ANNÉE SCOLAIRE : 2021-2022	DEVOIR SURVEILLÉ DU 1er SEMESTRE	CLASSE : TleD	
LYCÉE DE DZRÉKPO	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	DURÉE : 4 H	COEF : 3

Exercice 1 **(6 points)**

A/ Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$.

1/ a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8+6i$. **(0,5pt)**

b) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1. **(0,5pt)**

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E), on notera z_2 et z_3 les solutions non rélles telles que $|z_2| < |z_3|$. **(1pt)**

2/ Soit A et B les points d'affixes respectives z_2 et z_3.
Écrire sous forme trigonométrique $\dfrac{z_2}{z_3}$ et en déduire la nature du triangle OAB. **(1pt)**

B/ A tout nombre complexe $z \neq 1 - i$, on associe le nombre complexe Z tel que $Z = \dfrac{z-2-2i}{z-1+i}$.
Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

a) $|Z| = 1$. **(1pt)**

b) Z est un nombre réel strictement positif. **(1pt)**

c) Z est un nombre imaginaire pur. **(1pt)**

Exercice 2 **(3 points)**

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2x - \sin x$.

1/ Déterminer la fonction dérivée φ' de φ sur $\mathbb{R}$. **(0,25pt)**

2/ Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. **(0,5pt)**

3/ a) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 4$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$. **(0,5pt)**

b) Vérifier que $2,3 < \alpha < 2,4$. **(0,25pt)**

4/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + \dfrac{1}{2}\sin x$.

a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$. **(0,5pt)**

b) Montrer que pour tout réel x, on a : $\left|g'(x)\right| \leq \dfrac{1}{2}$. **(0,5pt)**

c) En déduire que pour tout réel x, on a : $\left|g(x) - \alpha\right| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$. **(0,5pt)**

Problème **(11 points)**

Partie A

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x - 2\sqrt{|x^2-1|} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{(x+2)^2 - |x+2|}{x-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1/ Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f(x)$ sans le symbole valeur absolue. **(0,75pt)**

2/ Calculer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$. **(0,5pt)**

3/ Étudier la continuité de f en 0. **(0,25pt)**

4/ Étudier la dérivabilité de f en $x = 0$; $x = -2$ et $x = 1$. Interpréter graphiquement les résultats. **(2,25pt)**

5/ Donner la nature des branches infinies en $+\infty$ et en $-\infty$. **(1pt)**

6/ a) Étudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à l'asymptote oblique en $-\infty$ sur $]-\infty;-2]$. **(0,25pt)**

b) Étudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à l'asymptote oblique en $+\infty$ sur $[1;+\infty[$. **(0,25pt)**

T.S.V.P.

Partie B

1/ Calculer la dérivée de f dans les intervalles où f est dérivable. **(1pt)**

2/ Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f. **(0,75pt)**

3/ Soit g la restriction de f à $]1;+\infty[$.

a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α. **(0,5pt)**

b) Montrer que $1,1<\alpha<1,2$. **(0,25pt)**

Partie C

1/ Montrer que g est une bijection sur $]1;+\infty[$ vers J un intervalle à déterminer. **(0,5pt)**
Soit g^{-1} la bijection réciproque de g.

2/ g^{-1} est-elle dérivable sur J? **(0,25pt)**

3/ Calculer $g(2)$ et $g\left(2-2\sqrt{3}\right)$ puis $\left(g^{-1}\right)'\left(2-2\sqrt{3}\right)$. **(0,75pt)**

4/ Expliciter l'expression de $g^{-1}(x)$. **(0,25pt)**

5/ Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. **(1,5pt)**