Habib à domicile
Collège – Lycée
Tel: 49684861 _ 32841683

TD : *Mathématique*
Classe: 7D_C
Année : 2023 – 2024

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12 - 60i$ où z est un nombre complexe.

   a) Calculer $P(2+2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de C :
   $$P(z) = (z-2-2i)(z^2+az+b).$$
   b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

   c) Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\Im(z_A) < \Im(z_B) < \Im(z_C)$. Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A,2);(B,-3);(C,3)\}$ et placer les points A, B, C et G.

2) Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M) = 2MA^2 - 3MB^2 + 3MC^2$ et Γ_m l'ensemble des points M tels que $\varphi(M) = m$, où m est un réel.

   a) Discuter suivant les valeurs de m, la nature de Γ_m.

   b) Reconnaître et tracer Γ_60.

Exercice 2

Soit $z = e^{\frac{i\pi}{2019}}$. On pose $S = 1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2018}$.
1) Vérifier que $z^{2020} = -z$. En déduire que
$$S = \frac{1}{1-z}$$
2) Écrire S sous forme algébrique.
3) En déduire que :
$$\cos\frac{2\pi}{2019} + \cos\frac{4\pi}{2019} + \ldots + \cos\frac{2018\pi}{2019} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 3

On considère dans C l'équation $\quad (E) : z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = 0$

a) Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation (E) puis résoudre (E) dans C.

b) Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).

Soit θ un réel et E_θ l'équation : $z^3 - 2e^{i\theta}(\sqrt{3}+i)z^2 + 4e^{2i\theta}(1+i\sqrt{3})z - 8ie^{3i\theta} = 0$

a) Démontrer que $(ze^{-i\theta})$ est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de E_θ.

b) En déduire les solutions de l'équation $(F) : z^3 + 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z + 8i = 0$.

pour $z \in C - \{-i\}$; on pose $f(z) = \frac{z}{z+i}$.

a) montrer que $f(e^{i\alpha}) = \frac{1}{2}(1 + i\tan(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}))$.

b) Montrer que si $f(z) = e^{i\theta}$ alors $z = \frac{-1}{2}\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\right)$.

c) En déduire une écriture algébrique des solutions de l'équation : $z^4 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(z+i)^4$.

Exercice 4

Dans le plan orienté on considère un parallélogramme direct $ABCD$. Soient ADM ; BAP et ACN des triangles directs rectangles isocèles respectivement en A ; B et C. Les affixes des points A ; B et C sont notées respectivement a ; b et c.

a) Placer les données sur une figure.

b) Exprimer en fonction de a ; b et c les affixes respectives p ; n ; m et d des points P ; N ; M et D.

2.a) Montrer que $p - c = i(m - b)$. En déduire que $PC = MB$ et $(PC) \perp (MB)$.

b) Montrer que $BN = MC$ (et $(BN) \perp (MC)$).

c) Montrer que les droites (AM) ; (BN) et (CP) sont concourantes.

Exercice 5

Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $E(\theta)$ l'équation : $z^2 - (3+i)ze^{i\theta} + 2(1+i)e^{2i\theta} = 0$.

1° a) Résoudre $E(\theta)$, on note z' et z'' les solutions telles que $|z'| > |z''|$.

b) Mettre sous forme exponentielle le nombre z''.

2°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $2e^{i\theta}$, $(1+i)e^{i\theta}$, $ie^{i\theta}$.

a) Montrer que les droites $(OA), (OC)$ d'une part et $(BO), (BA)$ d'autre part sont perpendiculaires.

b) Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, placer les points A, B, C.

c) Montrer que $OABC$ est un trapèze rectangle.

d) Montrer que l'aire du quadrilatère $OABC$ est indépendante de θ.

Exercice 6

On considère le polynôme P, défini sur C, par :

$$P(z) = z^3 - (5+5i)z^2 + (2+22i)z + 8 - 24i$$

1.a) Calculer $P(2)$.
b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout $z \in C$:

$$P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$$

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.
2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $\mathrm{Im}(z_A) < \mathrm{Im}(z_B) < \mathrm{Im}(z_C)$.
a) Placer les points A, B, C et G et montrer que les points O, A, B, C sont cocycliques.
b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$.
c) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre A qui transforme B en C.
d) Calculer l'affixe du point D image de C par la similitude directe s.
3) On pose $Z = \frac{z-3-i}{z-4i}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants : a) $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$
b) $|Z| = 1$
c) $|Z| = 2$
d) $2\arg(Z) = 2\angle(\overline{AC}, \overline{AB}) \quad [2\pi]$.

Exercice 7

Pour tout nombre complexe z on pose $P(z) = z^3 - (1+3i)z^2 + 2iz + 6 - 2i$.

a) Calculer $P(1-i)$.

b) Déterminer les nombres complexes a, b, c tels que $\forall z \in C, P(z) = (z-1+i)(az^2+bz+c)$.

c) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1-i$, $z_B = -1+i$ et $z_C = 1+3i$.

a) Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC.

b) Déterminer l'affixe z_D du point D symétrique de B par rapport au milieu de $[AC]$.

c) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

d) Mettre z_A et z_B sous forme trigonométrique.

Soit la similitude directe s de centre A et qui transforme C en B:

a) Donner l'expression complexe de s.

b) Déterminer le rapport et un angle de s.

On définit la suite (M_n) par $M_0(5,3)$ et $\forall n \in N, M_{n+1} = s(M_n)$.

a) Déterminer M_1 et M_2.

b) Montrer que le triangle AM_nM_{n+1} est rectangle et isocèle.

c) Montrer que $M_{2018} \in [AB]$.

d) Déterminer un entier naturel n_0 tel que $\forall n \geq n_0, AM_n < \frac{1}{2018}$.

e) On pose $\forall n \in N, L_n = M_nM_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_kM_{k+1}$.
Exprimer S_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 8

Soit a un nombre complexe non nul et l'équation E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes l'équation E.

2. Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $1 + ia$ et $1 - ia$. On pose $a = a_1 + ia_2; a_1$ et a_2 réels.

   a) Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.

   b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a| = 1$.

3. On suppose que $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

   a) Vérifier que pour tout réel x, on a :
   $$1 - e^{ix} = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} \text{ et } 1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}.$$

   b) En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1 + ia$ et $1 - ia$.

   c) Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice 9

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit A et B les points d'affixes respectives i et $-i$ et l'application de P définie par :

$$f : z \mapsto z' = \frac{z^2 - 1}{2z}$$

1. a) Déterminer les points fixes par f.
   b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si M', A et B sont alignés.
   c) Montrer que si $z' \neq i$, alors
   $$\frac{z' + i}{z' - i} = \left(\frac{z + i}{z - i}\right)^2$$
   d) Montrer que $\overline{(M'A \cdot M'B)} = 2\overline{(MA, MB)}(2\pi)$.
   e) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' est imaginaire pur.

2. Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
   a) Soit M' le point d'affixe $i \sin\theta$, déterminer, sous forme exponentielle, les affixes des points M_1 et M_2 antécédents de M' par f.
   b) Montrer que les points A, B, M_1 et M_2 sont situés sur un même cercle qu'on précisera.

3. Soit l'équation $(E) : z^2 - (1 + i)(m + 1))z + i(m^2 + 1) = 0$ où $m \in C$
   a) Résoudre dans C, l'équation (E).
   b) On désigne par $N_1(m + i)$ et $N_2(im + 1)$. Montrer que N_2 est l'image de N_1 par une rotation qu'on précisera.