Session de 2023

Exercice 1

1 Résoudre l'inéquation $(I) : 1-2\sqrt{x+1} > 0$

2 Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x+1}-x$.

a Utiliser la question 1. pour étudier les variations de f.

b Justifions que f réalise une bijection de $\left[\frac{-3}{4};+\infty\right[$ vers un intervalle J à déterminer.

c Étudier la dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(1)$.

d Calculer $(f^{-1})'(x)$ et justifier que, pour tout x de J, $f^{-1}(x)=\dfrac{-2x+1+\sqrt{-4x+5}}{2}$.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous donne la distance de freinage sur une route sèche en fonction de la vitesse du véhicule.

La série statistique étudiée comporte deux variables X : la vitesse en km/h et Y la distance de freinage en m.

Vitesse en km/h	40	50	60	70	80
Distance de freinage en m	20,29	20,42	37,57	45,75	58,94

1 a Pour tout $i \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ on pose $z_i=\sqrt{y_i}$ et on appelle Z la variable dont les modalités sont : $z_1; z_2; \ldots; z_9$.

Calculer les différentes modalités de Z.

b Construire le nuage de points associés à la série double de variables X et Z.

c Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Z puis interpréter les résultats.

d Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

2 a Déterminer une relation fonctionnelle unissant x et y.

b Déterminer une estimation de la distance de freinage nécessaire à un véhicule circulant à $120km/h$.

Problème

Partie A :

On considère les fonctions u et v définies par : $u(x)=x-\ln(1+x)$ et $v(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$.

1 a Étudier les variations des fonctions u et v et déterminer leurs signes.

b En déduire que, pour tout x nombre réel tel que $x \geq 0 : x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x) \leq x$ **(1)**.

2 Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}$

a Démontrer que g est dérivable sur son domaine de définition et calculer $g'(x)$

b Pour tout nombre réel x, $x \geq 0$, minorer $(1+x)(2+x)^2$ puis en déduire que $0 \leq g'(x) \leq \frac{x^2}{4}$.

c En déduire que, pour tout x nombre réel tel que $x \geq 0 : 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{12}$. **(2)**.

3 On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

a. Étudier la continuité de f en 0.

b. Calculer $f'(x)$, puis établir que, pour tout nombre réel x, $x \geq 0$, $g(x) \leq \ln(1+x) - \dfrac{x}{x+1}$.

4. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. En utilisant 2. b) justifier que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ **(3)**.

c. En déduire que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

d. Donner une équation de la tangente T à C_f en 0 et préciser leur position.

5. a. En utilisant la question 3.b, montrer que $x^2 f'(x) + g(x) \leq 0$, pour tout $x \geq 0$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de f puis, traçons la courbe de f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ où a est un réel donné strictement positif.

1. a. Justifier, que pour tout n entier naturel, $u_n > 0$ et que la suite (u_n) est décroissante .

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et montrer que sa limite est nulle.

2. Encadrement de u_n.

On prend $a = 1$ et on pose pour tout entier naturel $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n et déduire à l'aide de **(3)** la limite de $v_{n+1} - v_n$

i. Montrer à l'aide de l'inégalité **(3)**, que pour tout nombre réel x, $x > 0$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{(2+x)}{2x\ln(x+1)} g(x)$ et que $\frac{(2+x)}{2x\ln(x+1)} g(x) \leq \frac{(2+x)^2}{4x^2} g(x)$

ii. Montrer que , pour tout réel x de $]0;1]$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}x \leq \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

iii. Prouver que , pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} - \frac{3}{16}u_n \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2}$. **(4)**

puis que $\frac{1}{4} \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2}$ **(5)**

3. a. En effectuant la somme des inégalités **(5)** encadrer $v_n - v_0$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\frac{2}{n+2} \leq u_n \leq \frac{4}{4+n}$

c. Retrouver la limite de la suite (u_n).