2\pi\ ,\ k\in Z \text{ et}$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oz}}\right)=-\frac{46\pi}{3}+n2\pi\ ,\ n\in Z$$

a- Déterminer la mesure principale de chacun des angles $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy}\right)$ et $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oz}\right)$

b- Construire les demi-droites [Oy) et [Oz) .

c- Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{Oy},\overrightarrow{Oz}\right)$

07 Soit un triangle isocèle de sommet principal A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$

Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)$ et $\left(\widehat{AB,\overrightarrow{AC}}\right)$

08 Soit A et B deux points distincts du plan orienté P .

Déterminer les ensembles suivants :

$$C_1=\left\{M\in P,\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$C_2=\left\{M\in P,\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$C=\left\{M\in P,\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

09 ABCD est un losange tel que:

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Déterminer une mesure en radian de chacun des angles suivants :

$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right),\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right),\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right),\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$$

10 Soit ABC un triangle . Soit So la symétrie centrale de centre un point O.

1) Construire A', B' et C' les images respectives de A, B et C par S_O .

2) Montrer que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}\right) + k2\pi\ , k \in Z$$

11 Dans le plan orienté, on considère un cercle C de centre O et un point A de C.

Soit M le point de C tel que:

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right) = \frac{\pi}{3} + k2\pi\ , k \in Z$$

Soit M_n le point de C tel que:

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM_n}}\right) = n\frac{\pi}{6} + k2\pi\ , k \in Z$$

où n est un entier naturel.

1°) Construire A, M_0, M_1 et M_2 .

2°) Pour quelles valeurs de n les points M et M_n sont confondus ?

3°) Pour quelles valeurs de n les points M et M_n sont diamétralement opposés ?

4°) Pour quelles valeurs de n les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont orthogonaux ?

Chapitre 2

Formules trigonométriques

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on désigne par C le cercle trigonométrique et par A, B, A'et B' les points de C vérifiant :

$\vec{OA} = \vec{i}$, $\vec{OB} = \vec{j}$, $\vec{OA'} = -\vec{i}$, $\vec{OB'} = -\vec{j}$

Activité 1

1) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés

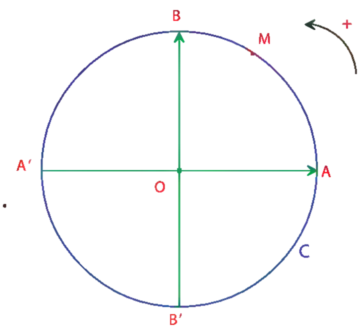
$(\vec{OA}, \vec{OB})$, $(\vec{OA'}, \vec{OB})$, $(\vec{OA'}, \vec{OB'})$ et $(\vec{OA}, \vec{OB'})$

2) Placer sur C les points M et N tels que

$(\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ et $(\widehat{\vec{OA}, \vec{ON}}) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

3) Soit $E = \{M \in C\ ;\ (\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}}) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Représenter les éléments de E sur le cercle C



Activité 2

1) Parmi les réels suivants, préciser ceux qui sont des mesures de $(\vec{OA}, \vec{OB'})$?

$\frac{3\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} + 2007\pi$, $-\frac{15\pi}{2}$

2) Donner trois mesures différentes de $(\vec{OA}, \vec{OB'})$?

Activité 3

Soit C_1 le demi- cercle de diamètre [AA'] et contenant le point B

Soit S le point de C_1 tel que $(\widehat{\vec{OA}, \vec{OM}}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

1) Faire une figure et déterminer les coordonnées de S dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) Soit S_1 et S_2 les symétriques de S, respectivement, par rapport à (OB) et à (OA)

Déterminer les coordonnées de S_1 et S_2 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Définition

Pour tout point M de C , l'abscisse de M est appelé le cosinus de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.

Si θ est une mesure de cet angle, on le note $\cos\theta$

L'ordonnée de M est appelé le sinus de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$; on le note $\sin\theta$

Activité 4

Compléter :

a) Au réel $\alpha = 0$, on associe le point A (...,...),

On en déduit $\cos 0 = \dots$ et $\sin 0 = \dots$

b) Au réel $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on associe le point B (...,...),

On en déduit $\cos\frac{\pi}{2} = \dots$ et $\sin\frac{\pi}{2} = \dots$

c) Déterminer les cordonnées du point A' associé à π

En déduire $\cos\pi$, $\sin\pi$ et $\tan\pi$

d) Déterminer $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Activité 5

Recopier puis Compléter le tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	
Sinx			$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$						$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
Cosx	1			$\frac{1}{2}$						$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
Tanx					/////					

Activité 6

Soit α un réel, M le point de C qui lui est associé (On a ainsi, α une mesure de $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$).

1) Ecrire OM^2 en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

2) En déduire le résultat suivant :

Pour tout réel α , $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

Ce résultat est dit le théorème fondamental de la trigonométrie.

Activité 7

1) Déduire du théorème précèdent que pour tout réel x,

$\sin x \in [-1,1]$ et $\cos x \in [-1,1]$

2) Vérifier ce résultat graphiquement.

Activité 8

Considérons le réel $\frac{\pi}{3}$ et le point M du cercle trigonométrique qui lui correspond (donc $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$).

a) Déterminer sur $\mathscr{C}$ les points qui correspondent aux réels

$\frac{\pi}{3}+2\pi$, $\frac{\pi}{3}+4\pi$, $\frac{\pi}{3}+6\pi$, ...

$\frac{\pi}{3}-2\pi$, $\frac{\pi}{3}-4\pi$, $\frac{\pi}{3}-6\pi$, ...

b) Conclure puis comparer :

$\cos\frac{\pi}{3}$ et $\cos(\frac{\pi}{3}+2k\pi)$; $k\in\mathbb{Z}$.

$\sin\frac{\pi}{3}$ et $\sin(\frac{\pi}{3}+2k\pi)$; $k\in\mathbb{Z}$.

c) Soit N un point quelconque de $\mathscr{C}$ et x une mesure de l'angle$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON})$)

Comparer : $\cos x$ et $\cos(x+2k\pi)$; $k\in\mathbb{Z}$.

$\sin x$ et $\sin(x+2k\pi)$; $k\in\mathbb{Z}$.

Définition

Pour tout réel x et pour tout entier relatif k,

$\cos(x+2k\pi)=\cos x$

$\sin(x+2k\pi)=\sin x$

on dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques

Pour tout k, entier relatif non nul, $2k\pi$ est une période de chacune de ces deux fonctions.

2π est la plus petite période strictement positive

$\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin x$.

Ainsi :

$T=2\pi$ est appelé la période de la fonction cosinus

$T=2\pi$ est appelé la période de la fonction sinus

Activité 9

Soit x un réel et M le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}})=x+2k\pi$.

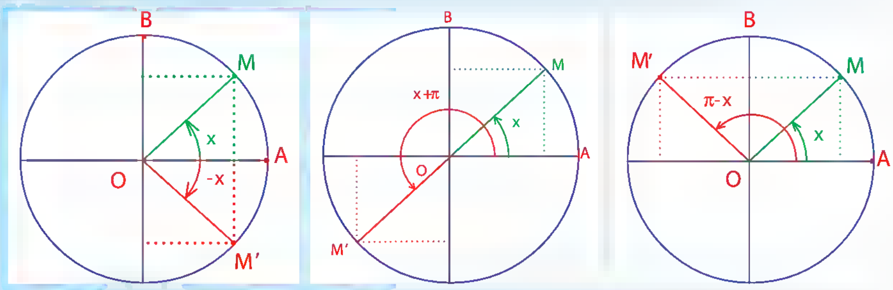
1) Placer sur $\mathscr{C}$ les points N, P et Q associés respectivement aux réels $\pi-x$, $(-x)$ et $\pi+x$

2) Vérifier les formules suivantes :

$\cos(-x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(x+\pi) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(x+\pi) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$



Activité 10

Soit $x \in IR$

a) Déterminer, en fonction de cosx,les réels suivants :

$\cos(x+2\pi)$, $\cos(x+3\pi)$, $\cos(x+4\pi)$, $\cos(x+5\pi)$

Quelle conjecture peut-on proposer ? Justifier ce résultat.

b) De même, déterminer $\sin(x+k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}$.

Activité 11

soit $x \in IR \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

1) Placer sur le cercle trigonométrique les points qui ne correspondent pas à x.

2) Montrer que pour tout entier k, $\tan(x+k\pi) = \tan(x)$

3) Que peut-on dire de la périodicité de la fonction tangente ?

4) Exprimer en fonction de tanx, $\tan(-x)$ et $\tan(\pi - x)$

Activité 12

Calculer

$$\cos\frac{2\pi}{3} \;;\; \sin\frac{2\pi}{3} \;;\; \tan\frac{2\pi}{3}.$$

$$\cos\frac{5\pi}{4} \;;\; \sin\frac{5\pi}{4} \;;\; \tan\frac{5\pi}{4}.$$

$$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right);\; \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right);\; \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right).$$

$$\cos\left(\frac{2005\pi}{3}\right);\; \sin\left(\frac{2005\pi}{3}\right).$$

Activité 13

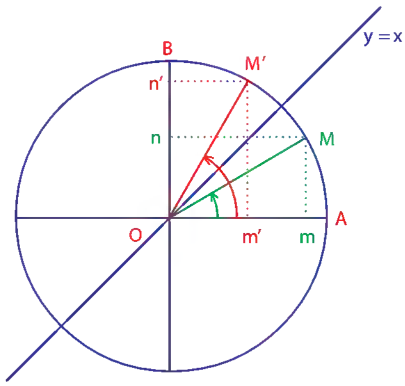
Soit $M \in C$, notons m et n les projetés orthogonaux respectifs de M sur l'axe (x'ox) et l'axe (y'oy).

Soit α une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

Soit Δ la droite d'équation y= x (première bissectrice) .

Soit S la symétrie orthogonale d'axe Δ .

Soit M' = S (M).



Notons n' et m' les projetés orthogonaux respectifs de M' sur (x'ox) et sur (y'oy)

1) a) Montrer que : $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ est une mesure de $(\vec{i}, \overrightarrow{ON})$..

b) Montrer que : $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$.

c) Montrer de manière analogue que : $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$.

2) En déduire que : $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$.

FORMULES D'ADDITION

Activité 14

Soit x et y deux réels, considérons les points M, N et M' de C vérifiant :

$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) = x + 2k\pi$, $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) = y + 2k\pi$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

On se propose de calculer les coordonnées du point N de deux façons différentes.

1) Quelles sont les coordonnées du point N dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

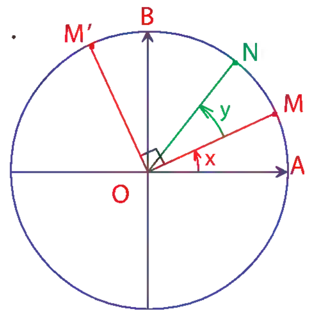
2) En déduire que $\overrightarrow{ON} = \cos(x+y)\,\vec{i} + \sin(x+y)\,\vec{j}$. (1)

3) a) Vérifier que le repère $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est orthonormé direct.

b) Montrer que : $\overrightarrow{ON} = \cos y .\ \overrightarrow{OM} + \sin y .\ \overrightarrow{OM'}$.

$\overrightarrow{OM} = \cos x\ \vec{i} + \sin x\ \vec{j}$.

$\overrightarrow{OM'} = (-\sin x)\ \vec{i} + \cos x\ \vec{j}$.



c) En déduire que $\overrightarrow{ON} = (\cos x \cos y - \sin x \sin y)\,\vec{i} + (\sin x \cos y + \cos x \sin y)\,\vec{j}$. (2)

d) En utilisant (1) et (2) montrer que pour tous réels x et y, on a :

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

➢ Voir une autre façon de démontrer ces deux formules sous forme d'exercice dans le chapitre « produit scalaire du plan »

Activité 15

1) soit x et y deux réels.

Montrer que $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

2) a) Ecrire $\dfrac{\pi}{12}$ comme différence de deux angles remarquables puis Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

b) Déterminer $\cos\dfrac{7\pi}{12}$, $\sin\dfrac{7\pi}{12}$, $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

Activité 16

soit $E = \mathrm{IR} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, x et y deux éléments de E tels que $x+y \in E$ et $x-y \in E$.

a) Montrer que $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

b) Déduire $\tan(x-y)$.

Activité 17

En utilisant les formules d'addition calculer les réels suivants en fonction de cos x ou sin x :

$$\cos(\pi + x)\ ;\ \sin(\pi + x)\ ;\ \cos(\pi - x)\ ;\ \sin(\pi - x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right);\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right);\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Activité 18

a) Montrer que pour tout réel x,

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

b) Montrer que pour tout réel x tel que x et 2x appartiennent à

$$E = \mathrm{IR} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ on a : } \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Activité 19

1) Retrouver $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2) Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

3) Calculer, des deux façons différentes, $\tan\dfrac{\pi}{8}$.

Résumé

PLANCHE DE TRIGONOMÉTRIE

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

Angles associés :

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad$ $\sin(\dfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\dfrac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $\sin(\dfrac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$

Formules d'addition :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\quad$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\quad$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Formules de duplication :

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$ $\quad$ $\sin 2a = 2\sin a \cos a.$

$= 2\cos^2 a - 1$

$= 1 - 2\sin^2 a.$

Formules de linéarisation :

$\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ $\quad$ $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

01 Pour chacun des nombres suivants, indiquer le sinus, le cosinus, et la tangente :

$$\frac{51\pi}{3}, \frac{-37\pi}{6}, \frac{43\pi}{4}, \frac{575\pi}{4}, \frac{-3432\pi}{3}.$$

02 Même question que l'exercice précédent pour les réels :

$$\frac{31\pi}{6}, \frac{-8\pi}{3}, \frac{-17\pi}{6}, \frac{732\pi}{3}, \frac{-2005\pi}{4}$$

03 Recopier et Compléter chacun des trois tableaux suivants :

$\cos a = \frac{2}{5}$	$0 < a < \frac{\pi}{2}$	$\sin a = ...$
$\cos a = -\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{2} < a < \pi$	$\sin a = ...$
$\cos a = -\frac{5}{13}$	$\pi < a < \frac{3\pi}{2}$	$\sin a = ...$

$\sin b = \frac{3}{5}$	$\frac{\pi}{2} < b < \pi$	$\cos b = ...$
$\sin b = -\frac{1}{3}$	$\pi < b < \frac{3\pi}{2}$	$\cos b = ...$
$\sin b = -\frac{12}{13}$	$\frac{3\pi}{2} < b < 2\pi$	$\cos b = ...$

$\tan a = \frac{1}{7}$	$0 < a < \frac{\pi}{2}$	$\cos a =$	$\sin a =$
$\tan b = -2$	$\frac{\pi}{2} < b < \pi$	$\cos a =$	$\sin a =$
$\tan b = \frac{1}{3}$	$\pi < b < \frac{3\pi}{2}$	$\cos a =$	$\sin a =$

04 Calculer le cosinus et le sinus de chacun des nombres suivants en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

$$\frac{3\pi}{2} + \alpha \ ; \frac{3\pi}{2} - \alpha \ ; \alpha + \frac{7\pi}{2} \ ; 13\pi - \alpha \ ; \alpha - \frac{15\pi}{2}$$

05 Vérifier que pour tout réel x on a:

- $\sin(\pi - x) + 2\cos(x - \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(-x) = \sin x$
- $\sin(\pi - x).\cos(x - \frac{\pi}{2}) + \cos(\pi + x).\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = 1$

06 Exprimer $\cos(x + \frac{17\pi}{4})$ et $\sin(x - \frac{22\pi}{3})$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

07 Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$, $\sin(x+a)$, $\cos(x+a)$, $\sin(x-a)$ et $\cos(x-a)$ pour chacune des valeurs suivantes de a:

$$\frac{19\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, -\frac{31\pi}{3}, -\frac{47\pi}{4}$$

08 Soit α un réel

Etablir les formules suivantes :

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \ ; \ 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

09 Soit $\alpha \in IR \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que :

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$; $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$.

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)} \ ; \ \sin^2\alpha = \frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}$$

10 Soit $\alpha \in IR \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Posons $t = \tan(\frac{\alpha}{2})$. Montrer que :

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ ; \ \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

11 Soit a un réel

Simplifier, quand elles existent, chacune des expressions suivantes :

$$A = \frac{\sin 2a}{\sin a} - \frac{\cos 2a}{\cos a} \ ; \ B = \frac{\sin 2a}{1+\cos 2a}$$

$$C = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos a}$$

12 Simplifier

$\sin(3a).\cos(5a) - \cos(3a).\sin(5a)$

$\cos(7a).\cos(4a) - \sin(7a).\sin(4a)$

$\cos(7a).\cos(4a) + \sin(7a).\sin(4a)$

$\frac{1}{2}\cos a - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a \,.\, \frac{1}{2}\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a.$

13 Ecrire sous la forme tan(x) où x est un réel à préciser en fonction de a

$\frac{\tan(3a)+\tan(a)}{1-\tan(3a).\tan(a)}$; $\frac{1+\tan(a)}{1-\tan(a)}$

$\frac{\tan(3a)-\tan(a)}{1+\tan(3a).\tan(a)}$; $\frac{\tan(a)-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan(a)}$

14 Montrer les relations suivantes

a) $\tan(2a) - \tan(a) = \frac{\tan(a)}{\cos(2a)}$

b) $2\cos(a+b)\sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$

c) $2\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos 2a - \cos 2b$

d) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2a$

15 Prouver les formules suivantes :

a) $\cos(a+b).\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

$= \cos^2 b - \sin^2 a$

b) $\sin(a+b).\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

16 a, b et c sont des réels qui ne sont pas des multiples de π, Montrer que :

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin a.\sin b} + \frac{\sin(b-c)}{\sin b.\sin c} + \frac{\sin(c-a)}{\sin c.\sin a} = 0$$

17 On donne $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

a) Calculer cos2x.

b) En déduire x sachant que $0 < x < \frac{\pi}{2}$

18 a) Soit a un réel, calculer cos4a et sin4a en fonction de sina et cosa.

b) A quelle condition tan(4a) existe ?

Dans ce cas écrire tan(4a) en fonction de tan(a)

19 Mettre sous forme d'un produit chacune des expressions suivantes:

$A = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

$B = \cos(x+y) - \cos(y-x)$

$C = \sin(x+\pi) - \sin(3x-\pi)$

$D = \cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos(x-\frac{\pi}{2})$

$E = \sin x + \sin 5x$

20 Vérifier que l'on a quel que soit le réel x

a) $\sin x + \sin(x+\frac{2\pi}{3}) + \sin(x+\frac{4\pi}{3}) = 0.$

b) $\cos x + \cos(x+\frac{2\pi}{3}) + \cos(x+\frac{4\pi}{3}) = 0.$

21 Montrer que

$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

(On pourra utiliser la relation

$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$)

22 On donne $\tan(x) = \sqrt{2} - 1$ avec $0 < x < \pi$

Calculer tan(2x) puis déterminer x

23 1) Montrer que pour tout réel x,

$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

2) On suppose que $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Calculer $\cos x - \sin x$ puis cosx et sinx

24 Fonction cotangente

On considère la fonction cotangente, notée cotan. définie par :$\cot an(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

1) Déterminer l'ensemble D de définition de la fonction cotangente

2) Montrer que la fonction cotangente est impaire

3) Montrer que pour tout x élément de D et pour tout entier relatif k on a :

$x + k\pi \in D$ et $\cot an(x + k\pi) = \cot an(x)$

(On distinguera les deux cas suivants :
$k = 2p$; $p \in \mathbb{Z}$ puis $k = 2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$)

4) Que peut-on déduire de la périodicité de la fonction Cotangente

5) Sur quelle partie de IR a-t-on l'égalité

$$\text{cotan } x = \frac{1}{\tan x} \;?$$

25 Dans chacun des cas suivants, donner des conditions sur α pour que les formules écrites soient valables puis prouver ces formules :

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{cotan } \alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\text{cotan } \alpha$

$\text{cotan }(\pi - \alpha) = -\text{cotan } \alpha$

$\text{cotan }(\pi + \alpha) = \text{cotan } \alpha$

$\text{cotan }\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$

$\text{cotan }\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$

26 Simplifier les expressions suivantes (On suppose qu'elles existent)

$$A(x) = \frac{\cos 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\cos x}$$

$$B(x) = \frac{2\cos^2\frac{x}{2} - 1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

27 Soit x un réel ;

a) Calculer de deux façons différentes $(\cos^2 x + \sin^2 x)^3$

b) En déduire que $\cos^6 x + \sin^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x = 1$

28 Montrer que les fonctions suivantes sont constantes et déterminer leurs valeurs

1) $f(x) = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$

2) $g(x) = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

29 Utilisons la calculatrice :

Soit $k \in$ IN.

Soit E l'ensemble des réels de la forme $\frac{k}{100}$ où $0 \leq k \leq 20$.

1) Pour chaque réel x de E, calculer une valeur approchée à 10^{-8} prés de chacun des réels : $\frac{x - \sin x}{x}$, $\frac{x - \sin x}{x^2}$, $\frac{x - \sin x}{x^3}$

2) Déduire que pour tout réel x de E, on a : $0 \leq x - \sin x < x^3$

3) On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leq x - \sin x < x^3$

Donner une condition suffisante sur x pour que votre calculatrice affiche x lorsque vous calculez sinx

30 Soit $k \in$ IN.

Soit F l'ensemble des réels de la forme $\frac{k}{100}$ où $0 \leq k \leq 20$.

1) Pour chaque réel x de F, calculer une valeur approchée à 10^{-8} prés de chacun des réels :

$1 - \cos x$, $\frac{1 - \text{Cos}x}{x}$, $\frac{1 - \text{Cos}x}{x^2}$

2) Déduire que pour tout réel x de F, on a : $0 \leq 1 - \cos x < x^2$

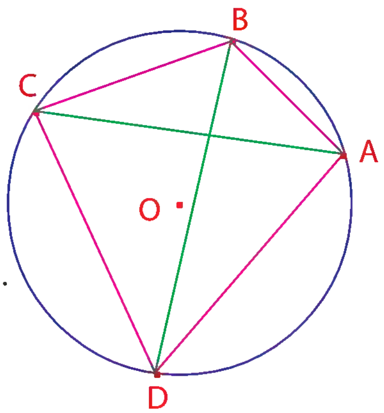
3) On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $0 \leq 1 - \cos x < x^2$

Déterminer les réels x pour que 1 soit une valeur approchée de Cosx à 10^{-8} prés

LE THÉORÈME DE PTOLÉMÉE

Dans un traité célèbre ‘‘l’Almageste’’, le grec Claude Ptolémée (90 – 168) exposa toute la trigonométrie de l’antiquité et donna son théorème

: « Dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des cotés opposés » .



Avec les notations de la figure,

AB x CD + BC x DA = AC x BD

Ce résultat lui servit à établir des formules trigonométriques.

Voici par exemple comment on peut prouver la relation

sin (a - b) = sin a cos b - sin b cos a pour deux angles a et b tels que a soit compris entre b (positif) et $\frac{\pi}{2}$

Considérons un quadrilatère ABCD inscrit dans un demi cercle de diamètre [AD] et de centre O, de sorte que AD = 1,

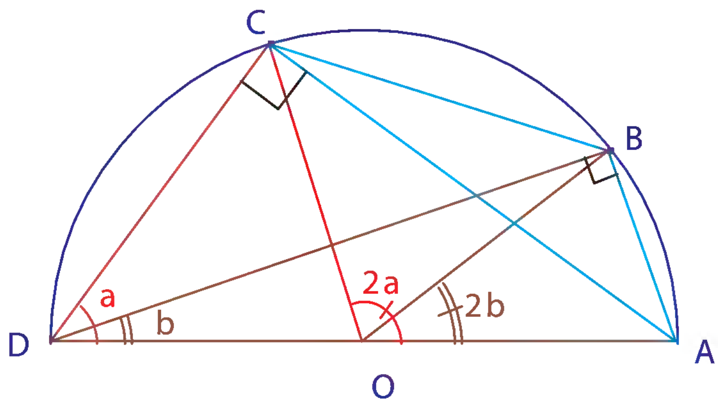
Les triangles ABD et ACD étant rectangles, on a AB = sin b, AC = sin a, mais aussi BD = cosb et CD = cos a.

Dans BCD la relation des sinus donne $\frac{BC}{\sin(a-b)} = 2R = AD = 1$

Par suite BC = sin (a-b)

Le théorème de Ptolémée affirme que AC x BD = AB x CD + BC x AD, soit encore, puisque AD = 1 : sin (a - b) = BC = AC x BD - AB x CD, d'où la relation :

sin (a - b) = sin a cos b - sin b cos a.



Chapitre 3

Équations et inéquations trigonométriques fondamentales

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on appelle équation trigonométrique fondamentale, toute équation du type $\cos x = a$ ou $\sin x = a$, $a \in \mathbb{R}$

On appelle inéquation trigonométrique fondamentale, toute inéquation du type $\cos x \leq a$ ou $\sin x \leq a$ ou $\cos x \geq a$ ou $\sin x \geq a$ avec $a \in \mathbb{R}$

le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et par A, B, A' et B' les points de $\mathcal{C}$ vérifiant $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OA'} = -\vec{i}$, $\overrightarrow{OB'} = -\vec{j}$

Activité 1

Soit x un réel tel que $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$

On désigne par M et N les images respectives de x et $\frac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique

1) Prouver que M et N sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2) En déduire que $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3) Montrer que si x et y sont deux réels vérifiant $\cos x = \cos y$ on a alors : $x = y + 2k\pi$ ou $x = -y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Activité 2

Soit x et y deux réels

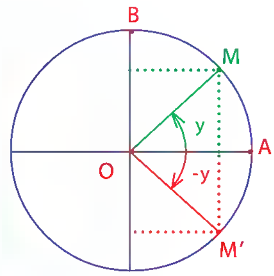
a) Si $x = y + 2k\pi$; que peut- on dire de cosx et cosy ?

b) Si $x = -y + 2k\pi$; que peut- on dire de cosx et cosy ?

c) Justifier le résultat suivant :

$\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi$ ou $x = -y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos x = \cos y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & \\ x = -y + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Activité 3

Soit x un réel tel que $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$

On désigne par K et L les images respectives de x et $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique C

1) Prouver que K et L sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

2) En déduire que $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3) Montrer que si x et y sont deux réels vérifiant $\sin x = \sin y$ on a alors : $x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Activité 4

Soit x et y deux réels

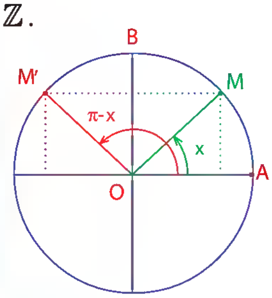
a) Si $x = y + 2k\pi$; que peut- on dire de sinx et siny

b) Si $x = \pi - y + 2k\pi$; que peut- on dire de sinx et siny

c) Justifier le résultat suivant :

$\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x = \sin y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & \\ x = \pi - y + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES FONDAMENTALES

Résolution de l'équation cosx=a

Activité 5

1) Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $\cos x = \dfrac{3}{2}$

b) $\cos x = -2$.

2) Conclure.

Activité 6

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\cos x = 0$

b) Montrer que l'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) est

$S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) Représenter sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ les éléments de S.

Activité 7

a) Montrer que l'ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ est

$\left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Activité 8

1) Montrer que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = 1$ est

$S_1 = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

2) Montrer que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = -1$ est

$S_1 = \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Activité 9

Soit $a \in]-1,1[$. On considère le cercle trigonométrique de diamètre [AA']

Soit H le point du segment [AA'] d'abscisse a

1) Vérifier l'existence de deux points M et M' de C qui se projettent orthogonalement en H sur la droite (AA')

2) Montrer que la résolution de l'équation cosx = a se ramène à déterminer les mesures des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}})$

3) En déduire que si α est une mesure de l'un des angles alors $-\alpha$ est une mesure de l'autre.

4) Montrer que $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

- Si $a \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ alors l'équation cosx = a n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $a \in [-1,1]$ alors il existe au moins une solution α de l'équation cosx = a
Dans ce cas l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette équation est :
$$S = \{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Activité 10

Résoudre les équations suivantes et représenter dans chaque cas les solutions sur C :

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x = -\frac{1}{2}$

Résolution de l'équation sinx=a

Activité 11

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) sinx = 1,01.

b) $\sin x = -\frac{4}{3}$

2) Conclure.

Activité 12

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E') : sinx = 0

b) Montrer que l'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E') est $S' = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) Représenter sur le cercle trigonométrique C les éléments de S'.

Activité 13

a) Montrer que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est

$$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

Activité 14

Soit $b \in]-1,1[$

On se propose de résoudre, dans ce cas, l'équation $\sin x = b$

Soit K le point du segment [BB'] d'ordonnée b

1) Vérifier l'existence de deux points N et N' de $\mathcal{C}$ qui se projettent orthogonalement en K sur la droite (BB')

2) Montrer que la résolution de l'équation $\sin x = b$ se ramène à déterminer les mesures des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON'}})$

3) En déduire que si α est une mesure de l'un des angles alors $\pi - \alpha$ est une mesure de l'autre

4) Montrer que $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

> • Si $b \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ alors l'équation $\sin x = a$ n'a pas de solution.
>
> • Si $b \in [-1,1]$ alors il existe au moins une solution α de l'équation $\sin x = b$
>
> Dans ce cas l'ensemble des solutions de cette équation est
>
> $$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Activité 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter dans chaque cas les solutions sur C

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Activité 16

a et c étant deux réels non nuls et b et d deux réels

Recopier et compléter les équivalences suivantes :

$$\cos(ax+b) = \cos(cx+d) \text{ équivaut à } \begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ \text{ou} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$\sin(ax+b) = \sin(cx+d) \text{ équivaut à } \begin{cases} \dots\dots\dots\dots \\ \text{ou} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Activité 17

On a déjà établi que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation sinx = 0 est $S = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

1) Soit x et $x_0 \in IR\backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = D$.

a) Montrer que : $\tan x = \tan(x_0) \Leftrightarrow \sin(x - x_0) = 0$.

b) En déduire que $x = x_0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2) On admet que pour tout réel c, il existe un unique réel x_0 de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $c = \tan x_0$

Résoudre l'équation tanx = c , $c \in \mathbb{R}$.

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$$

Activité 18

a) Compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{4}$
tanx			1	

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\tan x = -1$; $\tan x = 0$; $\tan x = 1$

Activité 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique C :

$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin 2x = \frac{1}{2}$; $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(3x)$; $\sin(3x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$

Exersices Résolus

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi, \pi]$

l'équation $\cos 3x = \sin(x + \frac{2\pi}{3})$

Solution :

- $\cos 3x = \sin(x + \frac{2\pi}{3}) \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + \frac{2\pi}{3})\right]$
  $\Leftrightarrow \cos 3x = \cos(-x - \frac{\pi}{6})$

Montrer alors que :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Point Méthode :
Pour résoudre une équation du type: $\cos u = \sin v$, on se ramène à une équation $\cos u = \cos w$, en écrivant que $\cos v = \sin(\frac{\pi}{2} - v)$ [ou à une équation $\sin t = \sin v$, en écrivant que $\cos v = \sin(\frac{\pi}{2} - v)$]

• Déterminons les réels de l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ appartenant à : $]-\pi,\ \pi]$

$$-\pi \le \frac{\pi}{12}+k\pi \le \pi \Leftrightarrow -\frac{13\pi}{12} \le k\pi \le \frac{11\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{13}{12} \le k \le \frac{11}{12} \Leftrightarrow k=-1 \text{ ou } k=0$$

d'où les réels de l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ appartenant à $]-\pi,\ \pi]$ sont : $-\frac{11\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{12}$

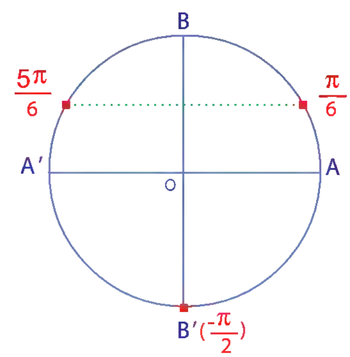
• On démontre de même que les réels de l'ensemble $\left\{-\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ appartenant à $]-\pi,\ \pi]$ sont : $-\frac{23\pi}{24}$, $-\frac{11\pi}{24}$, $\frac{\pi}{24}$ et $\frac{13\pi}{24}$

• Conclusion : L'ensemble des solutions, dans $]-\pi,\ \pi]$, de (E) est

$$\left\{-\frac{23\pi}{24}, -\frac{11\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, -\frac{11\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right\}$$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ et construire les images des solutions sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.



Solution :

(E) $\Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0$ avec $t = \sin x$

Cette équation à deux solutions $t' = -1$ et $t'' = \frac{1}{2}$

donc (E) $\Leftrightarrow$ $\sin x = -1$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$

On montre que

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES FONDAMENTALES

Activité 20

On se propose dans cette activité de résoudre l'inéquation $\cos x \ge \frac{1}{2}$, on note S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$

1) Placer sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, les points M_1 et M_2 d'abscisse $\frac{1}{2}$.

2) Placer sur $\mathcal{C}$ des points N_1, N_2 , N_3 et N_4 ayant chacune une abscisse inférieure à $\frac{1}{2}$.

3) Placer sur $\mathcal{C}$ des points K_1 et K_2 ayant chacune une abscisse supérieure à $\frac{1}{2}$.

4) Notons x_1, x_2, x_3, x_4, y_1 et y_2 des mesures respectives des angles $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON_1}})$ $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON_2}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON_3}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON_4}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK_1}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK_2}})$.

Comparer à $\frac{1}{2}$ chacune des valeurs suivantes :

$\cos x_1$, $\cos x_2$, $\cos x_3$, $\cos x_4$, $\cos y_1$ et $\cos y_2$.

5) Colorier l'ensemble des points M de $\mathcal{C}$ tels que une mesure x de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ vérifie $\cos x \geq \frac{1}{2}$

6) Montrer que S est la réunion des intervalles $I_k = \left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ \frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ qu'on note $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$

Activité 21

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$. On note S l'ensemble des solutions de cette inéquation.

1) Placer sur $\mathcal{C}$ les points M_1 et M_2 ayant pour ordonnée $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et déterminer une mesure de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_2}})$.

2) Colorier avec deux couleurs différentes les deux arcs géométriques de $\mathcal{C}$ d'extrémité M_1 et M_2 .

3) Lequel des deux arcs est l'ensemble des images sur $\mathcal{C}$ des solutions de l'inéquation $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) Vérifier que $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ où $I_k = \left]\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right[$

Activité 22

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$\cos x > \frac{3}{2}$; $\cos x \leq -2$; $\sin x \geq -1$; $\sin x \leq \frac{3}{2}$

2) Soit $a \in \left]1,+\infty\right[$ et $b \in \left]-\infty,-1\right[$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $\cos x \geq a$; $\sin x \geq a$; $\cos x \leq b$; $\sin x \leq b$

Activité 23

Résoudre dans $\left[0\ ,\ 2\pi\right]$ chacune des inéquations suivantes et construire les images des solutions sur le cercle trigonométrique

a) $\cos x \leq 0$.

b) $2\sin x - 1 \leq 0$

c) $(2\sin x - 1)\cos x \leq 0$

Activité 24

a) Montrer que les deux inéquations suivantes sont équivalentes :

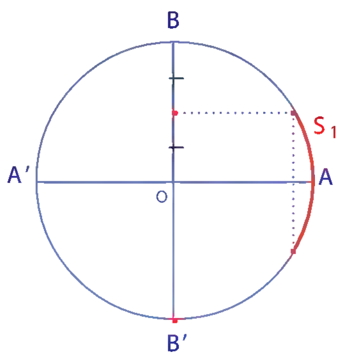
$(E_1) : 2\sin(3x - \frac{\pi}{2}) - 1 < 0$ et $(E_2) : \cos 3x > - \frac{1}{2}$

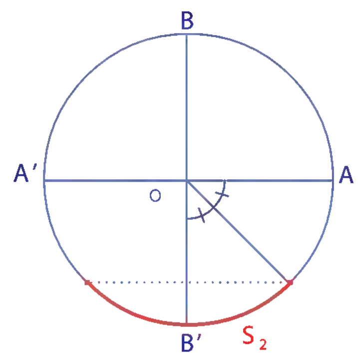
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, (E_2). En déduire l'ensemble de solutions de (E_1)

Activité 25

Sur les figures ci - dessous, on a coloré sur $\mathcal{C}$ les ensembles S_1 et S_2 des images des solutions des deux inéquations trigonométriques .

Donner l'inéquation correspondante à S_1 et celle correspondante à S_2





Exercice résolu :

Résoudre dans $\left[0 , 2\pi\right]$ l'inéquation (E) : $4\cos^2 x - 2(\sqrt{2} - 1)\cos x - \sqrt{2} > 0$

Solution :

Posons $t = \cos x$ donc $t \in [-1, 1]$

(E) est équivalente à $\begin{cases} 4t^2 - 2(\sqrt{2} - 1)t - \sqrt{2} > 0 \\ t \in [-1, 1] \end{cases}$

Résolvons l'équation $4t^2 - 2(\sqrt{2} - 1)t - \sqrt{2} = 0$

$\Delta' = (\sqrt{2} - 1)^2 + 4\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$

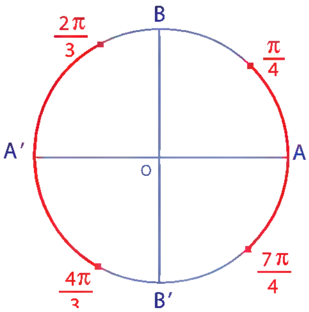
donc $t_1 = \dfrac{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} - 1}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $t_2 = \dfrac{\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

t	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$4t^2 - 2(\sqrt{2} - 1)t - \sqrt{2}$		+	0	-	0	+	

Ainsi $4t^2-2(\sqrt{2}-1)t-\sqrt{2}>0$ équivaut à $t\in\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1\right]$

Par suite $\cos x\in\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1\right]$

Ainsi $S_{[0,2\pi]}=\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[\cup\left]\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right[\cup\left]\dfrac{7\pi}{4},2\pi\right]$



➢ Dans chacun des exercices suivants (de n°1 à n°23) résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation donnée.

01 $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

02 $\cos 2x + 1 = 0$

03 $2\cos(2x - \dfrac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$

04 $2\cos(3x - \dfrac{\pi}{3}) + 3 = 0$

05 $2\cos(x - \dfrac{\pi}{4}) + 1 = 0$

06 $4\cos^2(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}) = 3.$

07 $2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$

08 $\cos^2 x - \cos^2(2x - \dfrac{\pi}{4}) = 0$

09 $\cos 2x = \cos(x - \dfrac{\pi}{3})$

10 $\cos(x - \dfrac{\pi}{6}) + \cos(\dfrac{\pi}{3} - 3x) = 0$

11 $\cos\dfrac{x}{2}[\,2\cos(x + \dfrac{\pi}{3}) - \sqrt{3}\,] = 0$

12 $\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x = \dfrac{1}{2}$

13 $\cos 3x + \sin 2x = 0$

14 $\sin^2 x - \sin x \cos x = 0.$

15 $\sin^2 x - \sin x \cos^3 x = 0.$

16 $(1 + \sqrt{2}\cos x)(\cos 2x + 2\sin^2 x) = 0$

17 $(1 + \sqrt{2}\cos x)(\cos 2x - 2\sin^2 x) = 0$

18 $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{1}{2}.$

[On calculera d'abord de deux façons différentes $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2$

19 $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$

20 $4\sin^2 x - 2(1 - \sqrt{3})\sin x - \sqrt{3} = 0.$

21 $3\sin x = 2\cos^2 x.$

22 $\sin(x + \dfrac{\pi}{6}) = \sin(\dfrac{3\pi}{4} + 2x).$

23 $\sin x + \sin 4x = 0.$

➢ Dans chacun des exercices suivants (de n°24 à n°44). Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

24 $\cos(3x + \dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{2}$

25 $\cos(2x - \dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

26 $\cos(2x + \dfrac{\pi}{6}) = -\dfrac{1}{2}$

27 $2\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$.

28 $\sin(3x+\pi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

29 $\sin(x+\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{3\pi}{4}+2x)$

30 $4\sin^2x-1=0$

31 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\cos x$

32 $\sin(ax-\frac{\pi}{3})=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$

33 $2\sin 3x-\sqrt{2}=0$

34 $\sin(x+\frac{\pi}{5})+1=0$

35 $\sin(2x+\frac{\pi}{3})+1=0$

36 $2\sin 4x-\sqrt{3}=0$

37 $4\sin^2 2x-1=0$

38 $\sin^2 3x=\sin^2(x+\frac{\pi}{6})$

39 $\sin 2x\,(\sin x-\sin\frac{x}{2})=0$

40 $\sin(x+\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{3\pi}{4}+2x)$

41 $\sin(x+\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{3\pi}{4}+2x)$

42 $\sin^2(3x+\frac{\pi}{3})-\sin^2(\frac{2\pi}{3}-x)=0$

43 $\sin 5x\cos x-\cos 5x\sin x=-\frac{1}{2}$

44 $\cos x=\sin x$.

➤ **Dans les exercices suivants du n°45 au n°51 résoudre chacune des équations proposées après avoir déterminé le domaine sur le quel elle est définie.**

45 $\tan^2x=\sqrt{3}$

46 $\sqrt{3}\tan(3x+\frac{\pi}{6})=-1$

47 $\tan(2x+\frac{\pi}{3})=1$

48 $3\tan^2(3x+\frac{\pi}{6})=1$

49 $\tan\frac{x}{3}(1-\tan^2 2x)=0$

50 $\tan(x+\frac{\pi}{3})=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$

51 $\sqrt{3}\tan^2x+(1+\sqrt{3})\tan x+1=0$.

52 On définit un réel t par :

$\cos t=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $0<t<\frac{\pi}{2}$

1) Calculer cos2t. En déduire t.

2) Résoudre l'équation :

$4(\cos 7x\cos x+\sin 7x\sin x)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

53 a) Montrer que $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

b) Résoudre l'équation $\tan 2x=2-\sqrt{3}$

54 a) Vérifier que $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

b) Quelle est la valeur de $\tan\frac{3\pi}{8}$?

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\tan 2x=1+\sqrt{2}$

55 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des deux équations trigonométriques suivantes

a) $\sin^2x = \cos^2x$

b) $1 + \cos x + \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$

56 Résoudre successivement dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes:

$(E_1) : 2y^3 - 18y = y^2 - 9.$

$(E_2) : 2\sin^3x - 18\sin x + \cos^2x + 8 = 0.$

57 On considère l'expression :

$A(t) = \cos 2t\,(2\cos 3t + 1)$ où t est un réel quelconque

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A(t) = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2\cos 3t + 1 < 0$.

3) Déduire le signe de $A(t)$ sur $[0\,,\frac{\pi}{2}]$

58 Soit $f(x) = \dfrac{2\sin t - \sin 2t}{2\sin t + \sin 2t}$

1) Déterminer le domaine de définition D de f.

2) a) Montrer que $1 + \cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$ et que $1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$.

b) Montrer que pour tout t de D; $f(t) = \tan^2\frac{t}{2}$.

c) En déduire la valeur de $\tan\frac{\pi}{8}$

59 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi, \pi]$ l'équation : $1+\sqrt{2}\sin 3x = 0$

2) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{2}\cos 3x}{1+\sqrt{2}\sin 3x}.$$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$, l'équation $f(x) = 0$

60 1) Montrer que pour tout réel x ,

$\cos 2x + \sin 2x + \sin^2x = (\cos x + 2\sin x)\cos x$

2) Résoudre alors l'équation :

$\cos 2x + \sin 2x + \sin^2x = 0.$

61 Soit $h(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + 2\sin x - 1)$

1) Calculer $h(\frac{\pi}{2})$ et $h(\frac{\pi}{6})$.

2) Montrer que pour tout réel x,

$h(x) = \sin x - \sin^2x$

3) Résoudre dans IR, l'équation $h(x) = 0$

➢ **Dans chacun des exercices suivants, Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation donnée en représentant sur le cercle trigonométrique les points images des solutions trouvées.**

62 $\sin x - 1 \leq 0$

63 $2\cos x - \sqrt{3} \leq 0$

64 $2\sin 2x + \sqrt{3} < 0$

65 $2\cos(2x - \frac{\pi}{3}) \leq 1$

66 $\sqrt{2}\cos x - 1 < 0$

67 $2\cos^2x > 1$

68 $4\sin^2x - 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} < 0.$

69 $-4\cos^2 x + 2(\sqrt{2} + 1)\sin x + 4 + \sqrt{2} < 0$

70 $4\sin^2x + 2(1 - \sqrt{3})\cos x - 4 + \sqrt{3} > 0.$

➢ **Dans chacun des exercices suivants (de n°71 à n°76). Résoudre dans $\mathbb{R}$, dans $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puis dans $[0,2\pi]$ l'inéquation donnée.**

71 $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

72 $\cos x > \cos \frac{\pi}{8}$

73 $\sin 3x \leq \sin \frac{\pi}{5}$

74 $2\cos(x + \frac{\pi}{6}) - 1 > 0$

75 $(\sqrt{2}\sin x - 1)(4\cos^2 x - 3) > 0$

76 $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 \geq 0$

77 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $1 + 2\sin 2x = 0$ puis résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation : $\frac{1-2\cos 2x}{1+2\sin 2x} < 0$.

➢ **Dans chacun de deux exercices suivants résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation donnée.**

78 $\frac{4\sin^2 x - 1}{2\sin x - 1} \leq 0$

79 $\frac{4\cos^2 x - 1}{2\sin x - 1} \leq 0$

➢ **Dans chacun des exercices suivants étudier dans $[-\pi, \pi]$ le signe de la fonction donnée :**

80 $f(t) = \cos t + \sin 2t$

81 $g(t) = \sin 2t - \sqrt{2}\sin t$

82 $h(t) = \sin t(1 - \cos t)$

Chapitre 4

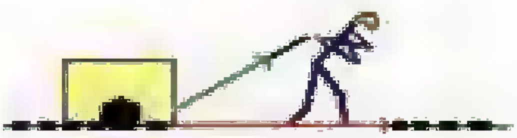
Produit scalaire dans le plan

- **Définitions**
- **Propriétés**
- **Activités dans un repère orthonormé**

INTRODUCTION

Activité 1

Un solide S est soumis à l'action d'une force F = 50N qui fait un angle $\alpha = \frac{\pi}{6}$ avec l'horizontale et ce pour le déplacer d'un point A à un point B distant de 10 m.



Calculer, en joule, le travail W de la force $\vec{F}$ allant de A à B.

(On rappelle la formule $W = F.\ell \cos \alpha$)

Activité 2

On donne dans le plan P deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et deux points A et A'.

1) construire les points B , C , B' et C' définis par :

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{A'B'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \vec{v}$.

2) Montrer que :

les deux réels $AB.AC.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ et $A'B'.A'C'.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}\right)$ sont égaux.

Définition

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

A , B et C trois points du plan tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

Activité 3

Revenir à l'activité 1 et interpréter le travail W de la force $\vec{F}$ en utilisant le produit scalaire de deux vecteurs que l'on précisera.

Activité 4

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = -\dfrac{\pi}{3} + k.2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{2}{3}$, $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (discuter)

Activité 5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Compléter la phrase suivante :

$\vec{u}.\vec{v} = 0$ si et seulement si ....

Activité 6

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs du plan et α un réel.

Montrer que :

a) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

b) $\left(-\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(-\vec{v}\right) = -\vec{u}.\vec{v}$

c) $\left(\alpha\vec{u}\right).\vec{v} = \alpha\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$

d) $\vec{u}.\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$

Soient A, B et C trois points du plan tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.
Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
$\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^{\,2}$ et on lit : le carré scalaire de $\vec{u}$

$\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}}$

Exercice

ABCD est un carré de centre O et de côté a.

Calculer,en fonction de a, les réels suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$

Propriétés :

On admet la propriété suivante :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan on a : $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

Activité 7

Démontrer les propriétés suivantes : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant trois vecteurs du plan

- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$
- $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

Exercice

Développer les produits suivants :

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 ; \left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 ; \left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right) ; \left(3.\vec{u}-2\vec{v}\right).\left(\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)$

AUTRE EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE

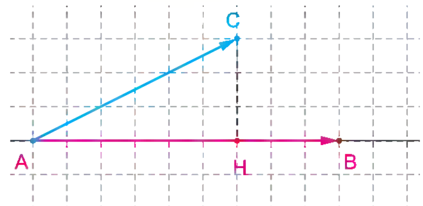
Activité 8

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Soit A, B et C des points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ On désigne par H le projeté orthogonal de C sur (AB).

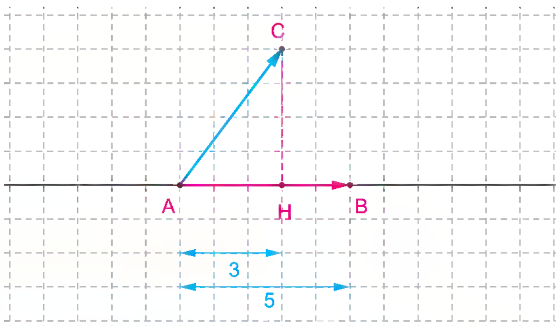
1) Montrer que $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

2) En déduire que

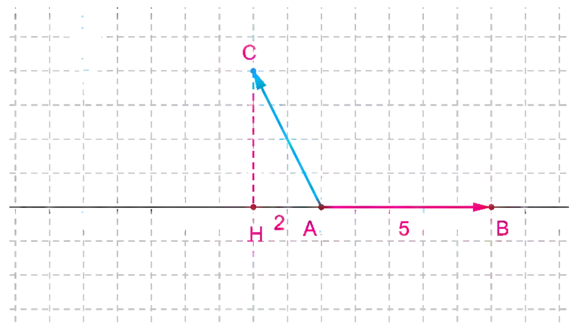
- $\vec{u}.\vec{v} = AB.AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.
- $\vec{u}.\vec{v} = - AB.AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.



3) Compléter



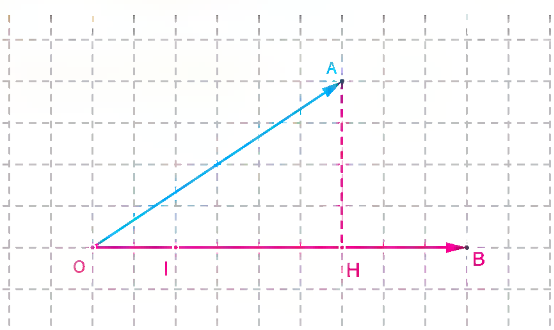
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ...$



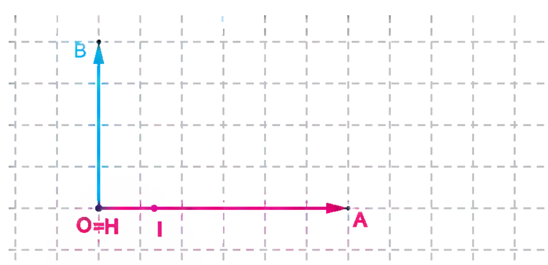
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ...$

Activité 9

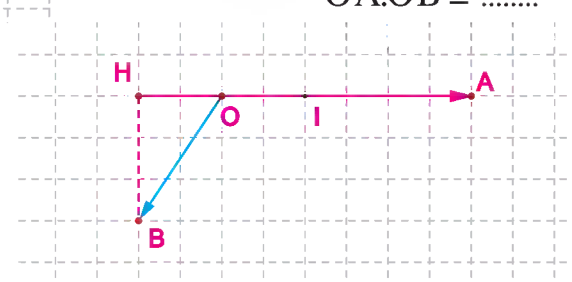
Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ dans chacun des cas suivants :



$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = ...$



$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = ...$



$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = ...$

Activité 10

Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit H le pied de la hauteur issue de A.

a) Montrer que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = BC.BH$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = BA^2$

b) En déduire que $BC.BH = BA^2$

Activité 11

Soit ABC un triangle.

On pose $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ $\widehat{BAC} = \widehat{A}$ $\widehat{ABC} = \widehat{B}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{C}$

a) Calculer $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$ de deux manières. En déduire que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

b) Démontrer les deux autres formules analogues.

Activité 12

On donne dans le plan P un vecteur non nul $\vec{u}$ et un point O.

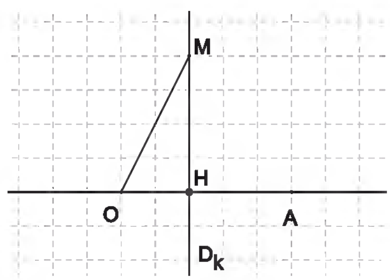
On considère l'application f qui à tout point M du plan associe le réel $f(M) = \vec{u}.\overrightarrow{OM}$.

A tout réel k on associe l'ensemble $D_k = \{M \in P, f(M) = k\}$.

D_k s'appelle ligne de niveau de f.

On se propose dans cette activité de déterminer D_k.

Soit A le point définit par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et pour tout point M du plan, on désigne par H son projeté orthogonal sur la droite (OA).



1) On suppose que k est un réel positif. Montrer que :

$M \in D_k$ si et seulement si $H \in [OA)$ et $OH = \dfrac{k}{OA}$

En déduire que D_k est la droite perpendiculaire à (OA) en H

2) On suppose que k est un réel négatif.

Montrer que :

$M \in D_k$ si et seulement si $H \in [OA')$ et $OH = \dfrac{-k}{OA}$

(A' étant le symétrique de A par rapport à O)

3) Construire D_0 , D_2 , D_{-1} et $D_{-\frac{1}{2}}$

Activité 13

Soient A et B deux points distincts du plan et g l'application du plan P dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M associe le réel $g(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

Pour tout réel k , on note C_k la ligne de niveau k de g. On se propose dans cette activité de déterminer C_k.

On pose AB = 2a ($a \in]0, +\infty[$) et O le milieu de [AB].

1)a) Montrer que pour tout point M du plan P, $g(M) = MO^2 - a^2$

b) En déduire que $M \in C_k$ si et seulement si $OM^2 = a^2 + k$.

c) Discuter, suivant le réel k, la nature et les éléments caractéristiques de C_k.

2) Construire C_0 et C_1 (pour a = 2).

> Soient A et B deux points distincts du plan.
> L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
> est le cercle de diametre [AB].

ACTIVITÉS DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ DU PLAN

Activité 14

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non nuls du plan. Montrer que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan si et seulement si $\vec{i}.\vec{j} = 0$ et $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = 1$

Activité 15

Soit $B = \left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base orthonormée de l'ensemble ϑ des vecteurs du plan.

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_B$

Montrer que $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ et $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Activité 16

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(1, 0)$, $B(-2, \sqrt{3})$ et $C(\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} + 1)$.

1) Calculer BA et BC.

2) a) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

b) En déduire la valeur de $\cos \widehat{ABC}$ et la mesure de $\widehat{ABC}$

Activité 17

1) Soient $B' = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ une base orthonormée de ϑ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B'}$ un vecteur.

Montrer que $\begin{cases} x = \overrightarrow{e_1}.\vec{v} \\ y = \overrightarrow{e_2}.\vec{v} \end{cases}$

2) Soit $B = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base orthonormée de ϑ

On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

a) Montrer que $B' = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est une base orthonormée de ϑ

b) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}_B$. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base B'

Activité 18

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points :
A (2 , 1) , B (4 , 3) et M (x , y).

a) Calculer $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

b) En déduire une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB].

Activité 19 (Hauteurs d'un triangle)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

On donne les points A (- 1 , 6) , B (1 , 1) et C (5 , 4).

1)a) Placer les points A , B et C.

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

c) ABC est-il un triangle rectangle ?

2) On désigne par Δ et Δ' les droites qui portent les hauteurs issues respectivement de A et B.

a) Montrer que pour tout point M (x , y) de P, $M \in \Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$.

En déduire une équation cartésienne de Δ.

b) Déterminer de même une équation cartésienne de Δ'.

3) a) Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

b) Vérifier que $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$

Exercice résolu

On donne dans le plan P, deux points A et B tels que AB = 4.

Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = 3$ (1)

Pour résoudre analytiquement ce problème on utilisera la stratégie suivante :

1) Transformer l'égalité (1) en utilisant $\overrightarrow{MA}^2$ et $\overrightarrow{MB}^2$
2) Choisir un repère orthonormé convenable du plan.
3) Déterminer une équation cartésienne de (Γ)
4) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

Solution

1) $\dfrac{MA}{MB} = 3$ équivaut à $MA = 3\ MB$

équivaut à $MA^2 - 9\ MB^2 = 0$

équivaut à $\overrightarrow{MA}^2 - 9.\overrightarrow{MB}^2 = 0$

2) On choisit un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ de la manière suivante :

- O le milieu de [AB].
- $\vec{i} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$
- $\vec{j}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{i}$

3) Dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, On a : A (2 , 0) et B (-2 , 0).

Pour tout point M(x , y) de P on a : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 2 - x \\ -y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} -2 - x \\ -y \end{pmatrix}$

$M \in (\Gamma)$ équivaut à $\overrightarrow{MA}^2 - 9.\overrightarrow{MB}^2 = 0$ équivaut à $(2 - x)^2 + y^2 - 9[(-2 - x)^2 + y^2] = 0$

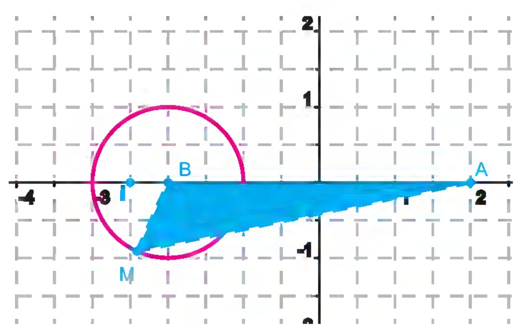
équivaut à $-8x^2 - 8y^2 - 40x - 32 = 0$

équivaut à $x^2 + y^2 + 5x + 4 = 0$

équivaut à $\left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

4) Conclusion (Γ) est le cercle

de centre $\Omega\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{2}$



Résumé

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$$

A, B et C étant trois points du plan tels que $A \neq B$.

H le projeté orthogonal de C sur (AB).

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires et de même sens} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB.AH & \text{si AB et AC sont colinéaires et de sens contaires} \end{cases}$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et pour tout réel α on a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.\left(\alpha.\vec{v}\right) = \left(\alpha.\vec{u}\right).\vec{v} = \alpha\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée :

- $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

01 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et α une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$ et $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$.

b) $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.

c) $\|\vec{u}\| = 3$ et $\vec{u} = -2\vec{v}$.

d) $\|\vec{u}\| = 4$ et $\vec{u} = 8\vec{v}$.

02 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

a- Calculer $(\vec{u} + \vec{v})^2$

b- En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}.(\|\vec{u}+\vec{v}\| - \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|)$.

c- On considère un triangle ABC tel que AB = 5, BC = 7 et AC = 3.

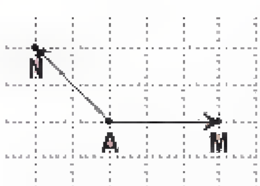
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

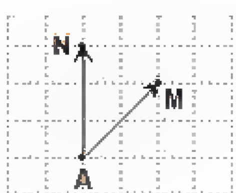
03 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

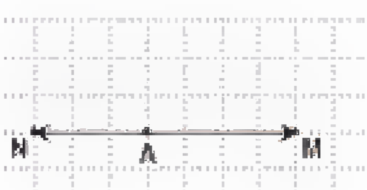
Montrer que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

04 L'unité de longueur étant le côté du carreau, calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$ dans chacun des cas suivants :







05 Soit ABC un triangle isocèle en A avec AB = AC = 8 et BC = 6. Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$

06 Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 8 et AC = 6. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC).

a- Calculer $\cos\widehat{ACB}$ puis $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

b- En déduire la valeur de CH.

07 On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}.\vec{v} = -6$.

1°) Calculer les produits scalaires suivants :

$(3\vec{u} - 2\vec{v}).\vec{u}$, $\vec{v}.(2\vec{u} - 4\vec{v})$,

$(\vec{u} + 2\vec{v}).(-2\vec{u} + 5\vec{v})$, $(\vec{u} + \vec{v})^2$, $(2\vec{u} + 3\vec{v})^2$.

2°)Déterminer le réel t dans les cas suivants ;

a) $(t\vec{u} + \vec{v}).\vec{u} = 0$.

b) $-2\vec{v}.(3\vec{u} - t\vec{v}) = 2$.

c) $(t\vec{u} - \vec{v})^2 = 9$.

3°) Déterminer les réels x et y vérifiant

$(x\vec{u} + y\vec{v}).\vec{u} = 26$ et $(x\vec{u} + y\vec{v}).\vec{v} = -60$.

08 On donne les points A et B tels que AB = 4 construire les points M tels que :

a- AM = 5 et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 12$.

b- AM = 3 et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -8$.

09 On donne un triangle isocèle rectangle tel que AB = AC = a. Construire un point M tel que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 3a^2$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = 2a^2$.

10 ABC est triangle équilatéral de côté a. Construire l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

a- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 2a^2$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM} = \dfrac{-a^2}{2}$.

b- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = a^2$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CM} = -a^2$.

c- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 0$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CM} = 0$

11 Dans un triangle ABC, On pose

$a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

1) Développer le carré scalaire

$(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})^2$.

2) En déduire que :

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} = \frac{\cos\widehat{A}}{a} + \frac{\cos\widehat{B}}{b} + \frac{\cos\widehat{C}}{c}$$

3) a- Que devient cette égalité si ABC est équilatéral.

b- Montrer que ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si

$a = c.\cos\widehat{B} + b.\cos\widehat{C}$

Pour les exercices de 12 à 19 le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

12 Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

13 On considère les points A (-1,1), B (3,0), et C (4,3). Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

14 On donne les points

A (3,1), B (-1,5) et C (4,4).

a- Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b- Calculer AB et AC.

c- Calculer de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, en déduire $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ et une valeur approchée de $\widehat{BAC}$.

15 Déterminer x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}x-3\\-3x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3x\\x+1\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-3+x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x+5\\3\end{pmatrix}$.

16 Soit $\vec{u} = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\vec{j}$

1°) Calculer $\|\vec{u}\|$

2°)

a- Soit $\vec{v} = x\vec{i} - \vec{j}$ .Déterminer la valeur x_0 de x pour que $\vec{v}$ soit orthogonal à $\vec{u}$.

b- Pour $x = x_0$ on pose $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}.\vec{v}$.

Montrer que $(\vec{u}, \vec{w})$ est une base orthonormée.

17 On considère les points A(3,2), M(x,y) et le vecteurs $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j}$.

a- Calculer $\overrightarrow{AM}.\vec{n}$.

b- En déduire une équation cartésienne de la droite D passant par A et dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.

18 Soit les droites D et D' d'équations respectives $2x - 6y + 5 = 0$ et $y = -3x + 4$.

a- Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à D et un vecteur $\vec{n}'$ normal à D'.

b- Calculer $\vec{n}.\vec{n}'$,en déduire que D et D' sont perpendiculaires.

19 On considère les droites D et D' d'équations respectives y = ax + b et y = a'x +b'.

a- Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à D et un vecteur $\vec{n'}$ normal à D'.

b- En déduire que D et D' sont perpendiculaires si et seulement si aa' = -1.

20 On donne dans le plan deux points A et B tels que AB = 3. On se propose de déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $MA^2 + 2MB^2 = 18$.

1°) Soit G le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,2). Montrer que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

2°) a- Montrer que pour tout point M du plan, $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2$.

b- En déduire que : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MG^2 = 4$, préciser alors l'ensemble (Γ).

21 On donne deux points distincts A et B du plan .

1°)a- Montrer qu'il existe un point G et un seul tel que $\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

b) Montrer que pour tout point M du plan

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MG}$

c) En déduire l'ensemble des points M, tels que $\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB} = 0$..

2°) Déterminer de la même manière l'ensemble des points M du plan tels que

a) $\left(2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB} = 0$.

b) $\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\right) = 0$.

22 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ On considère la droite Δ dont une équation cartésienne est :

$2x + y - 4 = 0$. et le vecteur $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

1°) a- Montrer que D est l'ensemble des points M (x,y) du plan tels que : $\overrightarrow{OM}.\vec{n} = 4$.

b- En déduire la distance de O à Δ.

2°) Soit A(3,4)

a- Calculer $\overrightarrow{OA}.\vec{n}$.

b- Soit M un point de Δ. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\vec{n}$ est indépendant du point M et calculer sa valeur.

c- En déduire la distance A à Δ.

23 On donne deux points A et B et un réel k. Déterminer analytiquement l'ensemble des points M, tels que $MA^2 - MB^2 = k$ dans les cas suivants :

a) A(-1,2), B(2,3), $k = \frac{-3}{2}$.

b) A(2,-4), B(-1,1), k = 2.

c) A(-3,2), B(1,-2), $k = \frac{-5}{2}$.

24 On donne les points A(1,3), B(3,2), C(2,-2).

a- Déterminer analytiquement l'ensemble des point M(x,y) tels que.

$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$$

b- Donner une démonstration géométrique de ce résultat en considérant le barycentre G_1 des points (A,1), (B,1), (C,-1) et le barycentre G_2 des points (A,3), (B,-1), (C,-1).

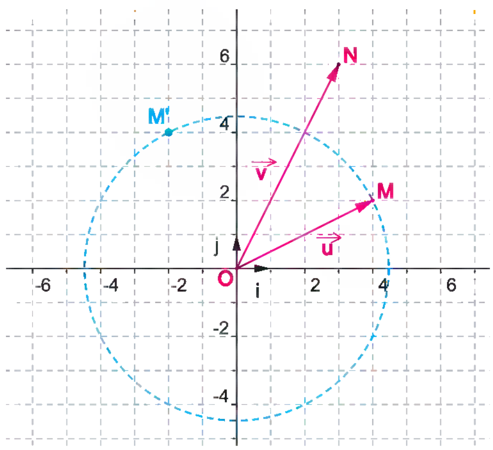
25 On donne les points A(2,1) et B(6,4). Déterminer analytiquement dans chaque cas l'ensemble des points M(x,y) tels que :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

b) $MA^2 - 2MB^2 = 64$.

c) $\dfrac{MA}{MB} = 3$

26 Thème : (sinus de l'angle de deux vecteurs). Dans le plan orienté P on donne deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On munit P d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et on considère les points M et N tels que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$ On désigne par (x , y) et (x', y') les coordonnées de M et N dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et par une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.



1°) Montrer que

$\overrightarrow{OM} = (OM \cos\alpha)\,\vec{i} + (OM \sin\alpha)\,\vec{j}$.

2°) Soit M' l'image de M par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre O.

a- Donner une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'})$.

b- En déduire que :

$\overrightarrow{OM'} = (-OM \sin\alpha)\,\vec{i} + (OM \cos\alpha)\,\vec{j}$.

c- En déduire que M'(-y,x) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) a- Montrer que .

$$\left(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) + k2\pi$$

b- Montrer alors que :

$\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM'} = ON.OM \sin(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$.

c- Montrer que $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OM'} = xy' - yx'$.

d- En déduire $\sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \dfrac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$

Application:

On donne les vecteurs

$\vec{u} = \vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j}$

1°) a) Calculer $\cos\left(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}\right)$.

b) En déduire une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$.

c) Déterminer de même une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{v})$.

d) En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$

2°) a- Calculer $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et $\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

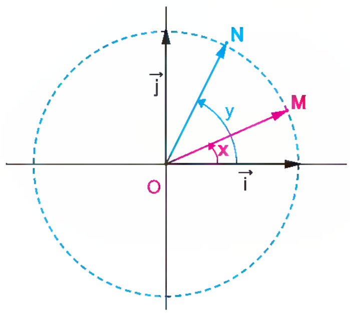
b- En déduire $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

27 Produit scalaire et formules trigonométriques :

Soient x et y deux réels. On considère les points M et N du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ définis par :

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = x + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}) = y + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



1°) Montrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos(y-x)$.

2°) a- Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ dans la base $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

b- En utilisant l'expression analytique du produit scalaire, écrire autrement $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$

3°) En déduire que pour tous réels x et y

$\cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$.

Al-KASHI ou Al-KASHANI, Gamshid ibn Messaoud, perse, 1350?-1439?

Al-Kashi, dit Ghyath ad-din (auxiliaire de la foi) est originaire de Kachan, en Iran, d'où son nom, il fut astronôme à Samarcande, en Ouzbékistan. Un des plus grands mathématiciens de l'époque. On ne connaît que l'année approximative de sa mort : 1436 ou 1439. Dans son principal traité (Maqalat Gamshid), il développa l'usage des nombres sexagésimaux (système de numération en base 60 qu'utilisaient les astronomes Babyloniens),du calcul trigonométrique, mais aussi des fractions décimales : on lui doit ce terme dans le calcul de qu'il fit en base 60 afin d'être mieux compris par ses contemporains.

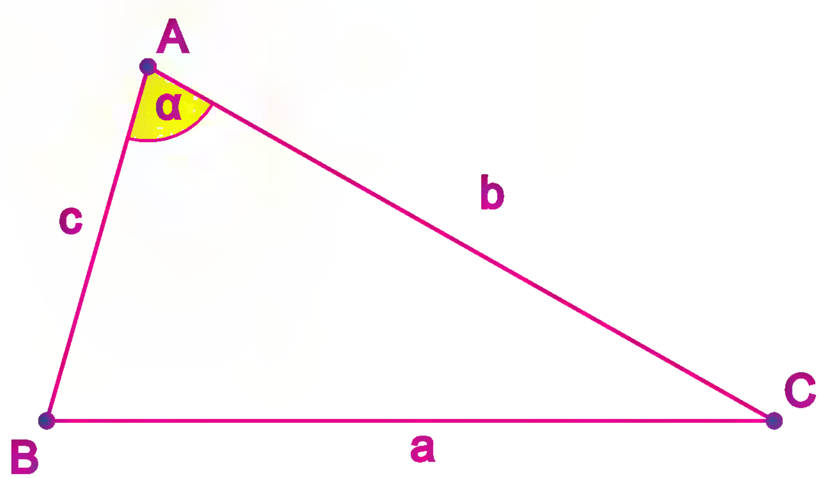
Théorème d'Al-Kashi, appelé parfois théorème de Pythagore généralisé :

On doit à Al-Kashi la généralisation du théorème de Pythagore et s'exprimant depuis Viète sous la forme : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \widehat{A}$

Si l'angle $\widehat{A}$ est droit on retrouve la formule de Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$.

On lui doit aussi la formule :$(a + b + c) \times r = bc.\sin \widehat{A}$ $(= ac.\sin\widehat{B} = ab.\sin\widehat{C})$ exprimant le rayon du cercle inscrit en fonction des côtés d'un triangle et de l'angle défini par ces côtés, ainsi que l'aire S du triangle sous la forme $(a + b + c) \times r /2$,

soit $S = \dfrac{1}{2} bc.\sin \widehat{A}$.



Chapitre5

Les Nombres Complexes

« L'esprit de la géométrie circule à peu prés partout dans l'immense corps des mathématiques et c'est une erreur pédagogique majeure de chercher à l'éliminer » René Thom

INTRODUCTION

Activité 1

1) Résoudre dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x + 3 = 0$; que remarquez-vous ?.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Q}$ l'équation $2x + 1 = 0$; que remarquez-vous ?.

3) Résoudre dans $\mathbb{Q}$ puis dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 2 = 0$; que remarquez-vous ?.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + 1 = 0$.

On admet les deux résultats suivants:

- Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{R}$ et dont l'un des éléments noté i est solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.
- $\mathbb{C}$ est appelé l'ensemble des nombres complexes
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.

i est un élément de l'ensemble $\mathbb{C}$ qui vérifie $i^2 = -1$

Exemples : $z_1 = 3 - 4i$; $z_2 = 5$ et $z_3 = 2i$ sont des nombres complexes

Vocabulaire :

Si $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.

a est la partie réelle de z, on la note Re (z).

b est la partie imaginaire de z, on la note Im (z).

L'écriture $z = a + ib$ est appelée la forme algébrique de z (dite aussi forme cartésienne de z).

- Si $b = \text{Im}(z) = 0$, z est dit réel.
- Si $a = \text{Re}(z) = 0$, z est dit imaginaire pur.

Activité 2

1) Soit a, b, x et y des réels

Montrer que si $a + ib = x + iy$ alors $a = x$ et $b = y$.

2) Soit a et b deux réels; justifier le résultat suivant : [Si $a + ib = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$]

3) Déterminer les réels x et y vérifiant $(2x - 3y) + i(x - y) = 7 - 4i$

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes où a, b, a'et b' sont des réels.

Par définition : $z + z' = (a + a') + i\,(b + b')$

Activité 3

Mettre sous la forme $x + iy$, où x et y sont des réels, les nombres complexes $z + z'$ et $z - z'$ dans chacun des cas suivants :

1) $z = 1 + i$; $z' = 2 - 3i$.

2) $z = \frac{1}{2} - 5i$; $z' = \sqrt{2} + i$.

3) $z = 7i$; $z' = -1 - 7i$.

Activité 4

En appliquant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$, calculer et mettre sous la forme algébrique le produit $z.z'$, dans chacun des cas suivants :

1) $z = 2 + 3i$; $z' = -1 + i$.

2) $z = 2i$; $z' = -3i$.

3) $z = -1 + 5i$; $z' = \frac{1}{5} + 2i$.

N'oublie pas que $i^2 = -1$

Activité 5

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes ; a, b, a' et b' sont des réels.

Donner la forme algébrique de $z.z'$

Activité 6

a) Soit $u = 5 - 3i$, déterminer le nombre complexe u' tel que : $u.u' = 1$.

b) Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

Montrer qu'il existe un nombre complexe non nul z' tel que $z.z' = 1$

z' est appelé l'inverse de z ; on le note $\frac{1}{z}$.

Les propriétés des opérations dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que celles dans $\mathbb{R}$, avec $i^2 = -1$

Théorème

Pour tous nombres complexes z et z' avec $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont des réels

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$

$-z = -a - ib$

$z - z' = (a - a') + i(b - b')$

$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$

Activité 7

Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants:

$(1+\frac{1}{3}i)+(-3+\frac{2}{3}i)$; $(-1-i)+(1+\frac{1}{2}i)$; $-(-1-i)$; $(-3+\frac{2}{3}i) - (1+\frac{1}{3}i)$

$(3-2i).(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i)$; $\dfrac{1}{3-4i}$; $\dfrac{1}{i}$

Définition

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a'et b' sont des réels avec $(a', b') \neq (0,0)$.

Le nombre complexe noté $\dfrac{z}{z'}$ est défini par $\dfrac{z}{z'} = z.\dfrac{1}{z'}$ est appelé le quotient des deux nombres complexes z et z'

Activité 8

En utilisant les mêmes notations que dans la définition ci-dessus, montrer que

$$\frac{z}{z'} = \frac{1}{a'^2+b'^2}\left[(aa'+bb')+i(a'b-ab')\right]$$

Déterminer alors la partie réelle puis la partie imaginaire de $\dfrac{z}{z'}$.

Activité 9

1) mettre sous forme algébrique les nombres complexes : $\dfrac{1+i}{1-i}$ et $\dfrac{\sqrt{2}+i}{1+3i}$

2) On donne les nombres complexes suivants: $z_1 = \sqrt{2} + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{2}$ et $z_3 = -4 + 3i$

Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants:

$\dfrac{1}{z_2}$; $\dfrac{1}{z_3}$; $\dfrac{z_1}{z_2}$ et $\dfrac{z_1}{z_3}$

CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe où a et b sont deux réels.
On appelle conjugué de z Le nombre complexe noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$

Activité 10

Déterminer les conjugués de chacun des nombres complexes suivants:
$2 + 3i$; $\sqrt{7} - i$; $2i + 1$; $i - 1$; $2i$; $\frac{5}{4}$

Activité 11

Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) Comparer z et $\bar{z}$ si z est réel.

b) Comparer z et $\bar{z}$ si z est imaginaire pur.

Activité 12

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$

1) Montrer que $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

2) En déduire que $\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - ib)$.

3) Donner la forme algébrique de l'inverse de chacun des nombres complexes suivants :

$z = 3 - 2i$; $u = 1 + i$; $v = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Activité 13

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques respectives $a + ib$ et $a' + ib'$ tels que $z' \neq 0$.

1) Vérifier que: $\frac{z}{z'} = \frac{1}{z'.\overline{z'}} \times (z.\overline{z'})$

2) En déduire que:

$$\frac{z}{z'} = \frac{1}{a'^2 + b'^2}\left[(aa' + bb') + i(a'b - ab')\right]$$

Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes,
on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur

Activité 14

Montrer que pour tous nombres complexes z et z' on a les égalités suivantes:

- $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$ où n est un entier naturel non nul.
- Si en plus $z' \neq 0$; $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Activité 15

1) Soit $z_0 = \pi - \dfrac{2}{5}i$ et $\lambda = \dfrac{5}{2\pi}$; mettre sous forme algébrique les nombres complexes :

$\lambda z_0, \lambda\overline{z_0}$ et $\overline{\lambda z_0}$. Que remarquez-vous ?

2) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; montrer que $\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$

Activité 16

1) Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants (on ne demande pas forcément la forme algébrique):

$2-3i$; $8+5i$; $\dfrac{2-3i}{8+5i}$; $(1-i)(5+6i)$; $(3+5i)^6$

2) Mettre sous forme algébrique : $\dfrac{1}{4-3i}$ et $\dfrac{3+2i}{1-i}$

Activité 17

Soit z un nombre complexe ; $z = a + ib$ où a et b sont deux réels

1) a) Calculer $\overline{z} + z$ et $z - \overline{z}$

b) En déduire que $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$

2) Etablir :

z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$

z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$

Activité 18

U est un nombre complexe vérifiant $u.\overline{u} = 1$ et $u \neq 1$

a) Montrer que le nombre $Z_1 = \dfrac{1+u}{1-u}$ est imaginaire pur.

b) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a , $Z_2 = \dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ est réel

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ce plan est appelé alors le plan complexe.

A tout nombre complexe $z = x + iy$ où x et y sont deux réels, on associe l'unique point M (x, y) du plan et réciproquement.

Définition

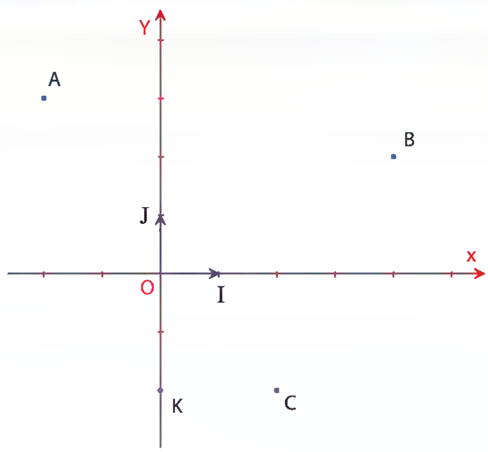
Le point M du plan complexe qui représente le nombre $z = x + iy$; est appelé le point image de z dans le plan complexe, on note M (z).

On dit aussi que z est l'affixe du point M notée z_M ; ou encore z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et on la note $z_{\overrightarrow{OM}}$ (ou Aff ($\overrightarrow{OM}$))

Activité 19

1) Déterminer les affixes de chacun des points I, J, A, B, C et K sur la figure ci-contre.

2) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OC}$



Activité 20

Placer dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points suivants :

E (1 + i) ; F (-1) ; G (-i) et H (-1+2i).

Activité 21

1) $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs et k est un réel.

Montrer que : a) $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$

b) $z_{k\vec{u}} = kz_{\vec{u}}$

2) Si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B du plan complexe

Montrer que: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

- Deux points sont confondus si seulement si ils ont la même affixe.
- Deux vecteurs sont égaux si seulement si ils ont la même affixe.
- $z_{\overrightarrow{MN}} = z_N - z_M$

Activité 22

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 3 + 4i et 5 + 2i.

Quelle est l'affixe du point G tel que O E F G soit un parallélogramme. Faire une figure.

Activité 23

1) Placer M et N deux points distincts quelconques dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) On note z_1 et z_2 les affixes respectives de M et N. Représenter le point S d'affixe $(z_1 + z_2)$.

3) Représenter les points M_1 et M_2 les images respectives de $\overline{z_1}$ et $(-z_1)$.

Que remarquez-vous ?.

- M(z) et N ($\overline{z}$) sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$
- M(z) et M' (-z) sont symétriques par rapport à l'origine O

Activité 24

1) A et B sont deux points quelconques du plan complexe.

Soit I le milieu de [AB]. Montrer que $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

2) Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC, montrer que $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$

MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

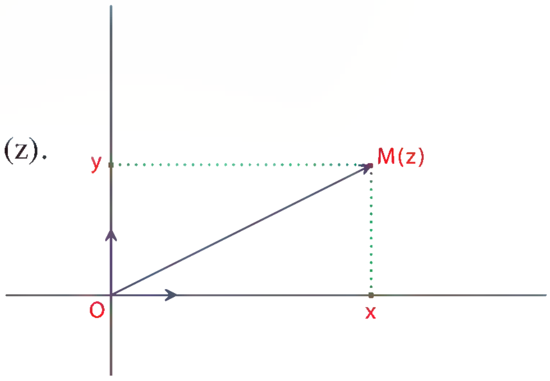
Activité 25

Soit z = x + iy où x et y sont des réels.
Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point M (z).

1) Exprimer OM en fonction de x et y.

2) Exprimer $z\,\overline{z}$ en fonction de x et y.

Conclure.



Définition

Soit $z = x + iy$ où x et y sont des réels.
On appelle module du nombre complexe z, le réel positif noté $|z|$ et défini par : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
On a ainsi $|z| = OM$

Activité 26

Si $M(z_1)$ et $N(z_2)$ sont deux points du plan complexe, montrer que $MN = |z_2 - z_1|$.

Activité 27

1) Calculer les modules des nombres complexes suivants :

$1 + i$; $1-2i$; $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$; 13 ; $5i$; -2 ; $-3i$; $\cos\theta + i\sin\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$

2) Calculer les modules des nombres complexes suivants : 1 ; i ; -1 ; $-i$; $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
Montrer que les points images des cinq nombres complexes cités ci-dessus appartiennent à un cercle que l'on précisera.

Activité 28

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$z_A = 1 - \frac{1}{2}i$, $z_B = \frac{5}{2}i$ et $z_C = 2 + \frac{3}{2}i$

1) Représenter les points A, B et C dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
2) Calculer AB, AC et BC.
3) Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle.

Activité 29

Soit $z \in \mathbb{C}$, comparer $|z|, |\bar{z}|, |-z|$ et $|-\bar{z}|$

Activité 30

le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Déterminer puis tracer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

a) $|z| = 1$; c) $|z - i| = 2$; b) $|z - i + 2| = 2$

d) $|z - 2| = |z - i|$; e) $|z - 1 - i| = |z + i|$

PROPRIÉTÉS DU MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE :

Activité 31

Soit z et z' deux nombres complexes.

Vérifier que $(z.z').(\overline{zz'}) = (z\overline{z}).(z'\overline{z'})$

En déduire que $|zz'| = |z||z'|$

Activité 32

1) Prouver les résultats suivants pour tous nombres complexes z et z'.

a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ (pour $z \neq 0$)

c) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Réfléchir à l'inégalité triangulaire)

2) En déduire les résultats suivants:

$|z^n| = |z|^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ (pour $z' \neq 0$)

$|\lambda z| = |\lambda||z|$ pour tout réel λ

Activité 33

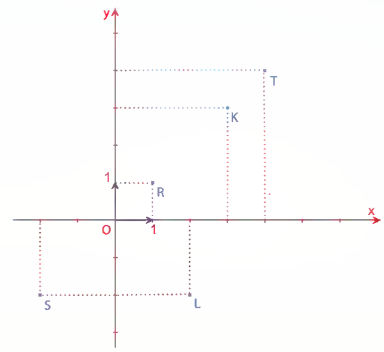
1) Calculer de deux façons différentes, le module de (1 - 2i) (1 + 3i)

2) Calculer le module de

a) $\dfrac{\sqrt{3} + i}{5 + 3i}$; b) $\dfrac{(\sqrt{3} - i)^5}{(1 + i\sqrt{2})^2}$

ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Activité 34



1) Considérons la figure ci-contre dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Donner l'affixe du point R.

b)Determiner l'ensemble des mesures de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OR})$

Définition

Soit z un nombre complexe non nul d'image M dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Toute mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est appelée un argument de z.

Activité 35

En utilisant la figure de l'activité précédente;

1) a) Parmi les affixes des points L, S, K et T quelles sont celles qui ont même argument, à $2k\pi$ prés $(k \in \mathbb{Z})$, que l'affixe de R.

b) Déterminer un argument de chacun des affixes des autres points

Un argument d'un nombre complexe non nul z est noté arg(z)

2) Déterminer, en utilisant leurs images : arg (1) , arg(i) , arg (7) ; arg (-7) et $\arg(\lambda i)$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Remarques :

- Le nombre complexe 0 est le seul qui n'a pas d'argument.
- Si θ est un argument de z, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

On écrit $\arg(z) = \theta + 2k\pi$

Activité 36

Déterminer par lecture graphique un argument de chacun des nombres complexes suivants:

1+i ; 3 + 3i ; 1-i ; -1+i ; -1-i.

Activité 37

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls

1) Interpréter géométriquement l'égalité de leurs modules.

2) Interpréter géométriquement l'égalité de leurs arguments à $2k\pi$ prés $(k \in \mathbb{Z})$.

3) En déduire les résultats suivants :

$$\begin{cases} z \text{ et } z' \text{ sont non nuls} \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Activité 38

1) Déduire du schéma ci-contre, les relations entre

a) $\arg(\overline{z})$ et $\arg z$

b) $\arg(-z)$ et $\arg z$

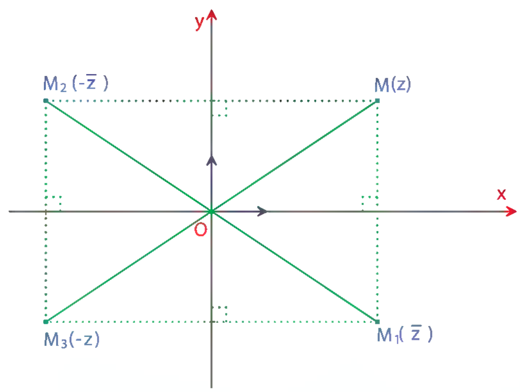
c) $\arg(-\overline{z})$ et $\arg z$

2) Déterminer $\arg \overline{z}$ et $\arg(-z)$

dans chacun des cas suivants

a) $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $\arg(z) = \dfrac{-3\pi}{5} + 2n\pi$, $(n \in \mathbb{Z})$.



Activité 39

Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie:

a) $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3} + 2K\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) $\arg(2z) = \dfrac{\pi}{2} + 2K\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

c) $\arg(-2z) = \dfrac{\pi}{4} + 2K\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

d) $\arg(\overline{z}) = \dfrac{\pi}{4} + 2K\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Activité 40

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique x + iy .

Soit M le point image de z.

On pose r = OM et θ une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

1) a) Exprimer x et y en fonction de r et θ .

b) En déduire que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

2) Réciproquement, soit un nombre complexe

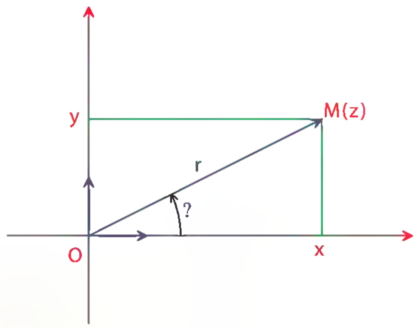
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où r est un réel strictement positif et θ est un réel.

a) Montrer que $|z| = r$.

b) Soit α un argument de z

Exprimer z en fonction de r et α

c) En déduire que $\alpha = \theta + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$



Théoréme et définition

Soit z un nombre complexe non nul.

- z s'écrit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
  avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$
- Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$
  Alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2K\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique de z.

r et θ sont les coordonnées polaires du point M (z)
On note $z = [r, \theta]$

Exemples:

1) $z = \sqrt{3} + i$; on a $|z| = \sqrt{3+1} = 2$.

D'ou $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

C'est la forme trigonométrique de z et on a ainsi $|z| = 2$ et $\arg z = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

2) Soit $\alpha \in IR$

$\cos\alpha + i\sin\alpha$ est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est α.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Forme algébrique
$z = x + iy$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$; $\sin\theta = \frac{y}{r}$

Forme trigonométrique
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$

$x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$

Activité 41

1) Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants:

$$\sqrt{3}\ ;\quad i\sqrt{5}\ ;\quad 1+i\quad ;\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\alpha - i\ \sin\alpha\ ;\ -7(\ \cos\alpha + i\ \sin\alpha)\text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

2) Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants:

a) $|z| = 2$ et $\arg z = \frac{\pi}{3} + 2K\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

b) $|z| = 3$ et $\arg z = -\frac{\pi}{4} + 2K\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

Activité 42

Soit z et z' deux nombres complexes non nul, posons $z = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $z' = r'\,(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$ où $r > 0$ et $r' > 0$.

1) Donner la forme trigonométrique de zz'.

En déduire que $\arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2K\pi$,$(k \in \mathbb{Z})$

2) Montrer que $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

En déduire que: $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

3) Montrer que $\arg(z^n) = n\arg z + 2k\pi$,$(k \in \mathbb{Z})$

$$[r, \theta].[r, \theta'] = [rr', \theta+\theta']$$

$$\frac{1}{[r, \theta]} = [\frac{1}{r}, -\theta]$$

$$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta]} = [\frac{r}{r'}, \theta-\theta']$$

$$[r,\theta]^n = [r^n, n\theta], n \in \mathbb{N}^*$$

Activité 43

1) Calculer de deux façons différentes le module et un argument de $(\sqrt{3}-i)^2$

2) Déterminer un argument de $(\sqrt{3}-i)^{12}$

Activité 44

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$2(1+i)\ ;\ (1-i)(1+i\sqrt{3})\ ;\ \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{i}\ ;\ \frac{(-1+i)^3}{(\sqrt{3}+i)^2}$$

Activité 45

Déterminer un argument de z dans chacun des cas suivants:

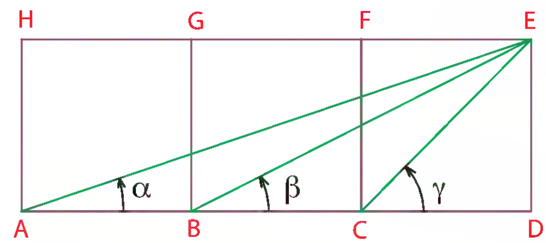
a) z est un réel strictement positif.

b) z est un réel strictement négatif.

c) z est imaginaire pur.

Activité 46 (Choix d'un repère du plan adopté à une figure et travail avec les affixes)

La figure ci-contre représente trois carrés isométriques accolés.
Montre, en utilisant les nombres complexes, que $\alpha + \beta = \gamma$



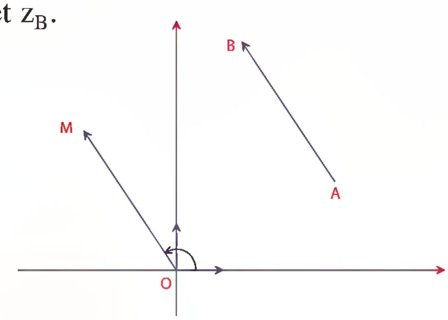
(On pourra considérer le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH})$)

COLINÉARITÉ ET ORTHOGONALITÉ DE DEUX VECTEURS

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère deux points distincts A et B d'affixes respectives z_A et z_B.

Soit M le point du plan complexe définie par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$

On a alors $z_M = z_B - z_A$



Activité 47

1) Démontrer les résultats suivants :

a) Soit A et B deux points distincts du plan

$$\arg(z_B - z_A) = (\vec{i}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$$

b) Soit A, B et C trois points du plan ; deux à deux distincts

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$$

2) En déduire les résultats suivants

Soit A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts.

a) A, B et C sont alignés si et seulement si :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$$

b) Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires

si et seulement si : $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Activité 48

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points R, S, T et M d'affixes respectives $z_R = 2 + i$, $z_S = 4 + 2i$, $z_T = 5 + \frac{5}{2}i$ et $z_M = 3 - i$

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RM}$

b) Montrer que les points R, S et T sont alignés.

c) Montrer que le triangle RSM est rectangle en R.

Résumé

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'affixe du point M de coordonnées (a, b) où a et b sont deux réels est le nombre complexe $z = a + ib$, on note z_M l'affixe de M.
Un point M d'affixe z sera noté M (z).

L'affixe du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels est le nombre complexe $z_{\vec{u}} = a + ib$

- M' (-z) est le symétrique de M (z) par rapport à O.
- Si $z = a + ib$ où a et b sont deux réels

Le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$ est appelé le conjugué de z,
M" $(\bar{z})$ est le symétrique de M (z) par rapport à l'axe $(O, \vec{i})$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z.\bar{z}}$$

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z':

$\lvert z.z' \rvert = \lvert z \rvert . \lvert z' \rvert$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$
$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$, $n \in \mathbb{N}$	$\arg(z^n) = n.\arg z + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$
$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$
$\left\lvert \frac{z}{z'} \right\rvert = \frac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$, $(z' \neq 0)$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$
$\lvert \bar{z} \rvert = \lvert z \rvert$	$\arg(\bar{z}) = -\arg z + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$
$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\arg(-z) = \pi + \arg z + 2k\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$

Résumé

$$[r\ ,\ \theta].[r\ ,\theta'] = [r.r'\ ,\ \theta + \theta']$$

$$\frac{1}{[r,\theta]} = [\frac{1}{r}, -\theta]$$

$$\frac{[r\ ,\ \theta]}{[r'\ ,\theta']} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta']$$

$$[r,\theta]^n = [r^n\ ,\ n\theta],\ n \in \mathbb{N}^*$$

- Soit z un nombre complexe non nul et M son image

$|z| = OM$ et $\arg(z) = (\widehat{\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OM}}) + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$

- Soit M et M’ les points d’affixes respectives z et z’,

$(\widehat{\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{MM'}}) = \arg(z' - z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$MM' = |z' - z|$

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs non nuls d’affixes respectives z et z’, alors

$\arg(\frac{z'}{z}) = (\widehat{\vec{u}\ ,\ \vec{u'}}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

➤**Pour tous les exercices, le plan est supposé muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ direct.**

➤**Dans les exercices de 1 à 7 mettre chacun des nombres complexes sous forme algébrique x + iy, avec x et y réels.**

01 a) $i-(3+2i)$; b) $3(4+i)-2(6-5i)$

c) $(5+3i)^2$; d) $(5-3i)^2$

e) $(5+3i)(5-3i)$; f) $i(i-1)$

02 a) $(1+i)^{11}$; b) $(1+i)^4$

c) $(1+i)^{2006}$

03 a) $\dfrac{1}{i}$; b) $\dfrac{1}{1-i}$

c) $\dfrac{1}{2-3i}$; d) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

04 a) $\dfrac{3+2i}{i}$; b) $\dfrac{3-5i}{2-i}$

c) $\dfrac{1}{2+i}$; d) $\dfrac{i-1}{i+1}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$; f) $\dfrac{-5+i}{11+3i}$

➤**Dans les exercices suivants de 5 à 7 déterminer le conjugué de chaque nombre complexe (on ne demande pas forcement la forme algébrique).**

05 a) $11-3i$; b) $7i$

c) $5i-9$; d) $i(13-6i)$.

06 a) $(-13i-2)(2+i)$; b) $(2+5i)^5$

c) $(2+i)(1-3i)^4$

07 a) $\dfrac{8+5i}{2-3i}$; b) $\dfrac{i(1-8i)}{(7+3i)^2}$

c) $\dfrac{2}{1+i}-\dfrac{3}{1-i}$

08 On pose $\alpha = \dfrac{3-i}{7+12i}$ et $\beta = \dfrac{3+i}{7-12i}$

Montrer sans faire de calcul que $\alpha+\beta$ est réel et que $\alpha-\beta$ est imaginaire pur

09 Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$a=5$; $b=-\sqrt{3}$; $c=\dfrac{\pi}{4}$; $d=-i$; $e=13i$

10 Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_3=-1-i\sqrt{3}$; $z_4=-3+4i$

$z_5=-5(\mathrm{Cos}\dfrac{\pi}{25}+i\mathrm{Sin}\dfrac{\pi}{25})$;

$z_6=5(\mathrm{Sin}\dfrac{\pi}{25}+i\mathrm{Cos}\dfrac{\pi}{25})$

11 Déterminer les parties réelles et imaginaires des complexes suivants dont on donne le module ρ et un argument θ.

a) $\rho=5$; $\theta=0$.

b) $\rho=3$; $\theta=\pi$.

c) $\rho=\dfrac{1}{2}$; $\theta=10\pi$

d) $\rho=2$; $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$

e) $\rho=1$; $\theta=\dfrac{143\pi}{3}$

12 Soit le nombre complexe $z=\dfrac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$

a) Mettre z sous sa forme algébrique.

b) Calculer le module et un argument de z.

13 Soit $z_1 = 1+i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

a) Calculer les modules et les arguments de z_1 et z_2.

b) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du produit $z_1.z_2$.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

14 a) Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|z| = 3$?

b) Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$?

➤Dans les exercices de 15 à 17 ; déterminer et représenter l'ensemble E des points M dont l'affixe z vérifie la condition imposée de l'une de deux manières suivantes (à votre choix) :

- Algébriquement ; en posant $z = x + iy$.
- Géométriquement ; en interprétant le module en terme de distance.

15 a) $|z| = 2\sqrt{2}$ b) $|z - 5i| = 3$

16 $|z - 1 + i| = \frac{3}{2}$, $|\bar{z} + i| = 2$

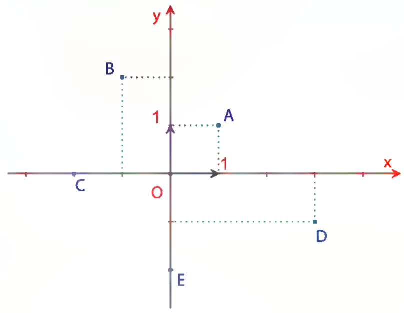
$|z| = |z - 1 - 3i|$, $|z - 2 + i| = |\bar{z} + 3i|$

17 $|z'| = 4$ où $z' = -2iz + 1 - 4i$

$|z''| = 1$ où $z'' = \dfrac{z + i}{1 + i - z}$

18 Quels sont les nombres complexes z tels que z et z^2 aient le même module ?

19 Dans le figure ci-contre :



1) Déterminer les affixes :

a) Des points O, A, B, C, D et E.

b) Des vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EB}$

2) Vérifier que ADEC est un parallélogramme.

20 On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

1) Calculer j^2 et en déduire les relations

$1 + j + j^2 = 0$; $j^3 = 1$; $\frac{1}{j} = j^2 = \bar{j}$.

2) Considérons les points A(1) ; H(j) et K(j^2).

a) Calculer $|j|$ et $|j^2|$

b) Placer dans le plan les points A, H et K

c) Montrer que le triangle AHK est équilatéral en utilisant l'une des deux méthodes suivantes :

i) calcul de AH, AK et KH.

ii) Détermination de deux angles parmi les trois angles de triangle AHK

21 Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

-5 ; 3 ; $\frac{2}{i}$; $3i$; $-\frac{3}{i}$; $3-3i$; $2i - 2\sqrt{3}$.

22 Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$(1+i)^5$; $(1+i\sqrt{3})^4$; $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^5}$;

$\cos\dfrac{\pi}{7} - i\sin\dfrac{\pi}{7}$; $\sin\dfrac{\pi}{7} + i\cos\dfrac{\pi}{7}$;

$\left(\dfrac{i}{1+i}\right)^{2007}$

23 Montrer que $(-1-i)^{15} = -128 + 128i$

24 Soit z le nombre complexe égal à $1 - i\sqrt{3}$.

1) Mettre z sous forme trigonométrique.

2) En déduire la forme algébrique du nombre complexe $Z = (1-i\sqrt{3})^9$

25 Soit x un nombre réel et

$z = (x-1)(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$

1) Déterminer le module et un argument de z

2) Montrer que z^{2008} est un nombre réel. Préciser son signe.

26 1) Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$z_1 = -1-i$ et $z_2 = -1+i\sqrt{3}$.

2) Soit $Z = \dfrac{z1}{z2}$; déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.

3) En déduire $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

27 1) Déterminer la forme algébrique puis la forme trigonométrique du nombre

$Z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$

2) En déduire les valeurs exactes de

$\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

28 Considérons le nombre complexe $a = 3+i$. Notons α , β et γ des arguments respectifs de a, ia et –ia

1) Comparrer les modules de a, ia et –ia.

2) Exprimer β puis γ en fonction de α

3) Placer dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct$(o, \vec{i}, \vec{j})$ les points A, B et C d'affixes respectives a, ia et –ia.

4) Quelle est la nature du triangle OBC.

5) En remarquant que :

$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OB}}) - (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OA}}) + 2k\pi$

Déterminer une mesure de l'angle

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

En déduire la nature du triangle OAB.

L'évolution vers des théories rigoureuses

L'intuition	Le doute		La rigueur	
XVIe siècle Italie		1746 d'Alembert	Fin XVIIIe début XIXe Wessel, Gauss, Argand,Cauchy	1853 Hamilton
Naissance des nombres imaginaires		« démontre » Tous les complexes sont du type a + ib	Représentation géométrique des complexes	Théorie rigoureuse des nombres complexes

La paternité du vocabulaire

- Imaginaire : Descartes, 1637.
- Nombre complexe : Gauss, 1831.
- Module : Argand, 1806.
- Notation $|z|$ (module) : Weierstrass.
- Argument : Cauchy, 1838.
- Notation i : Euler, 1777.

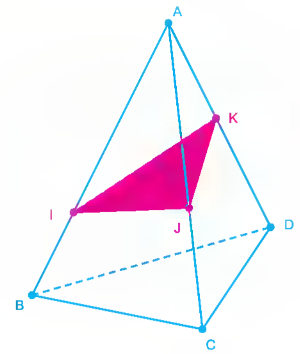
Chapitre 6

Vecteurs de l'espace

INTRODUCTION

Activité 1

Dans la figure ci-contre ABCD est un tétraèdre, les points I J et K appartiennent respectivement aux segments [AB] , [AC] et [AD]. On suppose que les droites (IJ) et (BC) , (JK) et (CD) (IK) et (BD) sont respectivement sécantes en L , M et N.



1) Recopier la figure sur une feuille de papier.

2) a- Marquer les points L , M et N.

b- Montrer que les plans (IJK) et (BCD) sont sécants et déterminer leur intersection.

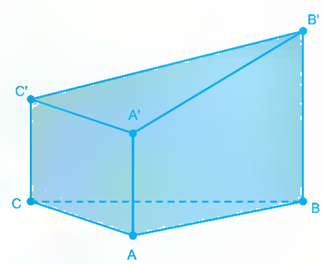
c- En déduire que les points L , M et N sont alignés.

Activité 2

On considère le solide ABCA'B'C' représenté par la figure ci-contre.

On suppose que les arêtes [AA'] , [BB'] et [CC'] sont parallèles ainsi que les arêtes [AC] et [A'C'].

On suppose aussi que les droites (AB) et (A'B') sont sécantes en I.



1) Recopier la figure sur une feuille de papier.

2) a- Placer le point I.

b- Montrer que les droites (BC) et (B'C') sont sécantes. (On pourra faire un raisonnement par l'absurde)

c- Placer le point d'intersection des droites (BC) et (B'C')

d- Montrer que les droites (AC) et (IJ) sont parallèles.

3) Donner cinq rapports égaux à $\dfrac{AA'}{BB'}$

4) Dans le plan (ACC') comparer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{A'C'}$

ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{CC'}$

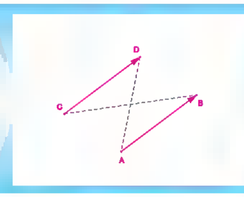
Comme dans le plan, un couple de points (A , B) de l'espace définit un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ et pour tout couple de points (C , D) de l'espace :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que [AD] et [BC] ont même milieu.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

signifie que [AD] et [BC] ont même milieu.

- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = ... = \vec{0}$

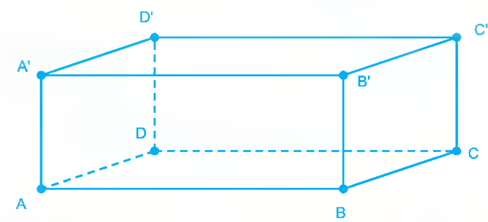


Activité 3

Soit ABCDA'B'C'D' un parallélépipède.

1) Indiquer quatre représentants pour chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

2) Montrer que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$ et que $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AD'}$



A , B , C et D sont quatre points non alignés de l'espace.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie ABDC est un parallélogramme.

Activité 4

Soient A , B , C et D quatre points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Montrer que ces points sont coplanaires.

Notation :

On désigne par $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Activité 5

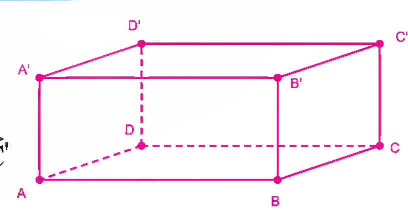
Soit A un point et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$. Montrer qu'il existe un point M et un seul de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$

OPÉRATIONS DANS L'ENSEMBLE $\mathcal{W}$

Activité 6

Soit ABCDA'B'C'D' un parallélépipède rectangle.

Calculer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'}$



Pour tous points A , B et C de $\mathcal{E}$, on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(Relation de Chasles pour les vecteurs)

Activité 7

Nous admettons que l'addition des vecteurs dans $\mathcal{W}$ possède les mêmes propriétés que celle de l'addition dans $\mathcal{V}$.

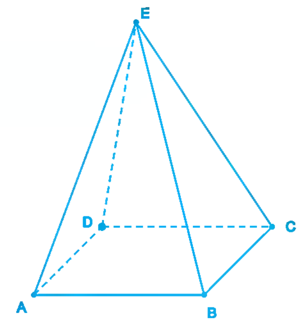
Rappeler ces propriétés.

Exercice

Dans la figure ci-contre ABCDE est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme.

Montrer que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



Activité 8

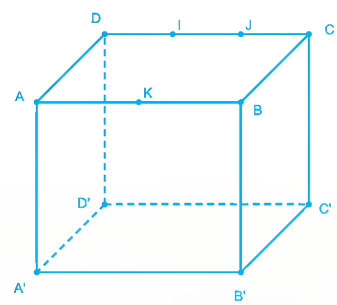
Soit ABCDA'B'C'D' un parallélépipède.

On marque sur le segment [DC] les points I et J tels que DI = IJ = JC. Soit K le milieu de [AB].

1) Déterminer le réel x tel que $\overrightarrow{DI} = x.\overrightarrow{BA}$

2) Exprimer $\overrightarrow{DJ}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$ puis en fonction de $\overrightarrow{BK}$.

3) Déterminer le réel t tel que $\overrightarrow{A'B'} = t.\overrightarrow{JI}$



Définition

Soient $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$ et α un nombre réel. On définit le vecteur $\alpha\,\vec{u}$ de la manière suivante :

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\alpha\,\vec{u}=\vec{0}$
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et si A et B sont deux points de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ alors $\alpha\,\vec{u}=\overrightarrow{AC}$ où C est le point de la droite (AB) d'abscisse α dans le repère (A , B).

Exercice

1) Choisir deux points distincts A et B de l'espace.

2) Construire le point C dans chacun des cas suivants :

a) $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{AC} = \frac{-2}{3}.\overrightarrow{AB}$

Activité 9

Le produit d'un vecteur de l'espace par un réel possède les mêmes propriétés que le produit d'un vecteur du plan par un réel.

Rappeler ces propriétés.

Activité 10

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

1) Développer puis simplifier les expressions suivantes :

$$3\left(2.\vec{u} - 3\vec{v}\right)+2\left(-3\vec{u}+2\vec{v}\right) \quad \text{et} \quad -\left(\vec{u} - 3\vec{v}\right) - \frac{7}{2}\left(2\vec{u} - \frac{5}{21}\vec{v}\right)$$

2) Déterminer le réel x tel que : $(3x - 2).\vec{u} = \vec{0}$

VECTEURS COLINÉAIRES

Activité 11

Dans la figure ci-contre ABCD est un tétraèdre, L , M , N et O sont les milieux respectifs des segments [AB] , [AC] , [CD] et [AD].

a) Les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils colinéaires ?

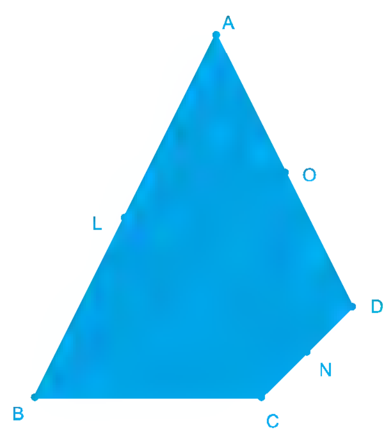
Déterminer le réel α tel que $\overrightarrow{LM} = \alpha.\overrightarrow{BC}$

b) Les vecteurs $\overrightarrow{NO}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?

Déterminer le réel β tel que $\overrightarrow{NO} = \beta.\overrightarrow{AC}$

c) Exprimer $\overrightarrow{OL}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$

d) Peut-on exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$?



D'une façon générale, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel α tel que $\vec{v} = \alpha.\vec{u}$ ou $\vec{u} = \alpha.\vec{v}$

Exercice

a) Montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$. $\vec{o}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

b) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} = \vec{0}$ et $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$

Trois points de l'espace, A ,B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Activité 12

Dans un tétraèdre ABCD, on considère les points I , J et K tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

a) Faire une figure.

b) En utilisant la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. En déduire que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

c) Montrer de même que les droites (JK) et (CD) sont parallèles.

VECTEURS COPLANAIRES

Activité 13

Soit ABCD un tétraèdre, O , I , J et K les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] , [CD] et [AD].

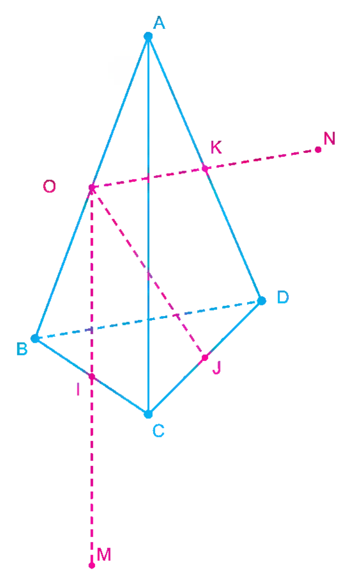
1) Montrer que les points O , I , J et K sont coplanaires.
Soit P leur plan.

2) On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{OM} = 2.\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{ON} = 2.\overrightarrow{OK}$

a) Montrer que les points M et N appartiennent au plan P.

b) Montrer que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{BD}$

c) Montrer que $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$



Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ et A, B , C et D quatre points de l'espace tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ Les vecteurs sont dits coplanaires si et seulement si les points A , B , C et D sont coplanaires.

Activité 14

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ et O, A , B et C quatre points de l'espace tels que :
$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

1^{er} Cas : Supposons que deux de ces trois vecteurs sont colinéaires, par exemple $\vec{u}$ et $\vec{v}$

a) Que peut-on dire des points O , A et B ?

b) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

c) Montrer qu'il existe un réel α tel que $\vec{u} = \alpha \vec{v} + o\vec{w}$ ou $\vec{v} = \alpha \vec{u} + o\vec{w}$

$2^{ième}$ Cas : Supposons que deux de ces trois vecteurs ne sont pas colinéaires par exemple $\vec{u}$ et $\vec{v}$

a) Les points O , A et B sont-ils alignés ?

b) Soit P le plan contenant les points O , A et B. Montrer que $(o, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère cartésien de P.

c) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que : $\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que : $\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{w}$ ou $\vec{u} = \alpha.\vec{v} + \beta.\vec{w}$

Exercice 1:

Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$. On pose $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{v} = 2.\vec{a} - 2.\vec{b} - \vec{c}$ et $\vec{w} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

Calculer $\vec{u} - \vec{v}$ en déduire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Exercice 2:

Soit ABCDA'B'C'D' un cube, I et J les milieux respectifs de [AC] et [CD']

1) Faire une figure.

2) a- Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AA'}$

b- Montrer que $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{A'B}$

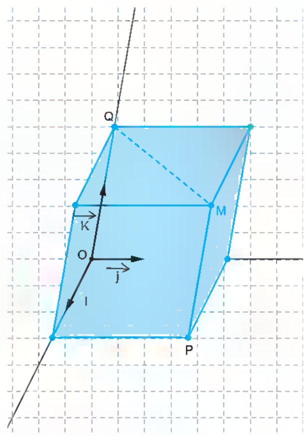
c- En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

BASE DE L'ENSEMBLE $\mathcal{W}$ DES VECTEURS DE L'ESPACE. REPÈRE CARTÉSIEN

Activité 15

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$. Soit O un point de $\mathcal{E}$.

On désigne par I , J et K les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.



1) a- les points O ,I , J et K appartiennent-ils à un même plan ?

b- Les points O , I et J sont-ils alignés ?

c- Que représente $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ pour le plan (O I J) ?

2) Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$ et M le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

La droite passant par M et parallèle à (OK) coupe le plan (O I J) en P et le plan passant par M et parallèle au plan (O I J) coupe (OK) en Q.

a- Montrer que le quadrilatère OPMQ est un parallélogramme.

b- En déduire que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

c- Montrer qu'il existe un unique triplet (x , y , z) de réels tels que $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

Définition

❖ Un triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires est appelé une base de $\mathcal{W}$.

❖ Soit O un point de l'espace $\mathcal{E}$ et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{W}$, le quadruplet $\left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est appelé repère cartésien de $\mathcal{E}$.

Théorème

Soit $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{W}$. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$, il existe un unique triplet (x , y , z) de réels tels que : $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

Vocabulaire

❖ On dit que (x , y , z) est le triplet de coordonnées ou de composantes de $\vec{u}$.

❖ Les réels x , y et z sont appelés les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

❖ x s'appelle l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote de $\vec{u}$ dans la base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Notation

$B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{W}$. $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$ signifie $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

Théorème

Soit $R = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$. Pour tout point M de $\mathscr{E}$,
il existe un unique triplet (x , y , z) de réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

Vocabulaire

- On dit que (x , y , z) est le triplet de coordonnées ou de composantes de M.
- Les réels x, y et z sont appelés les coordonnées de M dans le repère $R = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- x s'appelle l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote de M dans le repère $R = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Notation :

$R = (o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de $\mathscr{E}$. M $(x , y , z)_R$ signifie $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

Exercice

L'espace $\mathscr{E}$ est muni du repère cartésien $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) a- Déterminer les coordonnées des points I , J , K et A définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$,
$\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$ et $\overrightarrow{OA} = -2.\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

b- Placer ces points dans le repère.

2) Soit $M(x , y , z)_R$ un point de $\mathscr{E}$.

Donner dans chacun des cas suivants une condition nécessaire et suffisante pour que :

a) $M \in (OI)$ d) $M \in (OIJ)$

b) $M \in (OJ)$ e) $M \in (OJK)$

c) $M \in (OK)$ f) $M \in (OIK)$

Activité 16

Dans la figure ci-contre ABCDA'B'C'D' est un parallélépipède.

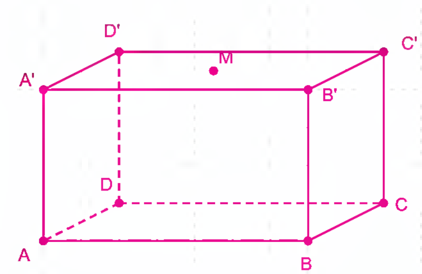
1) a- Vérifier que $R = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'})$ est un repère cartésien de l'espace $\mathscr{E}$.

b- Déterminer les coordonnées des sommets du parallélépipède dans le repère R.

2) Soient M et N les milieux respectifs de [A'C'] et [B'C'].

Déterminer les coordonnées de M et N

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CC}$ et $\overrightarrow{AC'}$ dans la base



Activité 17

Soit $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{W}$ et $R = \left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de $\mathcal{E}$.

Démontrer les propriétés suivantes :

1) si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B$ alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}_B$

2) Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$ et α un réel alors $\alpha.\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha.x \\ \alpha.y \\ \alpha.z \end{pmatrix}_B$

3) Si M(x , y z) et M'(x' , y' , z') dans le repère R alors $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}_B$

4) Si M(x , y z) et M'(x' , y' , z') dans le repère R alors le milieu de [MM'] est le point

$I\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}, \dfrac{z+z'}{2}\right)$ dans le même repère R.

Exercice 1

Soit $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base de $\mathcal{W}$. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer, dans la base B, les coordonnées des vecteurs suivants :

$\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\dfrac{1}{2}\vec{u} + 2.\vec{v}$ et $2\vec{u} + \vec{v}$

2) Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 2

On donne dans l'espace muni d'un repère cartésien $R = \left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$,

les points A (3 , 2 , 0) , B (0 , - 1 , 2) et C (5 , 1 , 0).

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans la base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

2) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

3) Déterminer les coordonnées du milieu A' de [BC].

4) Déterminer les coordonnées du point G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Que représente ce point pour le triangle ABC ?

CONDITION DE COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS

Activité 18

Soit $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

1) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2) Soit $\vec{w}=4.\vec{i}-2.\vec{j}+a.\vec{k}$ où a est un réel. Déterminer a pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Activité 19

Soit $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$. On se propose dans cette activité de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1) On suppose que $\vec{u}\neq\vec{0}$

a) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $a'=k.a$, $b'=k.b$ et $c'=k.c$

b) En déduire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{cases}ab'-a'b=0\\ bc'-b'c=0\\ ca'-a'c=0\end{cases}$

2) On suppose que $\vec{u}=\vec{0}$. Compléter $\begin{cases}ab'-a'b=\dots\\ bc'-b'c=\dots\\ ca'-a'c=\dots\end{cases}$

3) Conclure.

Théorème

Soient $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\ b'\\ c'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$,

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants $\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix}$ sont tous nuls.

Remarques

❖ Les déterminants $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$ s'appellent les déterminants extraits

du tableau $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$

❖ Si a'b'c'≠ 0 , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Exercice 1

L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On donne les vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \sqrt{10} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$, montrer qu'ils sont colinéaires.

Exercice 2

$\mathcal{W}$ étant muni de la base $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ On considère les vecteur

$\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -m \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} m \\ 4-m \\ m-3 \end{pmatrix}$, m est un réel.

Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

CONDITION POUR QUE TROIS VECTEURS DE $\mathcal{W}$ SOIENT COPLANAIRES

Activité 20

Dans l'ensemble $\mathcal{W}$ muni d'une base $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les vecteurs

$\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que deux quelconques parmi ces trois vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) a- Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\vec{c} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b}$

b- Conclure.

Définition

❖ Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ muni d'une base

Le réel D = xy'z" + yz'x" + zx'y" – (x" y'z + y" z'x + z" x'y) est appelé

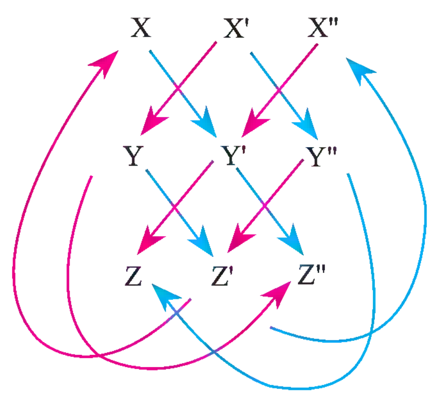
le déterminant de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base B et est noté : $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$

Règle de calcul du déterminant de trois vecteurs

Pour calculer D ainsi défini, on adopte la règle suivante dite de **Sarrus**.
Les produits d'éléments reliés par une flèche bleue étant précédés du signe + et les produits d'éléments reliés par une flèche rouge étant précédés du signe –

Exemple :

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (4+35-36)-(15-56+6)=38$$



Exercice :

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

On admet le théorème suivant :

Théorème

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ muni d'une base B= $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = 0$

Exemple

Vérifier, en utilisant le déterminant, que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'activité 16 sont coplanaires.

Activité 21

$\mathcal{W}$ étant muni d'une base B= $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère les vecteurs

$\vec{e}_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

1) a- Calculer le déterminant de ces trois vecteurs.

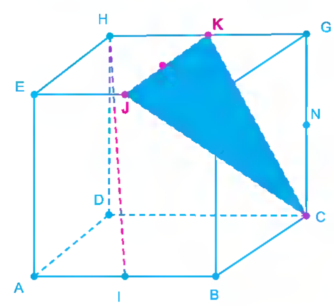
b- En déduire que $B' = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ est une base de $\mathcal{W}$.

2) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_B$ un vecteur de $\mathcal{W}$ .Déterminer, en fonction de x , y et z les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base B'.

Exercice résolu :

Enoncé

On considère un cube ABCDEFGH et on désigne par I , J et K les milieux respectifs de [AB] , [EF] et [HG]. Démontrer que (HI) est parallèle au plan (JCK).



Solution :

On va prouver analytiquement que les trois vecteurs $\overrightarrow{HI}$ $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont coplanaires.

1ère étape : Choix d'un repère de l'espace.

On choisit le repère $R = \left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$

2ième étape :

a) Déterminons les coordonnées des sommets du cube.

A (1 , 0 , 0) , B (1 , 1 , 0) , C (0 , 1 , 0) , D (0 , 0 , 0) , E (1 , 0 , 1) , F (1 , 1 , 1) , G (0 , 1 , 1) et H (0 , 0 , 1)

b) Déterminons les coordonnées des poins I , J et K.

$I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $J\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ et $K\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$

c) Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{KC}$ dans la base

$B = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$ · $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

3ième étape :

Calculons le déterminant de $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{KC}$

On a : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \left(0 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 0\right) - \left(0 + 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$

Conclusion : Les vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{KC}$ sont coplanaires, donc (HI) est parallèle au plan (JCK).

N.B : On pourra vérifier, en utilisant les coordonnées, que $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{KJ}$ et $\overrightarrow{KC}$

Résumé

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ et A, B , C et D quatre points de l'espace tels que : $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à les points A , B , C et D sont contenus dans un même plan.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ sont coplanaires

si et seulement si

il existe deux réels α et β tels que :

$\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}$ ou $\vec{v}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{w}$ ou $\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{w}$

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère $R=\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Si A(x , y z) , B(x' , y' , z') et I le milieu de [AB]

alors $I\left(\dfrac{x+x'}{2},\dfrac{y+y'}{2},\dfrac{z+z'}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

$\mathcal{W}$ est muni d'une base $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$.

- ❖ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}=0$

- ❖ $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires équivaut à $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c' \end{vmatrix}=0$

01 a) Dessiner un parallélépipède ABCDA'B'C'D'.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

02 Soient A et B deux points fixes de l'espace A tout point M de $\mathcal{E}$ on associe le point N tel que $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$

a) Démontrer que les droites (MN) passent par un point fixe I.

b) On suppose que M décrit une droite Δ. Démontrer que les droites (MN) sont coplanaires.

03 Soient A , B , C et D quatre points quelconques de l'espace $\mathcal{E}$.

Montrer que l'on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

04 Soit un tétraèdre ABCD et un réel k non nul. On définit les points I , J , K et L par:

$\overrightarrow{AI}=k.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ}=k.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CK}=k.\overrightarrow{CD}$ et

$\overrightarrow{CL}=k.\overrightarrow{CB}$

a) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$

b) En déduire que IJKL est un parallélogramme.

05 Soit un tétraèdre ABCD , I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

Démontrer que :

a) $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}=2.\overrightarrow{JI}$

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}=4.\overrightarrow{JI}$

06 Soit ABCD un tétraèdre et A' , B' , C' et D' les centres de gravité respectifs des triangles BCD , CDA , DAB et ABC.

a) Démontrer que :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3.\overrightarrow{AA'}$

b) En déduire que :

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\vec{0}$

07 On considère un tétraèdre ABCD et on désigne par Ω son centre de gravité et par A' le centre de gravité du triangle BCD. On rappelle que l'on a : $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{A'D}=\vec{0}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{\Omega A}+3.\overrightarrow{\Omega A'}=\vec{0}$

2) En désignant par B' , C' et D' les centres de gravité respectifs des triangles ACD , ABD et ABC,

montrer que les droites (AA') , (BB') , (CC') et (DD') sont concourantes.

3) On désigne par I , J , K , L , M et N les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] , [CD] , [DA] , [AC] et [BD].

a) Montrer que $\overrightarrow{\Omega I}+\overrightarrow{\Omega K}=\vec{0}$

b) En déduire que Ω est le milieu de chacun des segments [IK] , [JL] et [MN].

08 Soit ABCDA'B'C'D'un parallélépipède, P et Q les milieux respectifs de [BC'] et [BD]

a) Faire une figure.

b) Montrer que l'on a :

$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AP}$ et

$-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{QD'}$

09 Soit ABCD un tétraèdre. Préciser dans quel plan se trouve le point M dans chacun des cas suivants :

a) $\overrightarrow{MA}-2.\overrightarrow{MB}+3.\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

b) $-2.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

10 Soit ABCDEFGH un cube, I, J, K, L et M les milieux respectifs de [AE] , [AB] , [BC] , [CG] et [GH].

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires.

b) Montrer que $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires.

c) Montrer que $\overrightarrow{AJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

d) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.

11 Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $R = \left(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les points A (-1 , 2 , 3) , B (4 , 1 , -2) , C (3 , 4 , -5) et D (1 , 1 , -3).

a) Déterminer les coordonnées des milieux de [AC] et [BD].

b) Déterminer les coordonnées, dans la base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

c) Déterminer les coordonnées du point M tel que ABCM soit un parallélogramme.

12 Dans l'ensemble $\mathcal{W}$ muni d'une base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}12\\-14\\-11\end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs : $\vec{u}+\vec{v}-3\vec{w}$; $2\vec{u}-3\vec{v}-\vec{w}$

2) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont - ils colinéaires ?

3) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont - ils coplanaires ?

13 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou non dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-9\\3\\2\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-3\\1\\\frac{-3}{2}\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\\-2\end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3m\end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}$

14 Dans l'ensemble $\mathcal{W}$ muni d'une base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}m^2-3\\2m\\2m^2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

où m est un paramètre réel.

Déterminer l'ensemble des réels m pour les quels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

15 Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $R=\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points A (1 , -1 , 2) , B (3 , 1 , -2) , C (-5 , -7 , 14) et D (2 , 1 , 3).

1) Les points A , B et C sont-ils alignés ?

2) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

16 L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Calculer le déterminant de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et dire, dans chacun des cas suivants, si ces trois vecteurs sont coplanaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-6\\6\\10\end{pmatrix}$

17 Dans l'ensemble $\mathcal{W}$ muni de la base $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}t+3\\5\\1\end{pmatrix}$,

$\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\t-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ où t est un réel.

a) Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix}t+3 & -1 & 1\\ 5 & t-3 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

b) En déduire les valeurs de t pour les quelles les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

18 $\mathcal{W}$ est rapporté à la base $B=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{e}_2 = -\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

1) Démontrer que $B' = \left(\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3\right)$ est une base de $\mathcal{W}$.

2) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_B$ un vecteur de $\mathcal{W}$.

Déterminer, en fonction de x , y et z les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base B'.

19 Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $R=\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on donne le point A(-2 , -1 , 3).

Soit M(x , y , z) dans le repère R, déterminer ses coordonnées (X , Y , Z) dans le repère. $R'=\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

20 Soit $R=\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$ et A le point de coordonnées (1 , - 1 , 1) dans le repère R. On considère les vecteurs

$\vec{e}_1 = \vec{i}+\vec{j}$, $\vec{e}_2 = \vec{i}+\vec{k}$

et $\vec{e}_3 = \vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$

1) Montrer que $R' = \left(A,\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3\right)$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$.

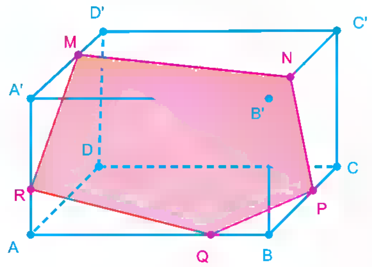
2) Soit M un point de $\mathcal{E}$. On désigne par :

(x , y , z) les coordonnées de M dans le repère R

(x' , y' , z') les coordonnées de M dans le repère R'

Calculer x' , y' et z' en fonction de x , y et z.

21 On considère un parallélépipède ABCDA'B'C'D' et les points M , N et P appartenant respectivement aux segments [A'D'] , [B'C'] et [BC]. On pose BP = x , B'N = y et A'M = z et on suppose $x \neq y$ et $y \neq z$. On munit l'espace $\mathscr{E}$ du repère $R = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right)$



1) a- Déterminer les coordonnées des sommets du parallélépipède ABCDA'B'C'D' dans le repère R.

b- Vérifier que les points M , N et P ont pour coordonnées respectivement (0 , z , 1) (1 , y , 1) et (1 , x , 0).

c- Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\right)$.

2) On suppose que le plan (MNP) coupe [AB] en Q et [AA'] en R. On pose AQ = β etAR = α.

a- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MR}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont respectivement colinéaires à $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{NM}$

b- En déduire que

$$\alpha = \frac{x - y + z}{x - y} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{x - y + z}{z - y}$$

c- Calculer alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{QR}$ en fonction de x , y et z.

d- Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{NM}$ sont coplanaires.

Chapitre 7

Droites et plans de l'espace

"Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths, je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes !"
"L'imagination est bien plus importante que la connaissance."

Albert EINSTEIN : (1879 _1955)

- **Représentations paramétrique et cartésienne d'une droite**
- **Représentations paramétrique et cartésienne d'une droite**
- **Position de droites et de plans**

INTRODUCTION

Activité 1

Dans l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace muni de la base $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$,

on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{h}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$

a) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires?

b) Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{h}$ sont-ils colinéaires?

c) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires?

d) Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{h}$ sont-ils coplanaires?

Activité 2

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit les points A (1, 3, 2), B (2, -1, 4), C (3,0, -1) et D (1, 5, -3)

1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

b) Les points A, B et C sont-ils alignés?

c) Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires?

2) Soit le point E (3, -5, 6)

a) Montrer que les points A, B et E sont alignés.

b) Vérifier que B est le milieu de [AE].

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE DE L'ESPACE

• Dans toute la suite l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repére cartésien $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Activité 3

Soit un point A de $\mathcal{E}$ et un vecteur non nul $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$.

a) Soit B le point défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

Reconnaître l'ensemble $\mathcal{E}$ suivant: $E = \{M \in E,\ \overrightarrow{AM} = \alpha.\vec{u}, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

b) Compléter par $\in$ ou $\notin$

M…………… (AB) alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

M…………… (AB) alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

Soit un vecteur non nul $\vec{u}$ et un point A de l'espace. Soit B le point défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
L'ensemble des point M de $\mathcal{E}$ tels que: $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est la droite (AB).
Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de cette droite.
La droite (AB) est notée $D\left(A, \vec{u}\right)$

Activité 4

Soit le point $A(1, -1, 2)$ et le vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

a) Montrer que pour tout point $M\left(x, y, z\right)$ de $\mathcal{E}$ $M \in D\left(A, \vec{u}\right)$; si et seulement si, il existe un réel α tel que $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -1 + 3\alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$

Ce système constitue une représentation paramétrique de cette droite.

b) Soit C(-1, -4,3), montrer que C appartient à $D\left(A, \vec{u}\right)$

Activité 5

Soit E l'ensemble des points M(x,y,z) vérifiant:

$$\begin{cases} x = -1 + 3\alpha \\ y = 2 - 4\alpha \quad ,\alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$$

a) Soit A (-1, 2, 3). Montrer que : $A \in E$

b) Le point B (2, -2, 6) appartient-il à E?

c) Soit $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$.

Montrer que E est la droite $D\left(A, \vec{u}\right)$

Activité 6

On considère les points A (1, -2 ,1) et B (2, -3 ,0).

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Soit C (1, 3, -2)

a) Le point C appartient-il à (AB)?

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par C et parallèle à (AB).

Activité 7

Soit les droites D et D' définies par leurs représentations paramétriques respectives

$$D: \begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = 1 + \dfrac{1}{2}\alpha \\ z = -3 - \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de D et un vecteur directeur $\vec{u'}$ de D'.

b) Montrer que D et D' sont parallèles.

c) Montrer que D et D' sont strictement parallèles.

Deux droites D et D' de l'espace sont parallèles, si et seulement si, un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

Activité 8

On considère les droites D et D' de représentations paramétriques respectives:

$$D: \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = -3 + \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D': \begin{cases} x = 1 - \beta \\ y = -2 + 3\beta, \\ z = -1 + \beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

1)a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de D et un vecteur directeur $\vec{u'}$ de D'.

b) Prouver que D et D' ne sont pas parallèles.

2) Déterminer $D \cap D'$. En déduire que D et D' ne sont pas coplanaires.

Exercice

Soit les droites D et D' passant respectivement par les points A (1,-1,1) et B (0,-1,4) et de vecteurs directeurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{u'} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

1) Démontrer que D et D' ne sont pas parallèles.

2) a) Déterminer les représentations paramétriques de D et D'.

b) Montrer que D et D' sont sécantes et préciser leur point d'intersection

REPRÉSENTATION CARTÉSIENNE D'UNE DROITE DE L'ESPACE

Activité 9

Soit la droite D passant par le point A(3,-2,1) et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

a) Soit M(x,y,z) un point de $\mathscr{E}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base .$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

b) Montrer que M appartient à D si et seulement si $\begin{cases} -2x - y + 4 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad (1).$

.

c) Montrer que le système (1) équivaut au système $\begin{cases} -2x - y + 4 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases} \quad (2).$

Ce dernier système est une représentation cartésienne de D dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Activité 10

Soit Δ l'ensemble des points M(x,y,z)vérifiant: $\begin{cases} x - y + 3z + 3 = 0 \\ x + y - z - 5 = 0 \end{cases}$

a) Montrer que $\Delta \neq \varnothing$

b) On pose $z = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Montrer que le système précédent équivaut au système $\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 4 + 2\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$

En déduire que Δ est une droite dont on précisera un de ses points et un vecteur directeur.

Exercice résolu:

On considère la droite Δ dont une représentation paramétrique

est : $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Déterminer un système d'équations cartésiennes de Δ .

Solutions:

Calculons t en fonction de x dans la 1[ère] équation et remplaçons t par sa valeur dans les deux autres équations; on a: $t = 4-x$; $y = -2 + 3(4-x)$ et $z = 1+2(4-x)$; ce qui donne le système .

$$(S)\begin{cases} 3x + y - 10 = 0 \\ 2x + z - 9 = 0 \end{cases}$$

Exercice:

Retrouver le système (S) ou un autre système équivalent en utilisant un point et un vecteur directeur de Δ .

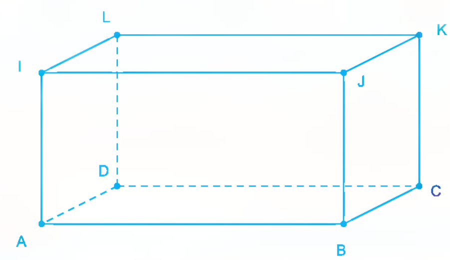
REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UN PLAN

Activité 11

Soit ABCDIJKL un parallélépipède.

a) Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont-ils colinéaires?

b) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et un point A. L'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires est le plan passant par A et de vecteurs directeurs , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $P(A, \vec{u}, \vec{v})$

Activité 12

On considère les points A(-2,0,3) , B(1,2,0) et C(0,-1,4)

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Soit M(x,y,z). Montrer que M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe deux réels α et β tels que : $\begin{cases} x = -2 + 3\alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha - \beta \\ z = 3 - 3\alpha + \beta \end{cases}$

Ce dernier système est une représentation paramétrique du plan (ABC).

Activité 13

x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b' étant des réels donnés, on considère l'ensemble P des points

M(x,y,z) de $\mathcal{E}$ vérifiant: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases}$

1) Montrer qu'il existe un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on précisera les coordonnées, tels que M est un point de P si et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

2) Montrer que P est un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si l'un au moins

des trois déterminants $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}$ est non nul.

Exercice 1

Soit le système S : $\begin{cases} x = -1 - \frac{1}{2}\alpha + \beta \\ y = 2 - \alpha + 2\beta \quad ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 3 + 2\alpha - \beta \end{cases}$

a) Montrer que le système S est une représentation paramétrique d'un plan P dont on précisera un point et deux vecteurs directeurs.

b) Déterminer trois points A, B et C non alignés de P.

Exercice 2

L'espace est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer une représentation paramétrique pour chacun des plans $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $(O, \vec{i}, \vec{k})$ et $(O, \vec{j}, \vec{k})$

ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN

Activité 14

On considère le point A(-1,2,4) et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) Soit M(x,y,z) un point de $\mathcal{E}$.

Calculer en fonction de x, y, z le déterminant de $\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}$

c) En déduire que: $M \in P(A, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow x - y - z + 7 = 0$

L'équation: x - y - z + 7 = 0 est appelée équation cartésienne du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$

Activité 15

Soit les points I(1,0,0), J(0,1,0) et K(0,0,1)

a) Vérifier que les points I, J et K ne sont pas alignés.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK).

Activité 16

Soit P un plan de l'espace. On se propose de démontrer qu'il existe quatre réels a, b, c et d vérifiant $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tels que : $M(x,y,z) \in P$ équivaut à : $ax + by + cz + d = 0$

1) Soient $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ et $C(x_3,y_3,z_3)$ trois points **non alignés** de P.

Pour simplifier les calculs on notera $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Montrer que $M(x,y,z) \in P$ équivaut à:

$$(\beta\gamma'-\gamma\beta')x+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')y+(\alpha\beta'-\beta\alpha')z-(\beta\gamma'-\gamma\beta')x_1-(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')y_1-(\alpha\beta'-\beta\alpha')z_1=0$$

2) Conclure

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Tout plan de l'espace a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c et d sont des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Activité 17

Soient a, b, c et d quatre réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

On considère l'ensemble E des points M(x, y, z) de $\mathcal{E}$ tels que : $ax + by + cz + d = 0$

a) on suppose que $a \neq 0$.

Montrer que l'équation $ax + by + cz + d = 0$ équivaut au système

$$\begin{cases} x = -\dfrac{d}{a} - \dfrac{b}{a}\alpha - \dfrac{c}{a}\beta \\ y = \alpha & ;(\alpha,\beta)\in \mathbb{R}^2 \\ z = \beta \end{cases}$$

b) Conclure.

c) Déterminer E lorsque $a = b = 0$

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soient a, b, c et d quatre réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

L'ensemble des points M(x, y, z) de $\mathcal{E}$ tels que : $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.

Activité 18

On donne les points A(3, -1, 2), B(1, 0, -2) et C(3, 4, -3)

a) Montrer que ces trois points déterminent un plan

b) Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

Exercice

Donner un point du plan P et deux vecteurs directeurs de P, dans chacun des cas suivants :

a) P: $x-2y + z + 3 = 0$

b) P: $3x - y + 7=0$

c) P: $x = 0$

d) P: $2y - 3 = 0$

VECTEURS D'UN PLAN :

Activité 19

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{W}$ et P un plan dont une équation cartésienne est

$ax + by + cz + d = 0$ On se propose de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{u}$ soit un vecteur de P.

• On remarque que $\vec{u}$ est un vecteur de P signifie que $\vec{u}$ admet un représentant dans P ou encore: si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs directeurs de P, $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

1) On suppose que $a \neq 0$

a) Montrer que l'équation $ax + by + cz + d = 0$ équivaut au système

$$\begin{cases} x = -\dfrac{d}{a} - \dfrac{b}{a}p - \dfrac{c}{a}q \\ y = p & (p, q) \in \mathbb{R}^2 \\ z = q \end{cases}$$

b) En déduire que $\vec{v}\begin{pmatrix}-\dfrac{b}{a}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-\dfrac{c}{a}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de P.

2)

a) Calculer $\begin{vmatrix}\alpha & -\dfrac{b}{a} & -\dfrac{c}{a}\\ \beta & 1 & 0\\ \gamma & 0 & 1\end{vmatrix}$

b) En déduire que: $\vec{u}$ est un vecteur de P si et seulement si: $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur du plan P: ax + by + cz + d = 0

si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

Exercice:

Soit le plan P: -2x + 3y - 5z + 8 = 0

a) Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de P.

b) Déterminer une représentation paramétrique de P.

POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET PLANS

Positions relatives de deux droites de l'espace :

Activité 20

Soient D et D' deux droites de $\mathcal{E}$ de représentations paramétriques respectives:

$$D: \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = -1 - 4\alpha \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}; \quad D': \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\beta \\ y = -2 - \beta \\ z = 2\beta \end{cases} \beta \in \mathbb{R}$$

a) Trouver un vecteur directeur $\vec{u}$ de Pet un vecteur $\vec{u'}$ de D'.

b) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.

c) En déduire que D et D' sont parallèles et déterminer $D \cap D'$

Activité 21

Soient D et D' deux droites de $\mathcal{E}$ de représentations paramétriques respectives:

$$D: \begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}; \quad D': \begin{cases} x = 1 - 3\beta \\ y = 2 - \beta \\ z = -3 + 4\beta \end{cases}, \beta \in \mathbb{R}$$

1)

a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de D et un vecteur directeur $\vec{v}$ de D'.

b) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ et ne sont pas colinéaires.

c) Déterminer $D \cap D'$. En déduire que D et D' ne sont pas coplanaires.

2) Soit D'': $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -t \qquad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

a) Montrer que D et D'' ne sont pas parallèles.

b) Déterminer $D \cap D'$. En déduire que D et D' sont sécantes.

Exercice:

Soient D et D' définies par: D: $\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}\alpha \\ y = 1 - \alpha \qquad , \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \alpha \end{cases}$; D' : $\begin{cases} x = -4 + \beta \\ y = 5 - 2\beta \quad , \beta \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 2\beta \end{cases}$

a) Montrer que D et D' sont parallèles.

b) Soit B(-4, 5, -2). Montrer que B appartient à D et à D'

c) Conclure.

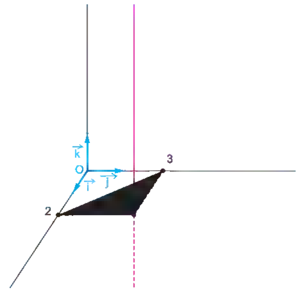
Exercice:

Déterminer la position des droites D et D' dans chacun des cas suivants :

a) D : $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 - t \qquad , t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ D' : $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -2 + \alpha \ , \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3\alpha \end{cases}$

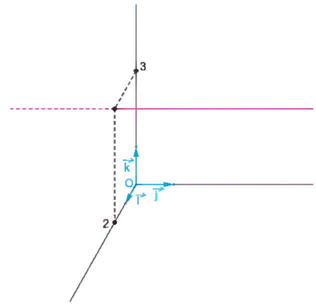
b) D : $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - t \qquad , t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ D' : $\begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0 \\ -2x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$

Exemples de droites parallèles aux axes du repère:



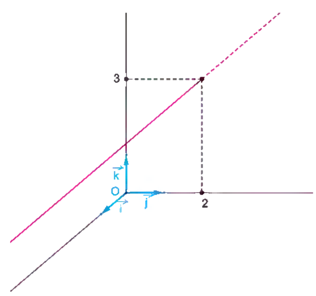
Droite d'équations

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$



Droite d'équations

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$



Droite d'équations

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN DE L'ESPACE :

Activité 22

a) Rappeler les positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

b) Illustrer chaque position par une figure.

Activité 23

Soit la droite D dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = 2 + 3\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -1 + \alpha \end{cases}$

Soit le plan P dont une équation cartésienne est : $2x + 3y - z + 4 = 0$

a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de D

b) Montrer que $\vec{u}$ n'est pas un vecteur de P

c) En déduire que D et P sont sécants

d) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection

Activité 24

On considère la droite D : $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 1 + 2t \quad ,t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ et le plan P : $\begin{cases} x = 3 - \alpha + 2\beta \\ y = 1 + \alpha - \beta \quad ,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = -2 + 3\alpha + \beta \end{cases}$

1) a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de D et deux vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de P.

b) Prouver que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

c) Conclure

2) Soit A(4, 1, 2)

a) Vérifier que A appartient à D et à P

b) Conclure

3) Déterminer dans chacun des cas suivants la position relative de la droite D et du plan P.

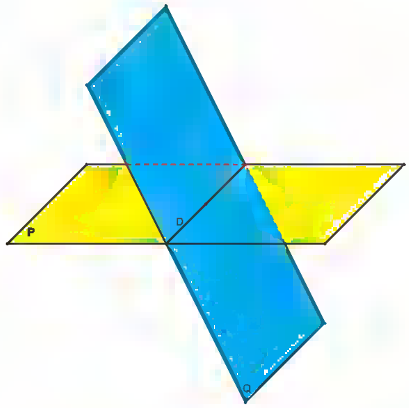
a) D : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 + \alpha \ ,\alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 4\alpha \end{cases}$ et P : $\begin{cases} x = 1 + 2t - t' \\ y = 5 - 3t + 2t' ,(t,t') \in \mathbb{R}^2 \\ z = -3 + t + t' \end{cases}$

b) D : $\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = -1 + \alpha \quad ,\alpha \in \mathbb{R} \\ z = 7 - 3\alpha \end{cases}$ et P : $2x + y + z - 4 = 0$

POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS DE L'ESPACE

On rappelle que pour deux plans P et P' de l'espace, trois cas sont possibles

- P et P' sont sécants, dans ce cas $P \cap P'$ est une droite

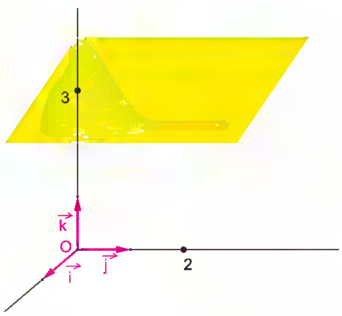


- P et P' sont strictement parallèles alors $P \cap P' = \varnothing$

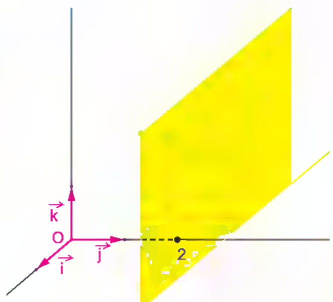
- P et P' sont confondus alors $P \cap P' = P' = P$

Dans le 2ème et le 3ème cas, on dit que P et P' sont parallèles.

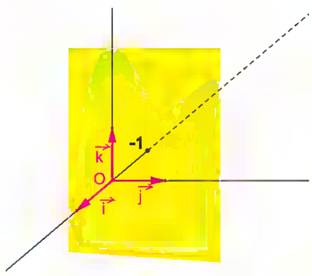
Exemples de plans parallèles aux plans de bases :



Plan de cote 3
$z = 3$



Plan d'ordonnée 2
$y = 2$



Plan d'abscisse –1
$x = -1$

Activité 25

Soient P et P'deux plans.

Montrer que :

a) P et P'sont parallèles équivaut à : tout vecteur de l'un est un vecteur de l'autre

b) P et P'sont sécants équivaut à : Il existe au moins un vecteur de l'un qui n'est pas de l'autre.

Exercice résolu

On donne les plans P et P'définis par :

$$P:\begin{cases} x = 1+2\alpha - \beta \\ y = -3 + \alpha - \beta \\ z = 2 - \alpha + 4\beta \end{cases}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; P' : 3x - 2y + z - 5 = 0$$

a) Montrer que P et P' sont sécants

b) Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite d'intersection de P et P'

Solution :

a) - D'après la représentation paramétrique de P, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de ce plan.

- Les coordonnées de $\vec{u}$ ne vérifient pas l'équation 3x - 2y + z = 0, en effet

$3 \times 2 - 2 \times 1 + (-1) = 3 \neq 0$

Donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur de P' et par suite P et P' sont sécants

b) Soit $D = P \cap P'$

Soit M (x, y, z) de $\mathcal{E}$

$$M \in D \Leftrightarrow \text{il existe } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = 1+2\alpha - \beta \\ y = -3 + \alpha - \beta \\ z = 2 - \alpha + 4\beta \\ 3x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

équivaut à :

$$\text{il existe } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} x = 1+2\alpha - \beta \\ y = -3 + \alpha - \beta \\ z = 2 - \alpha + 4\beta \\ 3(1+2\alpha-\beta) - 2(-3+\alpha-\beta) + (2-\alpha+4\beta) - 5 = 0 \end{cases}$$

équivaut à : $D:\begin{cases} x = 3 + 3\alpha \\ y = -1 + 2\alpha \\ z = -6 - 5\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

D'où D est la droite passant par A(3, -1, -6) et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Exercice

Soient deux plans P et P' d'équations cartésiennes respectives P : $2x - 3y + 2z - 4 = 0$, P' : $-4x + 2y - z + 5 = 0$

Déterminer $P \cap P'$

Activité 27

Soient deux plans P et P' d'équations respectives :

P : $ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

P' : $a'x + b'y + c'z + d = 0$, $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$

On se propose de démontrer que :

si $a\,b\,c \neq 0$, on a : $P /\!/ P' \Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

1) On suppose $a'\,b'\,c' \neq 0$

Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ c' \\ -b' \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c' \\ 0 \\ a' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de P'

2) a) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de P si et seulement si $\begin{cases} bc' - cb' = 0 \\ ac' - ca' = 0 \end{cases}$

b) Conclure.

Remarque

• **si $a' = 0$ et $b'c' \neq 0$**

$P /\!/ P' \Leftrightarrow a = 0$ et $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

Exercice

Indiquer dans chacun des cas suivants si le système (S) est une représentation cartésienne d'une droite ; donner dans le cas échéant un point et un vecteur directeur de cette droite.

a) $(S)\begin{cases} 2x - 4y + 2z + 5 = 0 \\ -x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

c) $(S)\begin{cases} 4x - 3y + 2z - 4 = 0 \\ -2x + \dfrac{3}{2}y - z + 11 = 0 \end{cases}$

b) $(S)\begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ -x - 2y + 4z + 2 = 0 \end{cases}$

Exercice

Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $-2x + 3y + z + 7 = 0$ et le point $A(1, -1, 2)$

a) Donner une équation cartésienne du plan P' passant par A et parallèle à P.

b) Donner une représentation paramétrique d'une droite D passant par A et parallèle à P.

c) Déterminer $P' \cap D$.

Résumé

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a \\ y = y_0 + \alpha b \\ z = z_0 + \alpha c \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$ où

$A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $(a, b, c) \neq (o, o, o)$

$D(A, \vec{u})$ et $D'(B, \vec{u'})$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.

Soient $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires

$\begin{cases} x = x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y = y_0 + \alpha b + \beta b' \\ z = z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases}$; $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ est une représentation de $P(A, \vec{u}, \vec{u'})$

$ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan
si et seulement si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Soit $P : ax + by + cz + d = 0$, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur de P si et seulement si
$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

Une droite D est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de D est un vecteur de P.

Deux plans P et P' sont sécants si et seulement si il existe un vecteur de l'un qui n'est pas un vecteur de l'autre.

$P : ax + by + cz + d = 0$, $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ avec $a'\,b'\,c' \neq 0$, $P /\!/ P' \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

➤Dans chacun des exercices de 1 à 6 une seule réponse est correcte. Trouver cette réponse.

01 A est un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires et non nuls de $\mathcal{W}$:

Soit $E = \{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

L'ensemble E est:

a) Un plan.

b) Une droite.

c) Une réunion de deux droites.

02 A un point de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\vec{u} \neq -\vec{v}$

L'ensemble

$E = \{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM} = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ est

a) Un plan.

b) Une droite.

03 A un point de $\mathcal{E}$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$. L'ensemble

$E = \{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$ est

a) Une droite.

b) Un plan.

04 A et B deux points de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et colinéaires.

$D(A,\vec{u})$ et $D(B,\vec{v})$ sont:

a) Sécantes.

b) Parallèles.

c) Non coplanaires.

05 A et B deux points de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$, $\vec{w}$ un vecteur non nul tels que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

$D(B,\vec{w})$ et $P(A,\vec{u},\vec{v})$ sont :

a) Sécants.

b) Parallèles.

06 A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$. Les plans $P(A,\vec{u},\vec{v})$ et $P'(B,\vec{v},\vec{w})$ sont :

a) Strictement parallèles.

b) Sécants.

c) Confondus.

07 L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Déterminer un vecteur directeur et un point de la droite D dans chacun des cas suivants:

a) $D : \begin{cases} x = 1 - 3\alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases}; \ \alpha \in \mathbb{R}$

b) $D : \begin{cases} x = -2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 \end{cases}; \ t \in \mathbb{R}$

c) $D : \begin{cases} x = 5 - 6\alpha \\ y = 0 \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}; \ \alpha \in \mathbb{R}$

08 L'espace est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Donner une représentation paramétrique de $D(A,\vec{u})$ dans chacun des cas suivants:

a) $A(1,1,1)$, $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

b) $A(-2,0,1), \vec{u} = \vec{i}$

c) $A(3,-1,2), \vec{u} = -\vec{j} + \vec{k}$

09 L'espace est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

On considère la droite D dont une représentation paramétrique est

$$D:\begin{cases}x=-1+3\alpha\\ y=2+\alpha\\ z=-1+4\alpha\end{cases};\alpha\in IR$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite D' passant par B(3, -1, 2) et parallèle à D.

10 L'espace est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Déterminer une représentation cartésienne de la droite $D\left(A,\vec{u}\right)$ dans chacun des cas suivants:

a) $A\left(3,-1,2\right)$; $\vec{u}=-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

b) $A\left(1,0,3\right)$; $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$

11 L'espace est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Déterminer la position relative des droites D et D' et préciser $D\cap D'$ dans chacun des cas suivants:

a) $$D:\begin{cases}x=-1+t\\ y=3-2t\ ;t\in IR,\\ z=-1-t\end{cases}$$

$$D':\begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=-1+3\alpha;\alpha\in IR\\ z=-3+\alpha\end{cases}$$

b) $$D:\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=-2-\alpha;\alpha\in IR,\\ z=4+\alpha\end{cases}$$

$$D':\begin{cases}x+2y+z-1=0\\ x+y+1=0\end{cases}$$

c) $$D:\begin{cases}x+y-2=0\\ x-2z+1=0\end{cases};$$

$$D':\begin{cases}x+y-2z+4=0\\ 2x-z+3=0\end{cases}$$

12 L'espace est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A(1, 2, -2) et B (3, m, 4) où $m\in\mathbb{R}$, et les vecteurs .

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Déterminer le réel m pour que les droites $D\left(A,\vec{u}\right)$ et $D'\left(B,\vec{v}\right)$ soient sécantes.

13 L'espace est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Etudier la position relative de la droite D et du plan P dans chacun des cas suivants:

a) $$D:\begin{cases}x=-2+\alpha\\ y=3-\alpha\ ;\alpha\in IR\\ z=1+2\alpha\end{cases}$$

$$P:\begin{cases}x=1+t+t'\\ y=2t-3t'\qquad (t,t')\in IR^2\\ z=-4+3t+5t'\end{cases}$$

b) $$D:\begin{cases}x-y+3=0\\ x-2z-4=0\end{cases}$$

$$P:\begin{cases}x=-2+\alpha+3\beta\\ y=1+\alpha+3\beta\quad ,(\alpha,\beta)\in IR^2\\ z=-4+\alpha+2\beta\end{cases}$$

14 L'espace est rapporté au repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

Déterminer une équation cartésienne du plan P dans chacun des cas suivants:

a) P passe par le point A(1, -2, -1) et a pour vecteurs directeurs. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$

b) P passe par les trois points A(2, -1, 4), B(3, 1, 2) et C(4,-2, 5).

c) P passe par les points A(1, 2, -1), B(2, 0, 3) et admet $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

d) P contient le point A(3, -1, 2) et la droite

$$D:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=3t \qquad ,t\in\mathbb{R}\\ z=-2+t\end{cases}$$

15 L'espace est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
P et P' sont deux plans d'équations respectives

$P: x-3y+4z-5=0$

$P': 2x-y+z-4=0$

Montrer que P et P' sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

16 Dans l'espace rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on donne les droites D et D' de représentations paramétriques respectives:

$$D:\begin{cases}x=3-\alpha\\ y=2+2\alpha;\alpha\in\mathbb{R},\\ z=1+\alpha\end{cases}$$

$$D':\begin{cases}x=-1+2\beta\\ y=1-3\beta \quad ;\beta\in\mathbb{R}\\ z=4+\beta\end{cases}$$

1) Montrer que D et D' sont non coplanaires.

2 a) Montrer qu'il existe un plan P et un seul contenant D et parallèle à D'.

b) Donner une équation cartésienne de P.

3) Soit Q le plan qui contient D' et qui est parallèle à D.

a) Montrer que P et Q sont strictement parallèles.

b) En déduire une équation cartésienne de Q.

17 L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On donne les plans P et P' d'équations :

P : $x-2y+3z-2=0$; P' : $2x+y+z-4=0$

1) a) Montrer que P et P' sont sécants.

b) Vérifier que $A(1, 1, 1)\in P\cap P'$.

2) a) Déterminer deux réels a et b pour le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ soit un vecteur de P et de P'.

b) Soit $D(A,\vec{u})$

Montrer qu'une représentation cartésienne de D est $D:\begin{cases}x-2y+3z-2=0\\ 2x+y+z-4=0\end{cases}$

18 L'espace est rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On donne le plan P: $2x-y-z-5=0$.
Donner une représentation paramétrique de la droite $D=P\cap Q$ dans chacun des cas suivants:

a) Q est le plan $(o,\vec{i},\vec{j})$.

b) Q est le plan $(o,\vec{i},\vec{k})$.

c) Q est le plan $(o,\vec{j},\vec{k})$.

19 L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit P_m l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de E tels que: $mx + (m-1)y + (m+1)z + 4 = 0$ où m est un réel.

1) Montrer pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m est un plan.

2) Déterminer m pour que P_m passe par le point A(1, 1, -1).

3) Soit $D : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z + 4 = 0 \end{cases}$

a) Déterminer une représentation paramétrique de D.

b) Montrer que, pour tout réel m, D est incluse dans P_m.

20 L'espace est rapporté à un repère .
$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Pour tout réel m, on associe P_m:
$(m^2 - 1)x + (m + 1)y + mz - 3 = 0$

a) Montrer que P_m est un plan.

b) Déterminer m pour que P_m passe par A(2, -1, 2).

c) Montrer qu'il existe un point B et un seul, dont on déterminera les coordonnées, appartenant à tous les plans P_m.

21 Dans l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points A(a, 0, 0), B(0, b, 0) et C(0, 0, c) où a, b, c sont des réels non nuls.

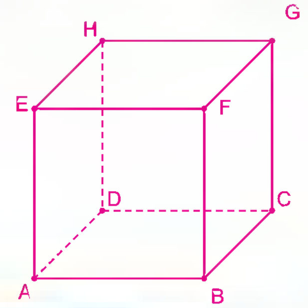
Montrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$

Chapitre 8

Produit scalaire dans l'espace Activités dans un repère orthonormé

INTRODUCTION

Activité 1



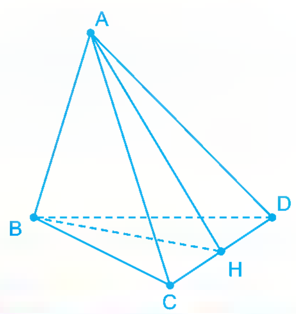
La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.

a- Montrer que les droites (AB) et (DH) sont orthogonales.

b- Citer d'autres droites orthogonales à (AB).

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles menées par un même point sont perpendiculaires

Activité 2



La figure ci-contre représente un tétraèdre ABCD tel que :
$(AB) \perp (CD)$, H est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle BCD.

a- Montrer que la droite (CD) est perpendiculaire au plan (ABH).

b- En déduire que [AH] est la hauteur issue de A dans le triangle ABH.

- Une droite est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
- Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Activité 3

Compléter les phrases suivantes et répondre aux questions:

- Si les droites D et D' sont parallèles et D est perpendiculaire au plan P alors...
- Si les droites D et D' sont perpendiculaires au plan P alors...
- Si les deux plans P et P' sont parallèles et si la droite D est perpendiculaire à P alors...
- Etant donné un plan P et un point M de l'espace. Existe-t-il une droite D passant par M et perpendiculaire à P ? est-elle unique ?
- Etant donné une droite D et un point M de l'espace. Existe-il un plan P passant par M et perpendiculaire à D ? P est il unique ?

Activité 4

La figure ci-dessous représente un parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D' on pose :

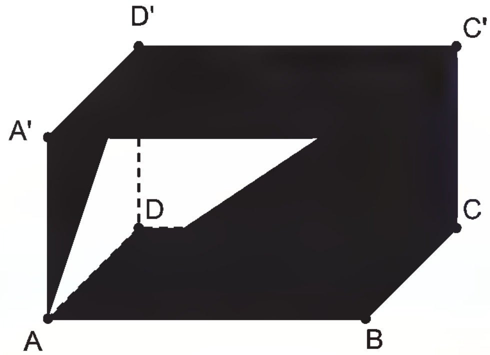
AB=a , AD=b , AA'= c

1)- a) Montrer que ACC' est un triangle rectangle

b) En déduire que $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2)- a) Monter que les plans (ABC) et (A C C') sont perpendiculaires

b) Citez d'autres plans perpendiculaires à (ABC)



Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre

Activité 5

Réponde par vrai ou faux

a)- Deux plans perpendiculaires à un même troisième sont parallèles

b)- Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre

c)- Par un point on peut mener un plan et un seul perpendiculaire à un plan donné.

d)- Si deux plans sont perpendiculaires toute droite perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

e)- Si deux plans sont perpendiculaires toute droite parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

f)- Si deux droites sont parallèles tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

h)- Si deux plans sont perpendiculaires à un même plan alors leur intersection est une droite perpendiculaire à ce plan.

PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

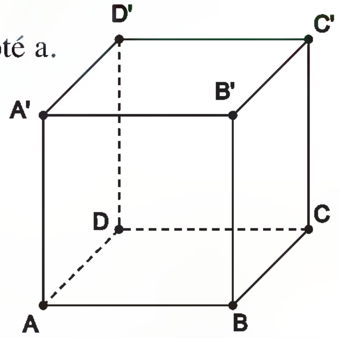
Activité 6

La figure ci-contre représente un cube ABCDA'B'C'D' de coté a.

a)- Montrer que $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$

b)- En déduire que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'C'} = a^2$

c)- Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{B'D'}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{A'B'}$



Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$, A, B et C des points de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

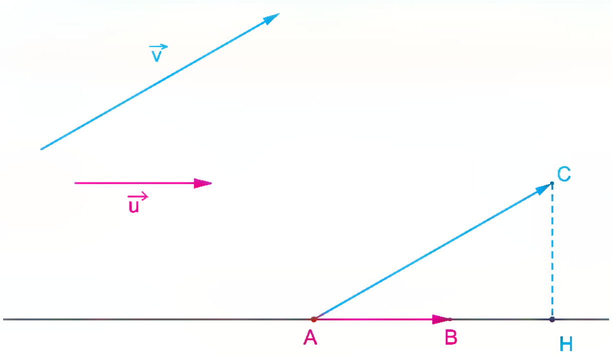
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini comme suit :

-Si $\vec{u} = \vec{o}$ ou $\vec{v} = \vec{o}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

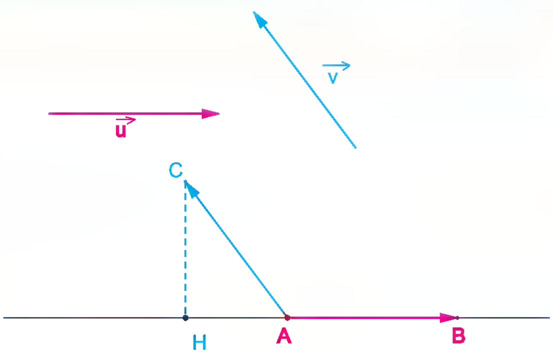
-Si $\vec{u} \neq \vec{o}$ et $\vec{v} \neq \vec{o}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

H le projeté orthogonal de C sur (AB)

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\ AB.AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC \cos \widehat{BAC}$



$\vec{u}.\vec{v} = AB.AH,$



$\vec{u}.\vec{v} = -\ AB.AH$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB},\ \vec{u}.\vec{u} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = \|\vec{u}\|^2 \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$$

Activité 7

La figure ci-contre représente un tétraèdre ABCD tel que :

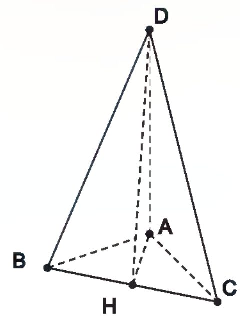
$AB = AC = 3$, $AD = 4$, $(AB)\perp(AC)$, $(AD)\perp(AB)$ et $(AD)\perp(AC)$.

Soit H le milieu de [BC].

a- Montrer que $(DH)\perp(BC)$.

b- Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH}$



Activité 8

On admet que le produit scalaire dans $\mathcal{W}$ possède les mêmes propriétés que le produit scalaire dans $\mathcal{V}$, rappeler ces propriétés.

Exercice :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{3}{2}$

Calculer : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$, $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$, $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

ORTHOGONALITÉ ET PRODUIT SCALAIRE

Activité 9

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$ et les points A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Montrer que $(AB) \perp (AC)$ équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ sont orthogonaux et l'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$ lorsque l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et leurs directions sont orthogonales

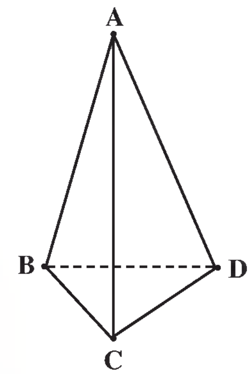
Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

Exercice 1:

Soit un tétraèdre ABCD vérifiant (AC) ⊥ (BD) et (AB) ⊥ (CD).

Démontrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$



Exercice 2:

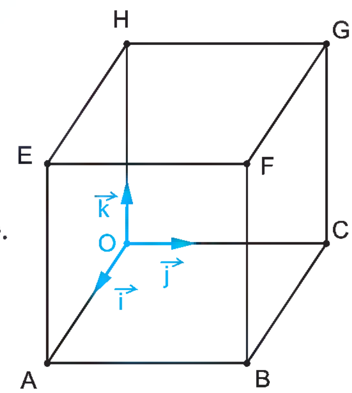
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$ tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

Montrer que $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \perp \left(\vec{u} - \vec{v}\right)$

ACTIVITÉ DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ DE L'ESPACE

Activité 10

La figure ci-contre représente un parallélépipède rectangle ABCOEFGH tel que OA = 4, AB = 5 et AE = 3. I, J, K sont respectivement des points de [OA], [OC] et [OH] tels que OI =OJ = OK = 1.



1°) Calculer: $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OI}^2, \overrightarrow{OJ}^2, \overrightarrow{OK}^2$

2°) L'espace est rapporté au repère cartésien $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et comparer la valeur trouvée avec le réel xx' + yy' + zz'dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{EG}$.

b) $\vec{u} = \overrightarrow{GF}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$.

c) $\vec{u} = \overrightarrow{OF}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Définition

Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base une base de $\mathcal{W}$ et O un point de $\mathcal{E}$.

On dit que B est une base orthonormée si $\begin{cases} \vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0 \\ \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \end{cases}$

Dans ce cas le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$.

Remarque :

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}$ équivaut à $\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$

Activité 11

$\mathcal{W}$ étant muni d'une base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B$

Montrer que : a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

c) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$.

Exercice:

Dans $\mathcal{W}$ muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a- Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$, $\vec{u} \cdot (2\vec{u} - 3\vec{v})$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

b- Soit $\vec{h}\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Déterminer le réel x tel que $\vec{h} \perp \vec{u}$.

Activité 12

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne les points A(3,-1,2), B(-2,3,4) et C(5,2,1).

a- Calculer AB, AC et BC.

b- Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que (AB) ⊥ (AC).

c- Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Pythagore.

Soient dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé les points A (x_A, y_A, z_A) et B (x_B, y_B, z_B).

On a : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Activité 13

Dans l'ensemble $\mathcal{W}$, muni d'une base orthonormée $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}-4\\5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix}-4\\-5\\3\end{pmatrix}$.

1) Calculer $\vec{a}.\vec{b}$, $\vec{a}.\vec{c}$, $\vec{b}.\vec{c}$, $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ et $\|\vec{c}\|$

2) Soient les vecteurs $\vec{a'} = \frac{1}{5}\vec{a}$, $\vec{b'} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.\vec{b}$ et $\vec{c'} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\vec{c}$

Vérifier que $B' = \left(\vec{a'}, \vec{b'}, \vec{c'}\right)$ est une base orthonormée de $\mathcal{W}$.

3) Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_B$ On pose $\vec{u} = X\vec{a'} + Y\vec{b'} + Z\vec{c'}$.

a- Montrer que $X = \vec{u}.\vec{a'}$, $Y = \vec{u}.\vec{b'}$ et $Z = \vec{u}.\vec{c'}$.

b- En déduire les expressions de X, Yet Z en fonction de x, y et z.

Exercices

1) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A (1,1,1), B (2,-1,2) et C (4,-1,-6).

a- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

b- Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et $\cos \widehat{ACB}$.

2) Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A (1,-2,3), B (4,3,2) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right).\vec{u} = 0$

VECTEUR NORMAL À UN PLAN :

Activité 14

Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne le point A(-2,1,3) et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$. Soit $E = \{M(x,y,z) \in \mathcal{E},\ \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0\}$.

a- Montrer que : $M(x, y, z) \in E \Leftrightarrow x - y + 3z - 6 = 0$.

b- Reconnaître alors l'ensemble E et vérifier que $A \in E$.

Activité 15

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P dont une équation cartésienne est $ax + by + cz + d = 0$.

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de P et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

a- Soit M (x,y,z) un point de $\mathcal{E}$. Montrer que : $M \in P \Leftrightarrow a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$.

b- En déduire que $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Théorème et définition :

Soit dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. un plan P dont une équation cartésienne est : $ax + by + cz + d = 0$. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est orthogonal à tout vecteur de P. On dit que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à P.

Activité 16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P dont une équation cartésienne est : $6x - 4y + 2z + 5 = 0$ et les droites D et D' de représentations, paramètriques respectives :

$$D\begin{cases}x = 1 - 3\alpha\\ y = 2 + 2\alpha\\ z = -1 - \alpha\end{cases},\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } D'\begin{cases}x = 2 - \beta\\ y = 3 + \beta\\ z = -4 + 5\beta\end{cases},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

1°) a- Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan P et un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.

b- Montrer que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

c- Qu'en déduit-on pour le plan P et la droite D ?

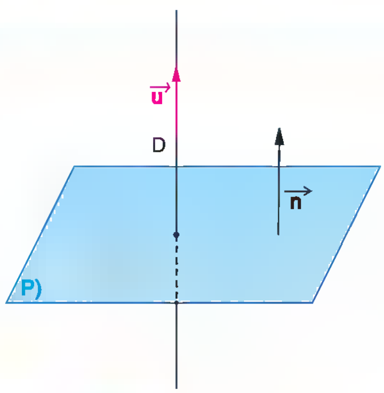
2°) a- Déterminer un vecteur directeur $\vec{u'}$ de D'.

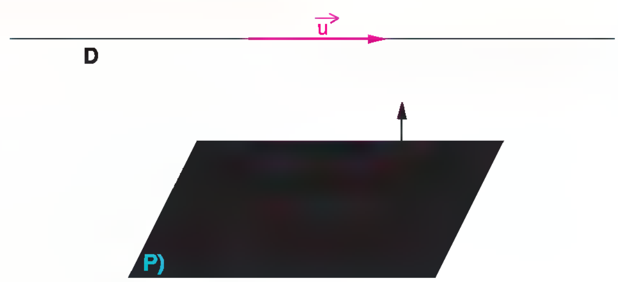
b- Calculer $\vec{n} \cdot \vec{u'}$

c- Qu'en déduit-on pour le plan P et la droite D' ?

3°) Montrer que D et D' sont orthogonales.

> Soient $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan P et $\vec{u}$ un vecteur directeur d'une droite D.
> - $D \perp P \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
> - $D // P \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u'} = 0$.





Activité 17

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les plans P, P' et P" d'équations cartésiennes respectives P : $x - 3y + 2y - 3 = 0$

P': $x + y + z - 5 = 0$

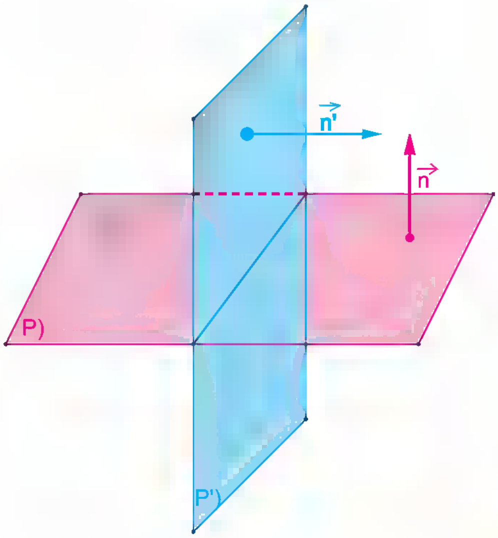
P": $-3x + 9y - 6z + 8 = 0$.

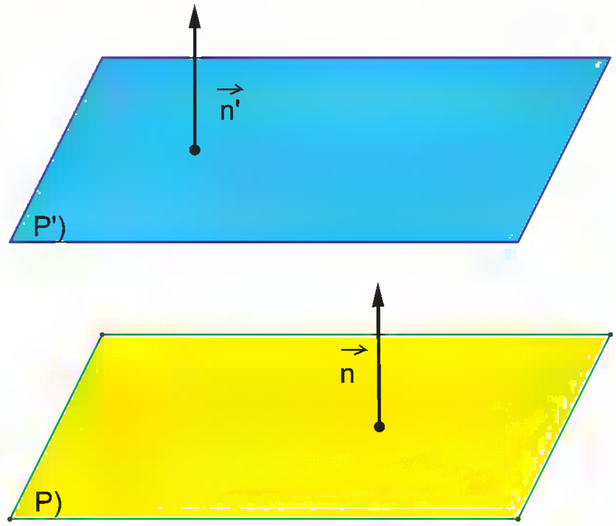
a- Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan P, un vecteur normal $\vec{n'}$ au plan P' et un vecteur normal $\vec{n''}$ au plan P".

b- Calculer $\vec{n} \cdot \vec{n'}$. Qu'en déduit-on pour les plans P et P' ?

c- Montrer que $\vec{n}$ et $\vec{n''}$ sont colinéaires. Qu'en déduit-on pour P et P"?

> Soient deux plans P et P', $\vec{n}$ un vecteur normal à P et $\vec{n'}$ un vecteur normal à P'.
>
> $P \perp P' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$
>
> $P // P' \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.





Exercice

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les plans :

$P : x + 2y + 2z + 1 = 0$

$Q : 2x + y - 2z - 1 = 0.$

1°) a- Montrer que $Q \perp P$.

b- Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, intersection de P et Q.

c- Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de Δ.

2°) a- Déterminer une équation cartésienne du plan R perpendiculaire à Δ et passant par le point $A(1,-1,0)$.

c- Vérifier que R est perpendiculaire au deux plans P et Q.

DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

Activité 18

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan P dont une équation cartésienne est : $x - 3y + \sqrt{6}z + 3 = 0$ et le point $A\left(1, 2, \sqrt{6}\right)$.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par A et perpendiculaire au plan P.

2)

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de la droite D et du plan P.

b) Calculer la distance AH.

Activité 19

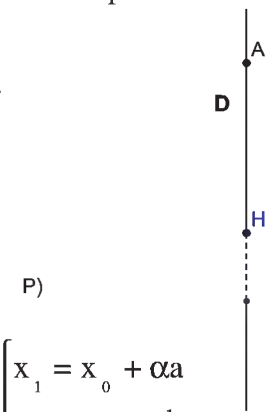
Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. on considère le plan P dont une équation cartésienne est : $ax + by + cz + d = 0$ et un point $A(x_0, y_0, z_0)$ de $\mathscr{E}$

La droite D passant par A et perpendiculaire à P coupe P en un point H.

• On se propose dans cette activité de calculer **la distance de A au plan P** c'est-à-dire la distance AH.

On désigne par (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de H

et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P.



1) a) Montrer qu'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AH} = \alpha \vec{n}$

b) En déduire que : $AH = |\alpha| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, (1)$ et $\begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha a \\ y_1 = y_0 + \alpha b \\ z_1 = z_0 + \alpha c \end{cases}$

2) a) Montrer que l'on a : $a(x_0 + \alpha a) + b(y_0 + \alpha b) + c(z_0 + \alpha c) + d = 0$

b) En déduire que $\alpha = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$, (2)

c) Déduire de (1) et (2) que : $AH = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Exercice:

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne un plan P et un point A. Déterminer d (A,P) dans chacun des cas suivants:

a) $A(1, -1, 1)$; $P : 2x - 3y + 2z - 4 = 0$.

b) $A(3, -1, 2)$; $P : -x - 2y + 3z - 5 = 0$.

c) $A(2, 1, 3)$; $P : \begin{cases} x = 1 + 3\alpha - \beta \\ y = 2 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha - \beta \end{cases}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Exercice résolu 1:

On donne, dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté a un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. les plans . $P : 2x - y + z - 3 = 0$ et $Q : x + 3y + z + 2 = 0$ et le point $A(3, 1, 4)$

1) Vérifier que $P \perp Q$.

2) Calculer d (A, P) et d (A, Q).

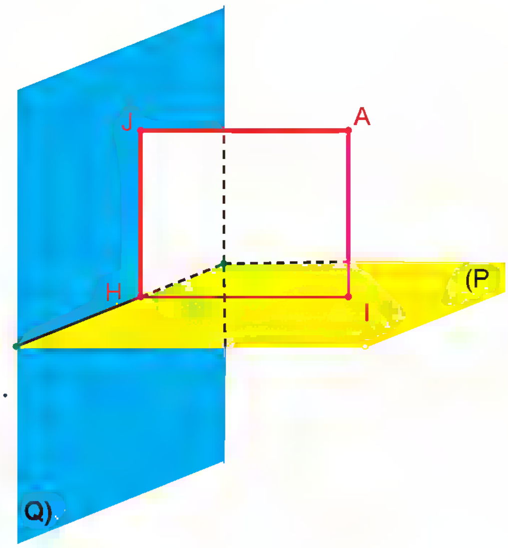
3) En déduire la distance du point A à la droite d'intersection Δ de P et Q.

Solution:

1) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et le vecteur $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q, $\vec{n}.\vec{n'} = 0$ donc $P \perp Q$.

2) $d(A,P) = \dfrac{|6-1+4-3|}{\sqrt{4+1+1}} = 6$

$d(A,Q) = \dfrac{|3+3+4+2|}{\sqrt{1+9+1}} = \dfrac{12}{\sqrt{11}}$



3)

- Les droites perpendiculaires respectivement à P et à Q et issues de A coupent ces plans en I et J.
- Le plan (AIJ) est perpendiculaire à P et à Q donc il est perpendiculaire à leur intersection Δ en un point H.
- (AH) est donc perpendiculaire à Δ et par suite $d(A, \Delta)$=AH
- D'autre part P et Q étant perpendiculaires on a: $(AI)\perp(AJ)$ et par suite AIHJ est un rectangle

Conséquence:

$AH^2 = AI^2 + HI^2 = AI^2 + AJ^2 = (\sqrt{6})^2 + (\dfrac{12}{\sqrt{11}})^2 = \dfrac{210}{11}$

$d(A,\Delta) = \sqrt{\dfrac{210}{11}}$

Exercice résolu 2:

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le point A (3, -1, -2) et la droite D dont une représentation paramétrique est: $\begin{cases} x = -1+\alpha \\ y = -2+3\alpha ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 2-\alpha \end{cases}$

Déterminer la distance du point A à la droite D.

Solution:

Soit P le plan passant par A et perpendiculaire à D.

Ce plan coupe D en H. La distance de A à D est alors AH.

• Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$. $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D,

comme $D \perp P$ alors $\vec{u}$ est un vecteur normal

à P et par suite, une équation cartésienne

de $P : x + 3y - z + h = 0$.

• Ecrivons que $A \in P$

$3 - 3 + 2 + h = 0$ ce qui donne $h = -2$ et par suite $P : x + 3y - z - 2 = 0$.

• Déterminons les coordonnées du point d'intersection H de P et D.

Les coordonnées (x, y, z) de H vérifient $\begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -2 + 3\alpha \\ z = 2 - \alpha \\ x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$

Ce système équivaut à $\begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -2 + 3\alpha \\ z = 2 - \alpha \\ (-1 + \alpha) + 3(-2 + 3\alpha) - (2 - \alpha) - 2 = 0 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -2 + 3\alpha \\ z = 2 - \alpha \\ \alpha = 1 \end{cases}$ ce qui donne H(0, 1, 1)

Conclusion : $AH = \sqrt{(0 - 3)^2 + (1 + 1)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{22}$

Résumé

Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathcal{W}$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

On a :
- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P dont une équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c) \neq (o, o, o)$

On a :
- Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.
- $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de P.

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P et $\vec{n}'$ est un vecteur normal au plan P',

on a : $P \perp P' \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n'} = 0$.

$P // P' \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère le plan

$P : ax + by + cz + d = 0$ et le point $A(x_0, y_0, z_0)$.

On a : $d(A, P) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

01 On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les points O, A et B tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants:

a) $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = 3,\ \widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$.

b) $\|\vec{u}\| = 4,\ \|\vec{v}\| = 1,\ \widehat{AOB} = \frac{3\pi}{4}$.

02 Avec les mêmes hypothèses que l'exercice $\boxed{1}$, déterminer $\widehat{AOB}$ dans chacun des cas suivants:

a) $\|\vec{u}\| = 5, \|\vec{v}\| = 4, \vec{u}.\vec{v} = -10$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}, \|\vec{v}\| = \sqrt{6}, \vec{u}.\vec{v} = \sqrt{3}$

03 1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

a) Montrer que .

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

b) En déduire que .

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

2) Soient A, B et C trois points de $\mathcal{E}$ tels que AB = 8, AC = 6 et BC = 10.

a) Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.

b) Montrer que (AB) $\perp$ (AC).

04 Soit ABCDA'B'C'D' un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = AA' = 1

Calculer:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD'}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB'}$

05 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants:

a) A (1, -1, 2), B (1, 3, 4) et C (2, 5, -3)

b) A (2, -1, 0), B (-1, 3, 7) et C (1, 0, -1)

06 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A($\lambda$, 2, -3); B (2, 0, -1) et C (-1, 4, 0).

Déterminer λ pour que ABC soit un triangle rectangle.

➢Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ écrire les équations cartésiennes des plans P vérifiant les conditions données.(ex : 7,8 et 9)

07 P passe par A(-1, 2, 1) et perpendiculaire à la droite D : $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda ; \lambda \in IR \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

08 P passe par A(1, 2, -3), B(0, 1, 2) et est perpendiculaire à P': x + y + z - 1 = 0

09 P passe par A(0, 1, -2) et est perpendiculaire à P' et P'' :

P': x - 2y + 3z - 4 = 0,P": x + y + -z + 1 = 0

➢L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ Ecrire les représentations paramétriques de la droite D vérifiant les conditions données (ex: 10 et 11).

10 D passe par A(1, -3, 5) et est perpendiculaire à P : x - y - z + 3 = 0

11 D passe par A(1, 2, 1) et est perpendiculaire aux droites : D' : $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{1-z}{4}$,

$$D'' : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 6t \ ; \ t \in IR \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

12 L'espace est rapporté à un repère orthonormé. $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Déterminer la distance du point A au plan P dans chacun des cas suivants:

a) $A(-3, 1, 4)$, $P: 2x - 3y + z - 4 = 0$.

b) $A(2, 1, 3)$,

$$P: \begin{cases} x = 1 - 3\alpha + 2\beta \\ y = 2 + \alpha + \beta \quad ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 7 - \alpha - \beta \end{cases}$$

13 Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on donne les plans P et P' d'équations.

$P: x + y + z - 6 = 0$ et $P': 3x + 2y - 5z - 4 = 0$

a) Montrer que P et P' sont perpendiculaires.

b) Soit D la droite d'intersection de ces deux plans et $A(1, 2, -3)$. Calculer $d(A, D)$.

14 L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

Soit la droite D définie par :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 3t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Calculer la distance du point $A(-5, 4, -2)$ à cette droite D.

Dans les exercices de 15 à 19, l'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

15 Soient A (3, 1, 2) et B (5, -1, 6) deux points de l'espace.

Démontrer que l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que: $MA^2 - MB^2 = 8$ est un plan orthogonal à (AB).

Calculer les coordonnées du point d'intersection de ce plan avec la droite (AB).

16 Soit le point $A(0, 2, 1)$ et le vecteur

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Démontrer que l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\vec{u}.\overrightarrow{AM} = -3$ est un plan orthogonal à la droite $D(A, \vec{u})$ Préciser l'intersection de ce plan avec la droite $D(A, \vec{u})$

17 Soient A, B, C trois points non alignés de $\mathscr{E}$

a) Démontrer que l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$, tel que $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\|$ est un plan que l'on précisera.

b) Retrouver analytiquement ce résultat lorsque les points A, B, C ont pour coordonnées: $A(1, -1, 0)$; $B(2, -1, 3)$; $C(-1, 0, 2)$.

18 Soient D et D' les droites passant respectivement par les points $A(1, 1, 0)$, $B(0, 2, 3)$ et de vecteurs directeurs respectifs .

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u'}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant D et parallèle à D'.

b) En déduire un vecteur directeur de la perpendiculaire commune aux deux droites D et D'.

c) Trouver une équation cartésienne du plan Q contenant D' et perpendiculaire au plan P.

d) Trouver une représentation paramétrique de la perpendiculaire commune Δ aux deux droites D et D'.

e) Calculer la distance des deux droites D et D'.

19 A tout réel m, on associe le plan P_m dont une équation cartésienne est:

$(m-1)x + my + z + m + 2 = 0.$

a) Démontrer que P_0 et P_1 se coupent suivant une droite D. Déterminer un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.

b) Démontrer que D est incluse dans tous les plans P_m.

c) Retrouver le résultat de b) en montrant qu'un point M(x, y, z) appartient à tous les plans P_m si et seulement si

$x + y + 1 = 0$ et $-x + z + 2 = 0$.

d) Démontrer que pour tout réel m différent de $\frac{1}{2}$, il existe un réel m' et un seul, tel que les plans P_m et $P_{m'}$ soient perpendiculaires.

20 1) Montrer que quels que soient les points A, B, C, D de $\mathcal{E}$, on a:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

2) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes

(on désignera par D l'intersection des deux hauteurs).

3) Soit ABCD un tétraèdre.

Montrer que si

$(AB) \perp (CD)$ et $(AC) \perp (BD)$

alors $(AD) \perp (BC)$

(Tout tétraèdre possédant cette propriété s'appelle tétraèdre orthocentrique).

4) Montrer que, pour tout tétraèdre orthocentrique, la projection orthogonale d'un sommet sur la face opposée est l'orthocentre de cette face.

5) Chaque droite reliant un sommet à l'orthocentre de la face opposée s'appelle une «hauteur» du tétraèdre.

Montrer qu'un tétraèdre est orthocentrique si et seulement si, ses hauteurs sont concourantes.

Chapitre 9

Produit Vectoriel
Produit Mixte

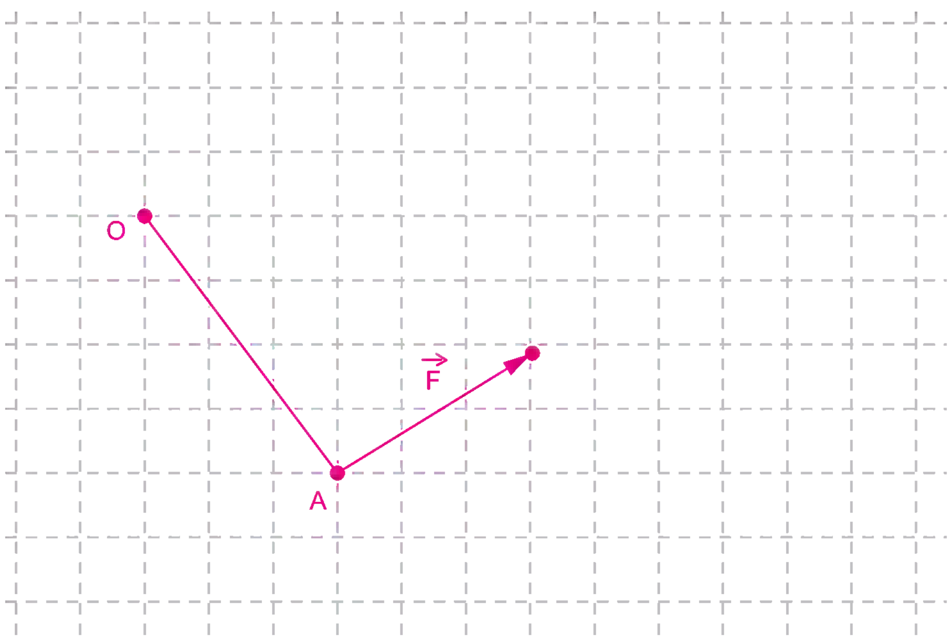
INTRODUCTION

Activité 1

Soit $\vec{F}$ une force appliquée en un point A. Soit O un point. On désigne par $\overrightarrow{\mathfrak{M}_o}(\vec{F})$ le moment de la force $\vec{F}$ au point O.

Calculer $\left\|\overrightarrow{\mathfrak{M}_o}(\vec{F})\right\|$ sachant que OA = 0,02 (en mètre), $\|\vec{F}\| = F = 50$ (en Newton) et $\alpha = \frac{\pi}{6}$ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \vec{F})$.

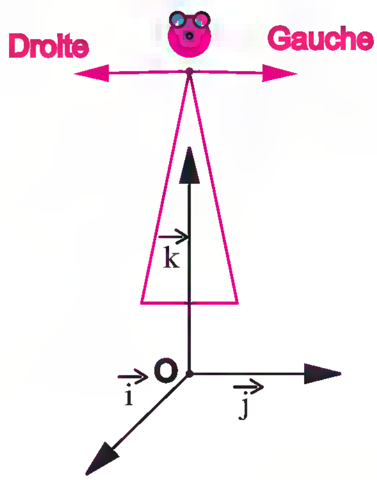
- On rappelle la formule $\left\|\overrightarrow{\mathfrak{M}_o}(\vec{F})\right\| = OA.\|\vec{F}\|.\sin\alpha$
- Les notions du produit vectoriel et du produit mixte sont des notions très utiles en mathématiques, en mécanique et en physique. Pour introduire ces notions on est amené à orienter l'espace. Comme pour le plan, l'orientation de l'espace se fera intuitivement.

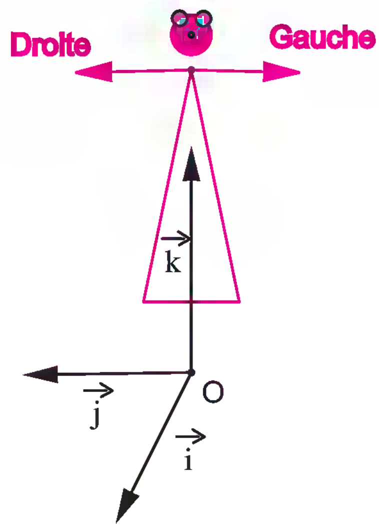


Orientation de l'espace :

Soit un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Imaginons un observateur ayant les pieds en O, le corps dans le sens de $\vec{k}$ (Troisième vecteur du repère) et regardant le vecteur $\vec{i}$ (premier vecteur du repère), voit le vecteur $\vec{j}$ (deuxième vecteur du repère)

à sa gauche ou à sa droite





Dans ce cas on dit que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct. la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite directe.

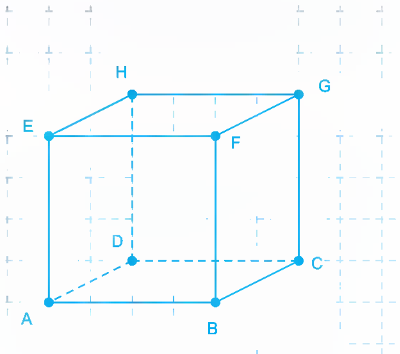
Dans ce cas on dit que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indirect. la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite indirecte

L'espace $\mathcal{E}$ est dit orienté s'il est muni d'un repère direct

Activité 2

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH de coté 1. En appliquant la règle de l'observateur, compléter le tableau suivant :

Repère	Repère direct	Repère indirect
$(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$		
$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$	X	
$(G, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GC})$		
$(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$		
$(H, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HD})$		



Activité 3

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère direct de l'espace $\mathcal{E}$. En appliquant la règle de l'observateur, barrer la réponse fausse.

1. Chacune des bases : $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$ et $(\vec{k}, \vec{i}, \vec{j})$ est $\boxed{\text{directe}}$ $\boxed{\text{indirecte}}$
2. Chacune des bases : $(\vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$, $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ et $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ est $\boxed{\text{directe}}$ $\boxed{\text{indirecte}}$
3. Chacune des bases : $(-\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ et $(\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$ est $\boxed{\text{directe}}$ $\boxed{\text{indirecte}}$

Activité 4

La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est supposée directe. Compléter :

Base	Base directe	Base indirecte
$(-\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$		
$(\vec{j}, \vec{i}, -\vec{k})$		
$(-\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k})$		
$(-\vec{i}, -\vec{k}, \vec{j})$		
$(\vec{i}, \vec{k}, -\vec{j})$		

PRODUIT VECTORIEL

Dans toute la suite l'espace $\mathcal{E}$ est orienté.

Activité 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'ensemble des vecteurs de l'espace $\mathcal{W}$. Soit A un point de $\mathcal{E}$. Désignons par B, C et D les points de $\mathcal{E}$ tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et ABDC un parallélogramme. Soit $\theta = \widehat{BAC}$, $\theta \in]0,\pi[$.

1) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme ABDC.

2) Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire au plan (ABC). Montrer qu'il existe un point M et un seul de D tel que $AM = \mathcal{A}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})$ est une base directe.

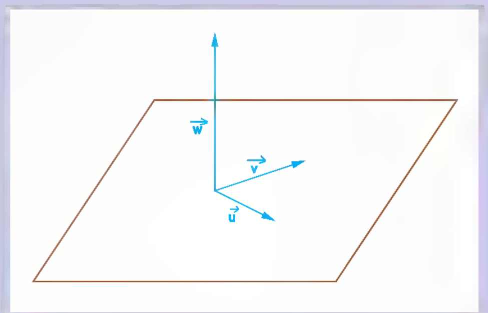
3) Soit $\vec{w} = \overrightarrow{AM}$, Montrer que le vecteur $\vec{w}$ ne dépend pas du choix du point A et dépend seulement des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$ .et A, B et C des points de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini par:

- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que :
  - ❖ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
  - ❖ $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\right)$ est une base directe de $\mathcal{W}$.
  - ❖ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin \widehat{BAC}$



Exercice

On reprend le cube ABCDEFGH de coté 1 de l'activité 2

Calculer : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{GF} \wedge \overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{DH} \wedge \overrightarrow{AB}$.

Activité 6

Soit $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

Déterminer : $\vec{i} \wedge \vec{j}$, $\vec{j} \wedge \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{i}$, $\vec{j} \wedge \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{j}$ et $\vec{i} \wedge \vec{k}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs orthogonaux et unitaires

$\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\right)$ est une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

Activité 7

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

Montrer que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Propriétés :

On admet les propriétés suivantes :

Soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ de $\mathcal{W}$ et le réel a. On a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right)$$

$$\vec{u} \wedge (a\vec{v}) = (a\vec{u}) \wedge \vec{v} = a(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$u \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}_2$$

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = \vec{u}_1 \wedge \vec{v} + \vec{u}_2 \wedge \vec{v}$$

Exercices

1 . Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$. Démontrer que $(-\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(-\vec{v})=-(\vec{u}\wedge\vec{v})$.

2 . Soient $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{v}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$.

Démontrer que $(\vec{u_1}-\vec{u_2})\wedge\vec{v}=\vec{u_1}\wedge\vec{v}-\vec{u_2}\wedge\vec{v}$.

3 . On pose $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$. Exprimer en fonction de $\vec{w}$ chacun des produits vectoriels suivants :

$\vec{u}\wedge(\vec{u}+\vec{v})$, $\vec{u}\wedge(\vec{u}-\vec{v})$, $(\vec{u}+\vec{v})\wedge(\vec{u}-\vec{v})$ et $(2\vec{u}+3\vec{v})\wedge(-6\vec{u}+5\vec{v})$

4 . Soit ABC un triangle de l'espace.

a- Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$

b- En déduire que : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}}=\dfrac{b}{\sin\hat{B}}=\dfrac{c}{\sin\hat{C}}$, avec a = BC , b = AC et c = AB.

COORDONNÉES DU PRODUIT VECORIEL

Activité 8

L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Exprimer en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ chacun des produits vectoriels suivants :

$-2.\vec{i}\wedge3.\vec{j}$, $(\vec{i}+\vec{j})\wedge\vec{k}$, $(4.\vec{i}-\vec{j})\wedge2.\vec{k}$, $(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\wedge(2.\vec{i}+\vec{k})$ et $(3.\vec{i}-2.\vec{j}+\vec{k})\wedge(\vec{i}+3.\vec{j}-2\vec{k})$

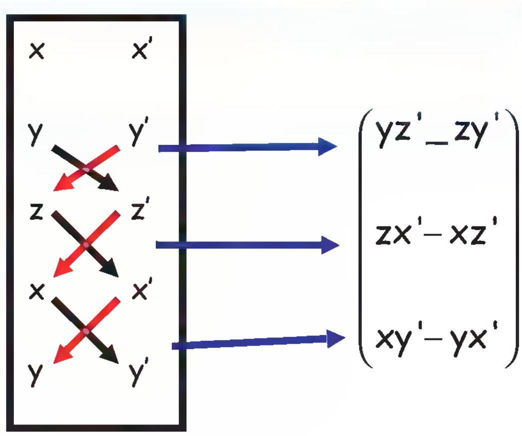
2) Soient $\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$ et $\vec{v}=x'.\vec{i}+y'.\vec{j}+z'.\vec{k}$ deux vecteurs de W.

Montrer que $\vec{u}\wedge\vec{v}=(yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}yz'-zy'\\zx'-xz'\\xy'-yx'\end{pmatrix}$

Calcul pratique

Pour mémoriser le calcul des coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ on peut adopter la disposition pratique suivante : pour chaque coordonnée on effectue un produit en croix :



Activité 9

Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\5\\-7\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

Exercice résolu :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points A (1 , 2 , - 3) , B (3 , -1 , 4) et C (4 , 0 , 5).

1) a- calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b- En déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2) Calculer l'aire du triangle ABC

Solution :

1) a- On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-2\\8\end{pmatrix}$.

Calcul de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

$$\boxed{\begin{array}{cc}2 & 3\\ -3 & -2\\ 7 & 8\\ 2 & 3\\ -3 & -2\end{array}} \longrightarrow \begin{pmatrix}-10\\5\\5\end{pmatrix} \quad \text{d'où } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-10\\5\\5\end{pmatrix}$$

b- Comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires par suite les points A , B et C ne sont pas alignés

2) Soit D le point de $\mathscr{E}$ tel que ABCD soit un parallélogramme. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de ce parallélogramme. On a : $\mathcal{A} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{100 + 25 + 25} = 5\sqrt{6}$

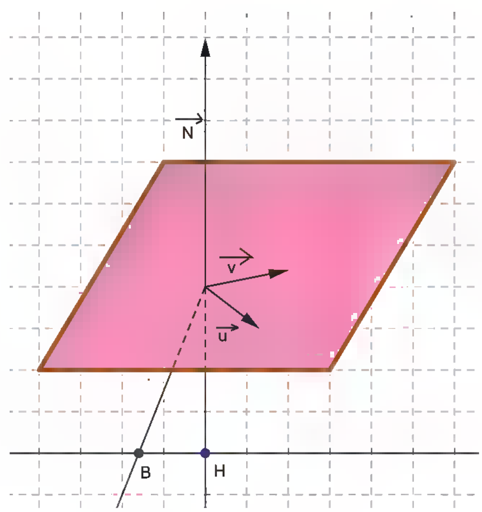
Conséquence l'aire du triangle ABC = $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

PRODUIT MIXTE

Activité 10

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le point

A(1 , - 1 , 2) et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$



1) a- Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$

b- En déduire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

2) Soit P le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. A tout point M (x , y , z) de $\mathscr{E}$ on associe le réel $m=\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\overrightarrow{AM}$

a- Calculer m en fonction de x , y et z.

b- Montrer que $M\in P$ signifie que $m=0$.

c- En déduire une équation cartésienne de P.

3) Soit N le point de l'espace tel que . $\overrightarrow{AN}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.

On considère un point B n'appartenant pas à P et on désigne par H son projeté orthogonal sur la droite (AN).

a- Montrer que : $\left|\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\overrightarrow{AB}\right|=AH.AN$

b- En déduire la position du point B par rapport au plan P en fonction du signe du réel $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\overrightarrow{AB}$

Définition

On appelle <u>produit</u> <u>mixte</u> de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ donnés dans cet ordre
Le <u>réel</u> $m=\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}$

Activité 11

Dans l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace muni d'une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

1) Calculer le produit mixte $m=\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}$

2) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix}1&2&3\\-3&1&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}$ comparer le avec m

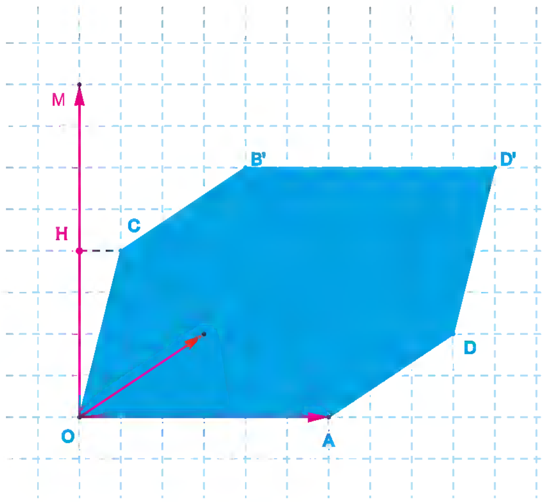
3) Généraliser le résultat obtenu.

Activité 11

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires et O, A, B et C quatre points de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$

Soit M le point de ξ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

On considère le parallélépipède OADBCA'D'B' (voir figure)



1) Montrer que OM = S où S est l'aire du parallélogramme OADB.

2) Soit H le projeté orthogonal de C sur (OM).

Montrer que $\left|\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w}\right| = OM.OH$

3) En déduire que $\left|\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w}\right| = \vartheta$ où ϑ désigne le volume du parallélépipède OADBCA'D'B'.

Exercice

On donne dans l'espace ξ rapporté à un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ les points A (1 , 1 , 1) , B (-1 , 2 , -1) , C (2 , 3 , 5) et D (1 , 0 , - 1)

1) Calculer le produit mixte $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}$.

2) En déduire que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.

3) Calculer le volume du parallélépipède déterminé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs de $\mathcal{W}$, A, B et C des points de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires :
  - ❖ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
  - ❖ $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\right)$ est une base directe
  - ❖ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin B\hat{A}C$

ABCD un parallélogramme

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ = aire du parallélogramme ABCD

$B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

Le produit mixte de trois vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ donnés dans cet ordre est le réel $m = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w}$

Soit $B = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ alors $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si le produit mixte $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w}$ est nul.

Soit ABCDA'B'C'D' un parallélépipède de volume $\mathcal{V}$.

$V = \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AA'}\right|$

➤ **Dans toute la suite l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.**

01 Simplifier chacun des produits vectoriels suivants :

a) $\left(\vec{u} - 2\vec{v}\right) \wedge \left(3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right)$

b) $\left(3\vec{u} - 5\vec{v}\right) \wedge \left(\vec{u} + 2\vec{v}\right)$

02 Déterminer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\-1\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$

03 Dans chacun des cas suivants, indiquer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$

04 Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\2+\sqrt{3}\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1-3\sqrt{3}\\1+3\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

a) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ et $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\|$

b) Soit α une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

Déterminer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$

05 On donne les vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs :

$\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)$

b) Le produit vectoriel est-il associatif ?

06 On donne les points

A (1, 2, 3) , B (4, 2,-1) et C (2, -1, 2).

a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire l'aire du triangle ABC

07 On considère la droite D intersection des deux plans :

P : $2x - y + z - 2 = 0$ et

Q : $x + 3y - z - 3 = 0$

a)Déterminer un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de D.

b) Soit B (3 , - 1 , 2).Calculer la distance du point B à la droite D.

08 On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$.

En utilisant les définitions et les expressions analytiques du produit scalaire et du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,démontrer l'égalité suivante:

$(a^2+ b^2+ c^2)\ (a'^2 +b'^2 + c'^2) - (aa'+ bb'+ cc')^2$
$= (ab'- ba')^2 + (bc'- cb')^2 + (ca'- ac')^2$

(Identité de Lagrange)

09 Soient A, B et C trois points de l'espace. Pour tout point M de $\mathcal{E}$, on considère le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$.

a) Montrer que le vecteur $\vec{u}$ ne dépend pas de M

b) Montrer que si A , B et C sont non alignés alors $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).

10 On donne les vecteurs

$$\vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\left(-4\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}\right), \vec{v} = \frac{1}{3}\left(2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right)$$

et $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\vec{i} - 2\vec{k}\right)$

a) Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$

b) Montrer en utilisant le produit vectoriel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe.

11 On considère le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{3}\left(2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\right)$.
Déterminer deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.

12 Calculer le produit mixte $m = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

12 Soit A un point de ξ, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$.

a) Soit M un point de $\mathcal{E}$.

Montrer que : M est un point du plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si $(\vec{u} \wedge \vec{v}).\overrightarrow{AM} = 0$.

b) Utiliser le résultat de a) pour déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A et de vecteurs directeurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

14 Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par m le produit mixte $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$ et par V le volume de ce tétraèdre.

a) Montrer que $V = \frac{1}{6}|m|$

b) Calculer V dans le cas où A(1 , 1 , 1) , B(2 , 0 , 0) , C (0 , 3 , 0) et D (0 , 0 , -2).

15 Soit A,B ,C et D quatre points non coplanaires de $\mathcal{E}$. Montrer que l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que :
$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}$
est un plan parallèle au plan ABC.

16 A, B , C et D sont quatre points de $\mathcal{E}$ tels que les droites (AB) , (AC) et (AD) soient deux à deux orthogonales. Soit m le produit mixte . $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$
Montrer que $|m| = AB.AC.AD$.
Que représente ce réel ?

17 Soient D et D' les droites de $\mathcal{E}$ passant respectivement par les points A (1, -1 , 2) et B (2 , 0 , -3) et de même vecteur directeur

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

a) Montrer que la distance de D à D'est :

$$d = \frac{\left\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

b) Calculer alors d

18 Soient A et A' deux points de $\mathcal{E}$,$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{W}$.

Soient les droites $D = D(A,\vec{u})$ et $D' = D(A', \vec{u}')$. Soit (HH') la perpendiculaire commune à D et D', H∈D et H'∈D'.

a) Montrer que les produits mixtes $\left(\vec{u} \wedge \vec{u}'\right).\overrightarrow{AA'}$ et $\left(\vec{u} \wedge \vec{u}'\right).\overrightarrow{HH'}$ sont égaux. Soit m leur valeur commune.

b) Montrer que :

$$\left|\left(\vec{u} \wedge \vec{u}'\right).\overrightarrow{HH'}\right| = HH'. \left\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\right\|$$

c) En déduire que :

$$HH' = \frac{|m|}{\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\|}$$

d) Calculer HH'pour A(2,3,-1),A'(1,-1,0),

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En 1839, dans un ouvrage sur la théorie des marées, Hermann Günt Grassmann (Mathématicien allemand 1809 – 1877) développe la notion de produit géométrique de deux vecteurs qu'il présente comme une aire dirigée, constituée par l'aire d'un parallélogramme construit sur les deux vecteurs et par un vecteur perpendiculaire au plan de ce parallélogramme.

On lui doit aussi, le produit géométrique de trois vecteurs -l'actuel produit mixte- défini à partir du volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.