CORRECTION DU SUJET DU BACCALAURÉAT DE MATHÉMATIQUES TERMINALE D 2023 PREMIER GROUPE.

Exercice 1 :

1. Résolvons l'inéquation (I) : $1-2\sqrt{x+1}>0$

$1-2\sqrt{x+1}>0 \Rightarrow -2\sqrt{x+1}>-1 \Rightarrow \sqrt{x+1}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+1<\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x<\frac{1}{4}-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x<\frac{-3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in [-1\,;\,+\infty[\\ x\in \left]-\infty\,;\,-\frac{3}{4}\right[\end{cases} \Leftrightarrow x\in [-1\,;\,+\infty[\cap \left]-\infty\,;\,-\frac{3}{4}\right[\Leftrightarrow x\in \left[-1\,;\,-\frac{3}{4}\right[.$

Donc $S_{\mathbb{R}}=\left[-1\,;\,-\frac{3}{4}\right[$.

2. Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x+1}-x$.

a)Utilisons la question 1. Pour étudier les variations de f.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\ x+1\geq 0\}$. Soit $x+1\geq 0$, alors $x\geq -1$, donc $D_f=[-1\,;\infty[$.

f est continue sur D_f et dérivable sur $D_f\backslash\{-1\}=]-1\,;+\infty[$, et pour tout $x>-1$, on a :

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-1=\frac{1-2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$. Pour tout $x>-1$, $2\sqrt{x+1}>0$, donc le signe de f' est celui du numérateur. Or d'après 1. $1-2\sqrt{x+1}>0 \Leftrightarrow x\in\left[-1\,;\,-\frac{3}{4}\right[$,

donc si $x\in\left[-1\,;\,-\frac{3}{4}\right[$, $f'(x)>0$ et sinon, c'est-à-dire $x\in\left]-\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$ car $D_f=[-1\,;\infty[$, $f'(x)<0$. D'où f est strictement croissante sur $\left[-1\,;\,-\frac{3}{4}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$. De plus $f'\left(-\frac{3}{4}\right)=0$

b) Justifions que f realise une bijection de $\left[-\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$vers un intervalle J que nous déterminerons

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left[-\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$, donc f réalise une bijection de $\left[-\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$ Vers $J=f\left(\left[-\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[\right)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\,;\,f\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$. On a : $f\left(-\frac{3}{4}\right)=\sqrt{-\frac{3}{4}+1}+\frac{3}{4}=\sqrt{\frac{1}{4}}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\right)$, car x est positif puisque $x\to+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)=\sqrt{0+0}-1=-1$,

ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)=+\infty\times(-1)=-\infty.$

D'où $J=\left]-\infty\,;\frac{5}{4}\right]$.

c) Étudions la dérivabilité de f^{-1} et calculons $(f^{-1})'(1)$.

Puisque f est dérivable sur $\left]-\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$ et $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in\left]-\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$, alors f^{-1} est dérivable sur $\left]-\infty\,;\frac{5}{4}\right[$

Calculons $(f^{-1})'(1)$. On remarque $f(0)=1$, donc $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}$.

Or $f'(0)=\frac{1}{2\sqrt{0+1}}-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$. D'où $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{-1}{2}}=-2$. Par suite $(f^{-1})'(1)=-2$.

d) Calculons $(f^{-1})'(x)$ et justifions que, pour tout x de J, $f^{-1}(x)=\frac{-2x+1+\sqrt{-4x+5}}{2}$.

Soit $y\in\left]-\frac{3}{4}\,;+\infty\right[$ et $x\in\left]-\infty\,;\frac{5}{4}\right[$, tel que $f(y)=x$.

Alors $\sqrt{y+1}-y=x \Rightarrow \sqrt{y+1}=y+x \Leftrightarrow \begin{cases} y+1\geq 0 \\ y+1=(y+x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq -1 \\ y^2+2yx+x^2=y+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y^2 + 2yx + x^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y^2 + y(2x-1) + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$. $\Delta = b^2 - 4ac = (2x-1)^2 - 4(1)(x^2-1)$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2x-1)^2 - 4(1)(x^2-1) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 4 = -4x + 5$. Soit $-4x + 5 = 0$, alors $-4x = -5$, donc $x = \frac{5}{4}$. Tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$-4x+5$	$+$	0	$-$

Donc $\Delta \geq 0$, ainsi $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2x+1-\sqrt{-4x+5}}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2x+1+\sqrt{-4x+5}}{2}$.

Ainsi $f^{-1}(x) = \frac{-2x+1-\sqrt{-4x+5}}{2}$ ou $f^{-1}(x) = \frac{-2x+1+\sqrt{-4x+5}}{2}$.

Pour $x = 1 \in \left]-\infty\,; \frac{5}{4}\right[$, $f^{-1}(1) = \frac{-2\times1+1-\sqrt{-4\times1+5}}{2} = \frac{-2+1-\sqrt{-4+5}}{2} = \frac{-1-1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \notin \left]-\frac{3}{4}\,; +\infty\right[$

et $f^{-1}(1) = \frac{-2\times1+1+\sqrt{-4\times1+5}}{2} = \frac{-2+1+\sqrt{-4+5}}{2} = \frac{-1+1}{2} = \frac{0}{2} = 0 \in \left]-\frac{3}{4}\,; +\infty\right[$,

d'où $f^{-1}(x) = \frac{-2x+1+\sqrt{-4x+5}}{2}$, c'est-à-dire que $f^{-1}(x) = \frac{1-2x+\sqrt{5-4x}}{2}$

Exercice 2 :

1. a) Calculons les différentes modalités de Z.

On a : pour $i = 1; 2\ 3; 4; 5,\ \ z_i = \sqrt{y_i}$, donc $z_1 = \sqrt{y_1} = \sqrt{20.29} = 4{,}50444225 = 4{,}5$;

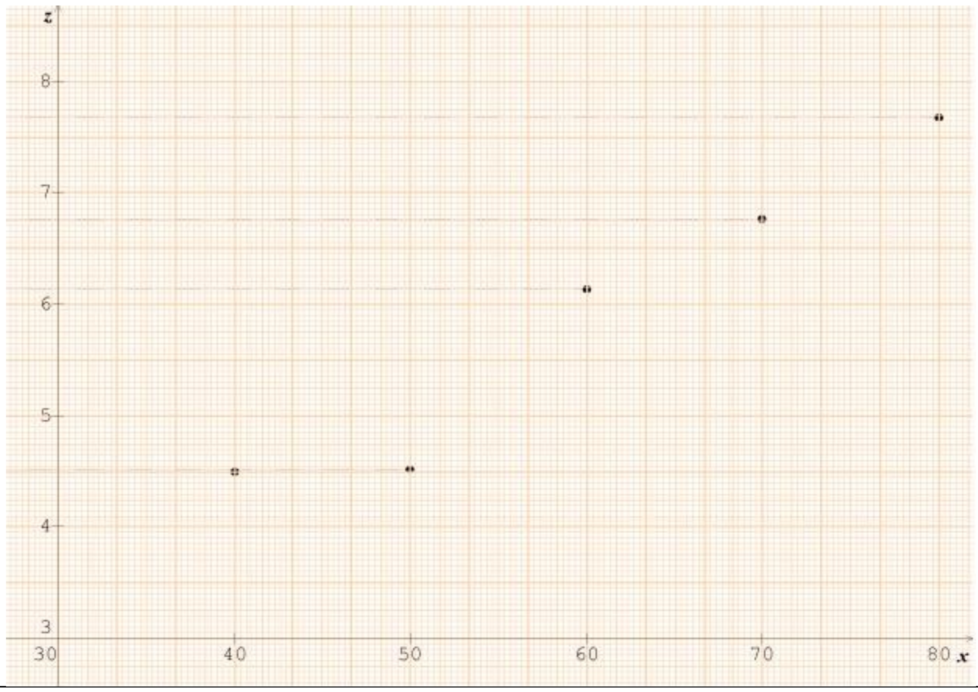
$z_2 = \sqrt{y_2} = \sqrt{20{,}42} = 4{,}51884941 = 4{,}52$; $z_3 = \sqrt{y_3} = \sqrt{37{,}57} = 6{,}12943717 = 6{,}13$;

$z_4 = \sqrt{y_4} = \sqrt{45{,}75} = 6{,}76387463 = 6{,}76$; $z_5 = \sqrt{y_5} = \sqrt{58{,}94} = 7{,}67723909 = 7{,}68$

Ces résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Vitesse en Km/h	40	50	60	70	80
Distance de freinage en m	20,29	20,42	37,57	45,75	58,94
Z (z_i)	4,5	4,52	6,13	6,76	7,68

b) construisons le nuage de points associés à la série double de variables X et Z.



c) Déterminons le coefficient de corrélation linéaire entre X et Z puis interprétons les résultats.
Calculons la moyenne de la variable X :
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(40 + 50 + 60 + 70 + 80) = \frac{300}{5} = 60 \Rightarrow \bar{x} = 60$
Calculons la moyenne de la variable Z :
$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{5}(4{,}5 + 4{,}52 + 6{,}13 + 6{,}76 + 7{,}68) = \frac{29{,}59}{5} = 5{,}918 \Rightarrow \bar{z} = 5{,}918.$
$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{5}(40^2 + 50^2 + 60^2 + 70^2 + 80^2) - 60^2.$
Calculons la variance de la variable X :
$\Rightarrow V(X) = \frac{1}{5}(1600 + 25000 + 3600 + 4900 + 6400) - 60^2 = \frac{19000}{5} - 60^2 = 3800 - 3600 = 200 \Rightarrow V(X) = 200.$
Calculons la variance de la variable X :
$V(Z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \bar{z}^2 = \frac{1}{5}(4{,}5^2 + 4{,}52^2 + 6{,}13^2 + 6{,}76^2 + 7{,}68^2) - 5{,}918^2.$
$\Rightarrow V(Z) = \frac{1}{5}(182{,}9373) - 35{,}022724 = 36{,}58746 - 35{,}022724 = 1{,}564736$
$\Rightarrow V(Z) = 1{,}564736$
$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \times z_i - \bar{x} \times \bar{z}.$
Donc $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{5}(4{,}5 \times 40 + 4{,}52 \times 50 + 6{,}13 \times 60 + 6{,}76 \times 70 + 7{,}68 \times 80) - 60 \times 5{,}918$
$\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 372{,}28 - 355{,}08 = 17{,}2$. Ainsi $\text{cov}(X, Y) = 17{,}2$
Calculons enfin le coefficient de corrélation r :
$r = \frac{cov(X\,;Z)}{\sqrt{V(X)V(Z)}} = \frac{17{,}2}{\sqrt{200 \times 1{,}564736}} = 0{,}97228349 \Rightarrow \boldsymbol{r = 0{,}97228349.}$
Interprétation :
On a : $r = 0{,}97228349$ donc $0{,}87 < r < 1$ alors la corrélation linéaire entre la variable X et Z est forte. Ainsi les droites d'ajustement sont peu distinctes et le nuage de points est susceptible d'un ajustement affine satisfaisant.
d) Déterminons une équation de la droite de régression de z en x
La droite de régression de z en x a pour équation : $z = ax + b$ avec : $a = \frac{\text{cov(X ;Z)}}{\text{V(X)}}$; $b = \bar{z} - a\bar{x}$
$a = \frac{\text{cov(X ;Z)}}{\text{V(X)}} = \frac{17{,}2}{200} = 0{,}086$; ; $b = \bar{z} - a\bar{x} = 5{,}918 - 0{,}086 \times 60 = 5{,}918 - 5{,}16 = 0{,}758.$
D'où l'équation de la droite de régression de z en x est $\boldsymbol{z = 0.086x + 0.758}$
2. a) Déterminons une relation fonctionnelle unissant x et y.
pour $i = 1; 2\ 3; 4; 5,\ \ z_i = \sqrt{y_i}$, donc $z = \sqrt{y}$ ainsi $y = z^2$. Or d'après 1. d) $z = 0.086x + 0.758$
donc $z^2 = (0.086x + 0.758)^2$. d'où $\boldsymbol{y = (0.086x + 0.758)^2}$
b) Déterminons une estimation de la distance de freinage nécessaire à un véhicule circulant à $120km/h$.
D'après la question 2. a) $y = (0.086x + 0.758)^2$, donc pour $x = 120km/h$, on a :
$y = (0.086 \times 120 + 0.758)^2 = 11{,}078^2 = 122{,}722084 = 122{,}72\text{m}$. ainsi une estimation de la distance de freinage nécessaire à un véhicule circulant à $120km/h$ est de $\mathbf{122{,}72m}$.

PROBLÈME :

Partie A :

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = x - \ln(1 + x)$ et $v(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x)$.
1.a) Étudions les variations des fonctions u et v et déterminons leur signe :
Fonction u : la fonction u est définie pour tout réel x tel que $1 + x > 0$, c'est-à-dire $x > -1$, donc $x \in]-1, +\infty[$. Ainsi $D_u =]-1, +\infty[$.
Déterminons les limites de la fonction u aux bornes de son domaine de définition :
D'autre part, sur D_u, u est continue et dérivable, car étant la somme des fonctions qui le sont, et pour tout réel $x \in D_u$, on a :
$u'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \Rightarrow u'(x) = \frac{x}{1+x}.$
Détermination du signe de $u'(x)$.
Soit $u'(x) = 0$, alors $\frac{x}{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0$ et $1 + x \neq 0$. Soit $1 + x = 0$, on a $x = -1$
Alors on a le tableau de signe suivant en tenant compte du domaine de définition de u :

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$1+x$	$-$		$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x}{1+x}$	$+$		$-$	0	$+$

Donc si $x \in]-1\,;0]$, $u'(x) \leq 0$ donc u est décroissante sur $]-1\,;0]$ et si $x \in [0\,;\,+\infty[$, $u'(x) \geq 0$, donc u est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. u étant décroissante puis croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la fonction u admet un minimum en 0, donc pour tout $x \in D_u$, $u(x) \geq u(0) = 0 - \ln(1+0) = \ln(1) = 0 \Rightarrow u(x) \geq 0$. D'où u est positive sur D_u.

Fonction v : la fonction v est définie pour tout réel x tel que $1 + x > 0$, c'est-à-dire $x > -1$, donc $x \in]-1, +\infty[$. Ainsi $D_v =]-1, +\infty[$.
Sur D_v, v est continue et dérivable, car étant la somme des fonctions qui le sont, et pour tout réel $x \in D_v$, on a :
$v'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x-x^2-1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \Rightarrow v'(x) = \frac{-x^2}{1+x}$.
Détermination du signe de $v'(x)$.
Soit $v'(x) = 0$, alors $\frac{-x^2}{1+x} = 0 \Rightarrow -x^2 = 0$ et $1 + x \neq 0 \Rightarrow -x \times x = 0 \Rightarrow -x = 0$ ou $x = 0$ et $1 + x \neq 0$
$\Rightarrow x = 0$ et $1 + x \neq 0$. Soit $1 + x = 0$, on a $x = -1$
Alors on a le tableau de signe suivant en tenant compte du domaine de définition de v :

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$-x^2$	$-$		$-$	0	$-$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{-x^2}{1+x}$	$+$		$-$	0	$-$

Donc si $x \in]-1\,;0]$, $v'(x) \leq 0$ donc v est décroissante sur $]-1\,;0]$ et si $x \in [0\,;\,+\infty[$, $v'(x) \leq 0$, donc v est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$. u étant décroissante puis croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. Si $-1 < x \leq 0$,
alors $v(x) \geq v(0)$ car la fonction u est décroissante sur $]-1\,;0]$,
donc $v(x) \geq v(0) = 0 - \frac{0^2}{2} - \ln(1+0) = 0 \Rightarrow \mathrm{v}(x) \geq 0$, donc v est positive sur $]-1\,;0]$.
Aussi, si $x \geq 0$, alors $v(x) \leq v(0)$ car la fonction v est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors $v(x) \leq v(0) = 0 - \frac{0^2}{2} - \ln(1+0) = 0$
$\Rightarrow \mathrm{v}(x) \leq 0$, donc v est négatif sur $[0\,;\,+\infty[$.

b) Déduisons-en que, pour tout x nombre réel tel que $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ **(1)**
D'après la question 1.a), u est positive sur $[0\,;\,+\infty[$ et v est negative sur $[0\,;\,+\infty[$, donc $u(x) \geq 0$ et $v(x) \leq 0$ si $x \geq 0$. Ainsi on a $x - \ln(1+x) \geq 0 \Rightarrow x \geq \ln(1+x)$ c'est-à-dire $\ln(1+x) \leq x$ $*$. Aussi $v(x) \leq 0 \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) \leq 0 \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$ $**$. De $*$ et $**$ on a : $\boldsymbol{x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$.

D'où pour tout x nombre réel tel que $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. Soit g la fonction definie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$

a) Démontrons que g est dérivable sur son domaine de définition et calculons $g'(x)$

la fonction g est la somme de deux fonctions : $x \mapsto (1+x)$ et $x \ \mapsto \frac{2x}{2+x}$ qui sont toutes dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc g est derivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$,

on a : $g'(x) = \frac{(1+x)'}{1+x} - \frac{(2x)'\times(2+x)-(2+x)'\times 2x}{(2+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \left(\frac{2(2+x)-1\times 2x}{(2+x)^2}\right) = \frac{4+2x+x^2-4-4x+2x}{(1+x)(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$.

Ainsi $\boldsymbol{g'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}}$.

b) Pour tout nombre réel x, $x \geq 0$, minorons $(1+x)(2+x)^2$ puis déduisons-en que $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$

Soit $x \geq 0$. Alors $2+x \geq 2+0 \Rightarrow 2+x \geq 2 \Rightarrow (2+x)^2 \geq 2^2$ car $2+x \geq 0$ et $2 \geq 0$, donc $(2+x)^2 \geq 4 \quad *$

Aussi $x \geq 0 \Rightarrow 1+x \geq 1 \quad **$. De $*$ et $**$, on a $(1+x)(2+x)^2 \geq 1 \times 4$ **d'où** $\boldsymbol{(1+x)(2+x)^2 \geq 4}$.

Or $g'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$ et d'après ce qui précède $(1+x)(2+x)^2 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{(1+x)(2+x)^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 \times \frac{1}{(1+x)(2+x)^2} \leq x^2 \times \frac{1}{4}$

Donc $\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \leq \frac{x^2}{4} \Rightarrow g'(x) \leq \frac{x^2}{4} \quad *$. D'autre part $(1+x)(2+x)^2 > 0$ et $x^2 \geq 0$, car $x \geq 0$, donc $g'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq 0 \quad **$. De $*$ et $**$, on déduit que $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$.

c) Déduisons-en que, pour tout x nombre réel tel que $x \geq 0$: $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$.

D'après 2. b) $0 \leq g'(t) \leq \frac{t^2}{4}$ pour tout $t \geq 0$. Soit $x \geq 0$.

On a : $0 \leq g'(t) \leq \frac{t^2}{4} \Rightarrow \int_0^x 0dt \leq \int_0^x g'(t)\,dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{4}dt \Rightarrow [0]_0^x \leq [g(t)]_0^x \leq \left[\frac{t^3}{4\times 3}\right]_0^x$

$\Rightarrow 0 \times x - 0 \leq g(x) - g(0) \leq \frac{x^3}{4\times 3} - \frac{0^3}{4\times 3} \Rightarrow 0 \leq g(x) - g(0) \leq \frac{x^3}{12}$. Or $g(0) = \ln(1+0) - \frac{2\times 0}{2+0} = \ln(1) - 0 = 0$.

D'où $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$, pour tout x nombre réel $x, x \geq 0$ **(2)**

3. on considère la fonction f definie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

a. Étudions la continuité de f en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ d'après le cours, ainsi $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1}$. **D'où f est continue en 0.**

b. Calculons $f'(x)$, puis établissons que, pour tout nombre réel x, $x \geq 0$, $g(x) \leq \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

La fonction f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et pour tout reel x, $x > 0$, on a :

$f'(x) = \frac{\ln'(x+1)\times x - x'\ln(x+1)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x+1}\times x - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ donc $\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}}$.

Établissons que , pour tout nombre réel x, $x \geq 0$, $g(x) \leq \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

Nous savons que $g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{2+x}$, alors $g(x) - \left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right) = \ln(x+1) - \frac{2x}{2+x} - \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

$\Rightarrow g(x) - \left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right) = -\frac{2x}{2+x} + \frac{x}{x+1} = \frac{-2x^2-2x+2x+x^2}{(2+x)(x+1)} = -\frac{x^2}{(2+x)(x+1)} \leq 0$ car $x \geq 0$, donc

$g(x) - \left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right) \leq 0$ **d'où** $\boldsymbol{g(x) \leq \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}$.

4. a) Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x \times \left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)\times(1+x)}{x\times(1+x)}\right)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \left(\frac{1+x}{x}\right)\right)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \left(\frac{1+x}{x}\right)\right) = 0 \times 1 = 0$. Donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

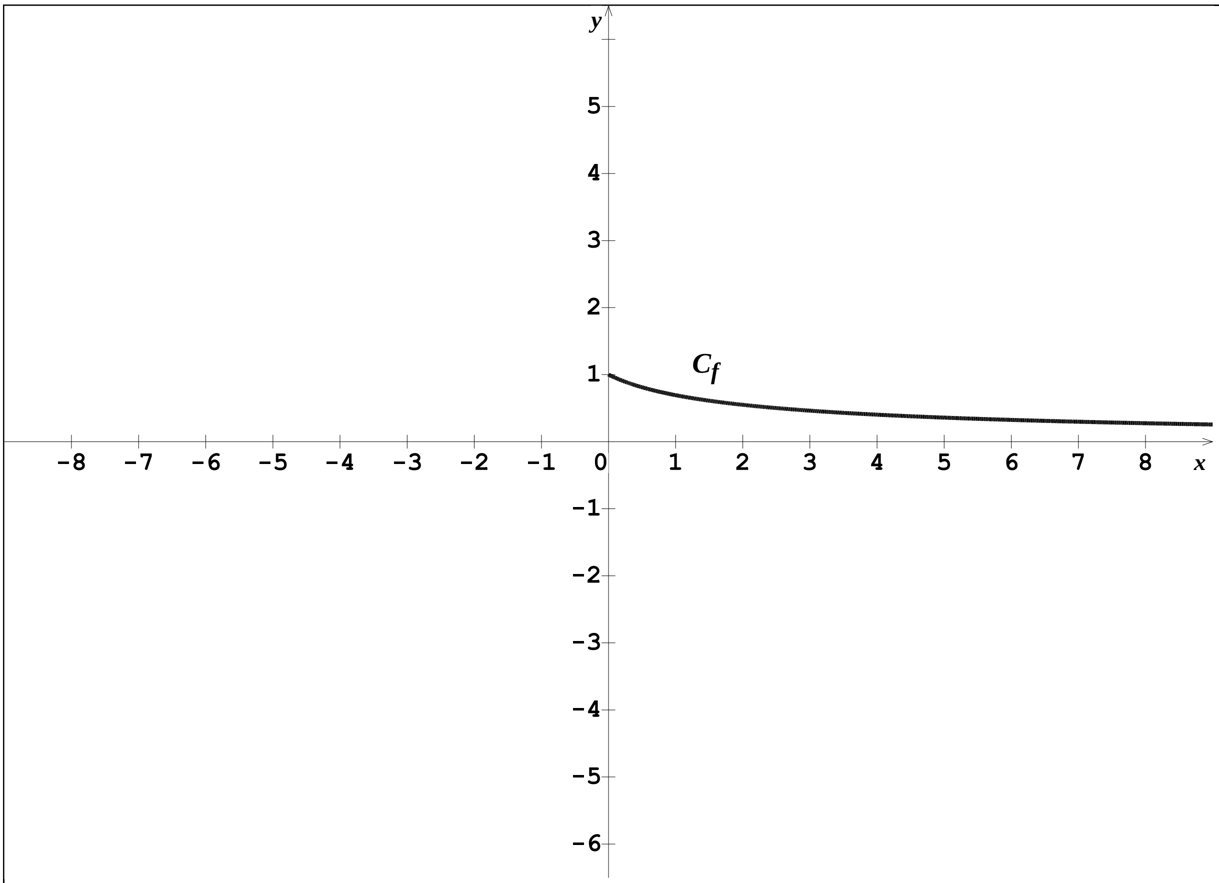
b) En utilisant 2. b) justifions que $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$. **(3)**

$g(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{2+x}$. D'après 2. b) Pour tout nombre réel x, $x > 0$, $0 < g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$, donc g est strictement croissante, de plus $g(0) = \ln(0+1) - \frac{2\times 0}{2+0} = 0$, donc g est positif. Alors $\ln(x+1) - \frac{2x}{2+x} \geq 0$,

donc $2x \le (2+x)\ln(x+1)$. On a : $0 \le \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2x-2\ln(x+1)-x^2}{2x^2} \le \frac{(2+x)\ln(x+1)-2\ln(x+1)-x^2}{2x^2} \le \frac{x\ln(x+1)-x^2}{2x^2}$
Ainsi $0 \le \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{2} \le \frac{x\ln(x+1)-x^2}{2x^2} = \frac{\ln(x+1)}{2x} - \frac{1}{2}$. Or $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)}{2x}-\frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\times 1-\frac{1}{2} = 0$ et $\lim_{x\to0} 0 = 0$. D'où , d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}-\frac{1}{2}\right) = 0$. **Par suite $\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$**
D'après **(1),** pour tout x nombre réel tel que $x \ge 0$: $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$, donc $x^2 - \frac{x^3}{2} \le \ln(1+x) \le x$
c) Déduisons-en que f est derivable en 0 et calculons $f'(0)$
$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}-1}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\right) = \lim_{x\to0} -\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}$ car d'après 4.b) $\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$.
D'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
d) Donnons une équation de la tangente T à C_f en 0 et précisons leur position.
L'équation de la tangente T est : $y = f'(0)(x-0)+f(0) = -\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow$ **T: $y = -\frac{1}{2}x+1$.**
$f(x)-y = \frac{\ln(x+1)}{x} - 1 + \frac{1}{2}x$.
d'après **(1)** $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(x+1)$ pour tout x, $x > 0$, donc $1 - \frac{x}{2} < \frac{\ln(x+1)}{x}$, donc $\frac{\ln(x+1)}{x} - 1 + \frac{1}{2}x > 0$.
C'est-à-dire $f(x)-y = \frac{\ln(x+1)}{x} - 1 + \frac{1}{2}x > 0$. **D'où C_f est au-dessus de de T.**
5. a) En utilisant la question 3.b, montrons que $x^2 f'(x) + g(x) \le 0$, pour tout $x \ge 0$
D'après 3.b) $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ et pour tout nombre réel x, $x \ge 0$, $g(x) \le \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.
Donc $x^2 f'(x) + g(x) = x^2\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right) + g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) + g(x)$. Comme $(x) \le \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$
Alors $x^2 f'(x) + g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) + g(x) \le \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = 0$, **d'où $x^2 f'(x) + g(x) \le 0$**
b) Déduisons-en le signe de $f'(x)$.
Puisque $x^2 f'(x) + g(x) \le 0$, pour tout $x \ge 0$, en particulier pour $x > 0$, alors $x^2 f'(x) \le -g(x)$,
donc $f'(x) \le -\frac{g(x)}{x^2} < 0$, car d'après **(2),** $0 \le g(x) \le \frac{x^3}{12}$, pour tout x nombre réel $x, x \ge 0$ montre bien que $g(x) \ge 0$.
Ainsi $f'(x) < 0$ pour tout $x \ge 0$, car $f'(0) \ne 0$.
c) Dressons le tableau de variation de f puis, traçons la courbe de f.
D'après les résultats précédents, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$,
de plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(0) = 1$. D'où le tableau de variation de f, ainsi que sa courbe :
Tableau de variation :

x	$0 \qquad +\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$1 \searrow 0$

Courbe de la fonction f :



Partie B

On considère la suite (u_n) definie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ où a est un réel donné strictement positif

1. **a)** justifions, que pour tout n entier naturel, $u_n > 0$ et que la suite (u_n) est décroissante

soit n un entier naturel . Si $n = 0$, $u_0 = a > 0$. Supposons que pour tout entier n, $u_n > 0$.
Par définition $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ et par hypothèse de récurrence $u_n > 0$, donc $1 + u_n > 1 + 0 \Rightarrow 1 + u_n > 1$. Ainsi $\ln(1 + u_n) > \ln 1 \Rightarrow \ln(1 + u_n) > 0$ d'où $u_{n+1} = \ln(1 + u_n) > 0$. Par suite pour tout n entier naturel, $u_n > 0$.
De plus, d'après **(1)** $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout x, $x \geq 0$, donc $\ln(1 + u_n) \leq u_n \Rightarrow u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \leq u_n$. Ainsi $u_{n+1} \leq u_n$ d'où la suite (u_n) est décroissante.

b) déduisons que la suite (u_n) est convergente et montrons que sa limite est nulle.
D'après la question 1.a) la suite (u_n) est décroissante et pour tout n, $u_n > 0$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est minorée, donc la suite (u_n) est une suite minorée et décroissante, elle est par conséquent convergente.
Étant donné que la suite (u_n) est convergente et que $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$,
sa limite est solution de l'équation $x = \ln(1 + x) \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow f(x) = 1$, donc la limite est solution de l'équation $f(x) = 1$. Or f est strictement décroissante sur $]0\,;\ +\infty[$ et y est continue, et en 0 aussi, par conséquent l'équation $f(x) = 1$ n'admet qu'une seule solution, de plus on remarque que $f(0) = 1$. D'où la limite de la suite (u_n) est nulle.

2. Encadrement de u_n.

On prend $a = 1$ et on pose pour tout entier naturel $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a) Exprimons $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n et déduisons à l'aide de **(3)** la limite de $v_{n+1} - v_n$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ln(1+u_n)} - \frac{1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\ln(1+u_n)} - \frac{1}{u_n}$.
Comme $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\ln(1+u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n \times \ln(1+u_n)}$.
D'après **(1),** pour tout x nombre réel tel que $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$,

donc pour tout entier naturel n tel que $n \geq 0$: $u_n - \frac{u_n^2}{2} \leq \ln(1+u_n) \leq u_n \Rightarrow u_n^2 - \frac{u_n^3}{2} \leq u_n \ln(1+u_n) \leq u_n^2$

Ainsi $\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n \ln(1+u_n)} \leq \frac{1}{u_n^2 - \frac{u_n^3}{2}}$, puis en multipliant cette inégalité par $u_n - \ln(1+u_n)$ qui est positif, on obtient :

$\frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2} \leq \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n \ln(1+u_n)} \leq \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2 - \frac{u_n^3}{2}}$. Or d'après **(3)**, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x - \ln(x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2}\right) = \frac{1}{2}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2 - \frac{u_n^3}{2}}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{u_n}{2}} \times \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2}\right) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. D'où , d'après le théorème de gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n \ln(1+u_n)}\right) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} (v_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2}}$.

b) **(i)** montrons à l'aide de l'inégalité **(2)**, que pour tout nombre réel x, $x > 0$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{(2+x)g(x)}{2x\ln(x+1)}$ et que $\frac{(2+x)g(x)}{2x\ln(x+1)} \leq \frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x)$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{x\ln(x+1) + 2\ln(x+1) - 2x}{2x\ln(x+1)} = \frac{(2+x)\ln(x+1) - 2x}{2x\ln(x+1)} = \frac{(2+x)\left(\ln(x+1) - \frac{2x}{2+x}\right)}{2x\ln(x+1)}$$

Donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{(2+x)\left(\ln(x+1) - \frac{2x}{2+x}\right)}{2x\ln(x+1)} = \frac{(2+x)g(x)}{2x\ln(x+1)}$. **D'où** $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{(2+x)g(x)}{2x\ln(x+1)}$.

Montrons maintenant que pour tout x nombre réel tel que $x \geq 0$, $\frac{(2\mp)g(x)}{2x\ln(x+1)} \leq \frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x)$.

D'après **(2)** $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$, ce qui signifie que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Alors $-g(x) \leq 0$, c'est-à-dire que $-\ln(x+1) + \frac{2x}{2+x} \leq 0$, soit $\frac{2x}{2+x} - \ln(1+x) \leq 0$, en multipliant cette inégalité par $(2+x)^2$ qui est positif, donc l'inégalité ne change pas de signe, on obtient : $(2+x)^2\left(\frac{2x}{2+x} - \ln(1+x)\right) \leq 0$, puis en divisant par $4x^2\ln(x+1)$ qui est positif car $x > 0$, on obtient de nouveau : $\frac{(2+x)^2\left(\frac{2x}{2+x} - \ln(1+x)\right)}{4x^2\ln(x+1)} \leq 0$, donc en développant le numérateur, on obtient $\frac{2x(2+x) - (2+x)^2\ln(1+x)}{4x^2\ln(x+1)} \leq 0$, ainsi $\frac{2x(2+x)}{4x^2\ln(x+1)} - \frac{(2+x)^2\ln(1+x)}{4x^2\ln(x+1)} \leq 0$, ensuite en simplifiant les facteurs communs on obtient : $\frac{2+x}{2x\ln(1+x)} - \frac{(2+x)^2}{4x^2} \leq 0$, puis $\frac{2+x}{2x\ln(1+x)} \leq \frac{(2+x)^2}{4x^2}$, et enfin en multipliant cette dernière inégalité par $g(x)$ qui est positif, on obtient $\frac{(2+x)g(x)}{2x\ln(1+x)} \leq \frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x)$. **D'où le résultat**.

(ii) Montrons que , pour tout réel x de $]0\,;1]$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

Nous savons que d'après (1) pour tout x nombre réel tel que $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$,

d'après 2. b) (i), on a : $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{(2+x)g(x)}{2x\ln(x+1)} \geq 0$, or $g(x) \geq 0$, $\ln(x+1) > 0$ car $x+1 > 1$,

donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \geq -\frac{1}{2}$, ainsi : $\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ $*$.

D'autre part, d'après Partie B, 2. b) (i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{(2+x)g(x)}{2x\ln(x+1)} \leq \frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x)$, inégalité qui reste valable sur $]0\,;1]$

Donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \leq \frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x)$. Or d'après **(2)**, $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$, pour tout x nombre réel $x, x \geq 0$.

Ainsi $\frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x) \leq \frac{(2+x)^2}{4x^2} \times \frac{x^3}{12} \Rightarrow \frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x) \leq \frac{(2+x)^2}{48} x$.

Étant donné que $x \in]0\,;1]$ et que la fonction $x \mapsto (2+x)^2$ est croissante sur $]0\,;1]$, alors $(2+x)^2 \leq (2+1)^2 = 9$.

Donc $\frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x) \leq \frac{(2+x)^2}{48} x \leq \frac{9}{48} x \Rightarrow \frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x) \leq \frac{3}{16} x$. Ainsi $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \leq \frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x) \leq \frac{3}{16} x$.

Ce qui donnera $\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \leq \frac{3}{16} x$, donc $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \leq \frac{3}{16} x - \frac{1}{2}$, d'où en multipliant par -1 cette inégalité, on obtient : $\frac{1}{2} - \frac{3}{16} x \leq \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}$ $**$.

De $*$ et $**$, **on conclut** que pour tout réel x de $]0\,;1]$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{16} x \leq \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

(iii) Prouvons que , pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} - \frac{3}{16} u_n \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2}$

D'après 2. b) (ii), on a : pour tout réel x de $]0\,;1]$, $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n \leq \frac{1}{\ln(u_n+1)}-\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

Or d'après 2. a) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\ln(1+u_n)}-\frac{1}{u_n}$, **d'où pour tout entier naturel n**, $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n \leq v_{n+1}-v_n \leq \frac{1}{2}$ **(4)**

Montrons à présent que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{4} \leq v_{n+1}-v_n \leq \frac{1}{2}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n \geq \frac{1}{4}$.

Pour $n=0$, $u_0=a=1$ et $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_0=\frac{1}{2}-\frac{3}{16}=\frac{8-3}{16}=\frac{5}{16} \geq \frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ et $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_0 \geq \frac{1}{4}$.

Soit $n \geq 0$. Supposons que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n \geq \frac{1}{4}$ (HR).

$\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{16}\ln(u_n+1)$, or d'après **(1)**, pour tout x nombre réel tel que $x \geq 0$: $x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, en particulier $\ln(1+x) \leq x$, donc $\ln(1+u_n) \leq u_n$, alors $-\ln(1+u_n) \geq -u_n$, donc : $-\frac{3}{16}\ln(1+u_n) \geq -\frac{3}{16}u_n$ $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}\ln(1+u_n) \geq \frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n$. Ainsi $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{16}\ln(u_n+1) \geq \frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n$. Or par hypothèse de récurrence $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n \geq \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{16}\ln(u_n+1) \geq \frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n \geq \frac{1}{4}$, ce qui veut dire $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_{n+1} \geq \frac{1}{4}$.

En conclusion $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n \geq \frac{1}{4}$. Nous savons que $\frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n \leq v_{n+1}-v_n \leq \frac{1}{2}$, et avec la dernière inégalité on obtient ce qui suit : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}-\frac{3}{16}u_n \leq v_{n+1}-v_n \leq \frac{1}{2}$, **d'où** $\frac{1}{4} \leq v_{n+1}-v_n \leq \frac{1}{2}$ **(5)**

3. a) En effectuant la somme des inégalités (5) encadrons $\boldsymbol{v_n-v_0}$:

Nous savons que $\frac{1}{4} \leq v_{n+1}-v_n \leq \frac{1}{2}$ **(5),** c'est-à-dire :

$$\frac{1}{4} \leq v_1-v_0 \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} \leq v_2-v_1 \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} \leq v_3-v_2 \leq \frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{4} \leq v_{n-2}-v_{n-3} \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} \leq v_{n-1}-v_{n-2} \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} \leq v_n-v_{n-1} \leq \frac{1}{2}$$

En Faisant la somme de tous ces inégalités, on obtient :

$\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{n\ fois} \leq v_1-v_0+v_2-v_1+v_3-v_2+\cdots+v_{n-3}-v_{n-2}+v_{n-2}-v_{n-1}+v_n-$
$v_{n-1} \leq \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{n\ fois}$. Dans la somme du membre du milieu, tous les termes vont se simplifier et il ne restera que v_0 et v_n et le résultat associé est $-v_0+v_n$.

Donc $\boldsymbol{\frac{1}{4}n \leq v_n-v_0 \leq \frac{1}{2}n}$**. D'où** l'encadrement.

b) Déduisons que, pour tout entier naturel n, $\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4}{4+n}$.

Par définition $v_n=\frac{1}{u_n}$, donc $u_n=\frac{1}{v_n}$. Or d'après Partie B, 3. a), pour tout entier naturel n, $\frac{1}{4}n \leq v_n-v_0 \leq \frac{1}{2}n$.

$v_0=\frac{1}{u_0}=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow \frac{1}{4}n \leq v_n-1 \leq \frac{1}{2}n \Rightarrow \frac{n}{4}+1 \leq v_n \leq \frac{n}{2}+1 \Rightarrow \frac{n+4}{4} \leq v_n \leq \frac{n+2}{2}$, donc $\frac{4}{n+4} \geq \frac{1}{v_n} \geq \frac{2}{n+2}$, ainsi $\frac{4}{n+4} \geq u_n \geq \frac{2}{n+2}$, **d'où** pour tout entier naturel n, $\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4}{4+n}$.

c) Retrouvons la limite de la suite (u_n).

D'après Partie B, 3. b), pour tout entier naturel n, $\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4}{4+n}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n+2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n+4}=0$.

Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0}$.