EXERCICE 1

Soit $f(x) = \frac{2x^2+x-2}{x+1}$

1. a) Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on ait $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
2. Calculer $I = \int_2^e \frac{2(\ln t)^2+\ln t-2}{t(1+\ln t)}\, dt$.

EXERCICE 2

Le but de cet exercice est le calcul de

$$L = \int_1^e \frac{1}{t}\left(\frac{\ln t}{1+\ln t}\right)^3 dt$$

1. Calculer les deux intégrales :

$$I = \int_1^e \frac{1}{t(1+\ln t)}\, dt \quad \text{et} \quad J = \int_1^e \frac{1}{t(1+\ln t)^2}\, dt$$

2. a) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $t \geq 1$ on a :

$$\left(\frac{\ln t}{1+\ln t}\right)^2 = a + \frac{b}{1+\ln t} + \frac{c}{(1+\ln t)^2}$$

b) En déduire la valeur de

$$k = \int_1^e \frac{1}{t}\left(\frac{\ln t}{1+\ln t}\right)^2 dt$$

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $L = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2}k$. En déduire la valeur de L.

EXERCICE 3

1) Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et m on a :

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\, dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx$$

2) En déduire que :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1} = \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{(-1)^p}{n+p+1}$$

EXERCICE 4

A) Soit $g(x) = x + 1 - 2\ln x$ sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ tel que $g(x) > 0$.

B) Soit $f(x) = x + \ln x - (\ln x)^2$ sur $]0, +\infty[$.

a) Vérifier que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

c) Étudier la position relative de C_f et de la droite Δ d'équation $y = x$.

d) Étudier les branches infinies de C_f puis tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans le même repère orthonormé.

C) Soit a un réel strictement positif donné. On pose $I(a) = \int_1^a \ln t \, dt$ et $J(a) = \int_1^a (\ln t)^2 \, dt$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(a)$ en fonction de a.

2. a) Montrer que $\forall a > 0$, $J(a) = a(\ln a)^2 - 2I(a)$. En déduire la valeur de $J(a)$ en fonction de a.

3. Soit A la valeur de l'aire de la partie délimitée par les droites d'équations : $x = 1, x = e$, C_f et $C_{f^{-1}}$.

a) Calculer A.

b) En déduire la valeur de $\int_1^e f^{-1}(x) \, dx$.

EXERCICE 5

On se propose de calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} \, dx$.

1. Calculer les deux intégrales

$$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} \, dx \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \, dx$$

2. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall t \in]0, 1[$:

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$$

3. Déduire de (1) le calcul de $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} \, dx$.

4. a) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer J en fonction de I.

b) En déduire la valeur de J.

EXERCICE 6

Soit f la fonction telle que :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2} \quad x \neq 0$$

On désigne par C_f sa courbe dans un repère $O. \vec{i}, \vec{j}$.

a) Déterminer D_f

b) Étudiez la continuité de f à droite de 0

c) Étudiez la dérivabilité de f à droite de 0, interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1. Tracer T et C_f.

c) Discuter, graphiquement et suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation :
$$m(\ln x)^2 + (2m-1)(\ln x) + m = 0$$

d) Soit D le domaine plan délimité par : $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ et la courbe C_f. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A du domaine D.

a) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left]\frac{1}{e}, e\right]$.

b) Montrer que g admet une bijection de I sur un intervalle que l'on précisera.

c) Construire g^{-1} dans le repère $(O; I, J)$.

d) Déterminer les abscisses des points de C_f où la tangente passe par O.

EXERCICE 7

Soit f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ et soit g_n la fonction définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par $g_n(x) = \int_x^{nx} f(t)\,dt$. $(\mathcal{C}_n)$ est la courbe de g_n dans un R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. (a) Démontrer que $\forall x > 1$, $0 < \ln t < t-1$ et en déduire que $g_2(x) \geq \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$.
   (b) En déduire que $g_n(x) \geq g_2(x)$ et en déduire $\lim_{x\to 1^+} g_n(x)$.
3. (a) Démontrer que pour tout $x > 1$, on a : $\frac{(n-1)x}{\ln(nx)} \leq g_n(x) \leq \frac{(n-1)x}{\ln(x)}$.
   (b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} g_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g_n(x)}{x}$.
4. (a) Montrer que $\forall x > 1$, $g_n'(x) = \frac{n\ln x - \ln(nx)}{\ln x \ln(nx)}$ et dresser le tableau de variations de g_n.
   (b) Construire l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_2)$ courbe de g_2.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$. $(\mathcal{C}_f)$ désigne la courbe de f dans un repère O.N.

A) (a) Étudier le comportement de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.
   (b) Étudier f et tracer $(\mathcal{C}_f)$.

3) Soit $I = \int_0^1 f(x)\,dx$. Interprétation géométrique de I.

B) (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
   (b) Calculer $f^{-1}(x)$; $\forall x \in J$.
   (c) Construire $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$.

C) Soit $K = \int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^{-x})\,dx$.
   (a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $K = \ln 2 - \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1+e}{e}\right) - I$.

Exercice 9

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2 - (x+1)e^{-x}$$

   a) Étudier les variations de g.

   b) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x} + 2x$$

   On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ unité 2 cm.

   a) Déterminer

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

   et en donner une interprétation graphique.

   b) Calculer f' dérivée de f puis montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

   d) Montrer que la courbe (C) coupe l'axe (OX) des abscisses en un point unique d'abscisse α et que $-1.29 \leq \alpha \leq -1.28$.

   a) Déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

   puis interpréter graphiquement.

   b) Étudier le signe de $f(x) - 2x$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

   c) Déterminer le point A de la courbe C où la tangente (T) est parallèle à la droite D d'équation $y = 4x$. Donner une équation de cette tangente.

   a) Tracer la courbe C, la droite (D) et la tangente (T) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

   b) Discuter graphiquement suivant le paramètre m le nombre de solutions de l'équation $me^x - x - 2 = 0$.

   c) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera, et calculer

$$f^{-1}(e-2)$$

   d) Tracer la courbe C' courbe de la fonction f^{-1} dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

   a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale :

$$I = \int_0^1 (x+2)e^{-x}\, dx$$

   b) Calculer en cm^2 l'aire délimitée par la courbe C, la droite D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - x\ln x \quad \forall x > 0$$

$$f(0) = 0$$

et soit (T) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue en 0.
2. Calculer
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
et interpréter graphiquement.
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, puis interpréter graphiquement.
4. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
5. (a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (T) avec l'axe des abscisses.
   (b) Donner une équation de la tangente à (T) au point d'abscisse $x = e$.
6. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$.
   (a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
   (b) Montrer que $(g^{-1})'(0) = -1$, où g^{-1} est la réciproque de g.
   (c) Construire (T_g) la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (T_f) étant la courbe représentative de f.
7. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $2x - x\ln x = m$.
8. Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $A = \int_1^e x\ln x\, dx$.
   (a) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (T), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x - 2)) = 0$.

b) En déduire que la droite (A) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) puis étudier leur position relative.

c) Montrer que $f(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$ et que $\frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}$.

d) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement.

1. Justifier que $f'(x) = 1 - e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\beta < \alpha$. Puis vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$.
3. Justifier que $f'(\alpha) = \alpha - 1$.

a) Construire la courbe (C) et son asymptote (A) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 12

$$F(x) = \int_0^{e^x - e^{-x}} \sqrt{4 + t^2}\, dt \quad \text{où } x \in \mathbb{R}.$$

1)
a) Calculer $F(0)$.
b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et calculer $F'(x)$.
c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^x (e^t + e^{-t})^2 dt$.
2) Déterminer l'expression de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3) Soit $I = \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{4 + t^2}\, dt$ et $J = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{4+t^2}}\, dt$.
a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - e^{-x} = \frac{3}{2}$.
b) Exprimer I à l'aide de F et en déduire la valeur de I.
c) À l'aide d'une intégration par parties déterminer la valeur de J.

Exercice 13

Soit pour tout réel t tel que : $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$:

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\, dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\, dt \quad \text{où } k \in \mathbb{N}.$$

1. Établir l'inégalité suivante : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$.
2. Établir l'inégalité suivante : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, \quad I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k$.
4. Déduire des résultats précédents que :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{J_k}{I_k} = 0.$$

5. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $\quad I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1) I_{k-1}$.
6. En déduire que pour tout entier $k \geq 1$: $\quad \frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$.
7. En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 14

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ on pose $g_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{1-x}$. Soit Γ_n sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

1° Étudier les variations de g_n, suivant la parité de n.

2° Étudier la position relative de Γ_2 et Γ_3 puis les tracer dans un même repère.

3° Montrer que $\forall x \in [0,1]$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n!}$.

4° Soit $G_n(x) = \int_0^x g_n(t)\,dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $G_1(x)$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad G_n(x) = G_{n-1}(x) - \frac{x^n}{n!}e^{1-x}$.

c) En déduire que $G_n(x) = e - e^{1-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} G_n(x)$.

5° Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes Γ_2 et Γ_3 et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

6° On pose $J_n = \int_0^1 g_n(t)\,dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Prouver que $J_n = e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n!}$.

c) Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$.

d) Montrer que $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq e \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$.

e) À l'aide de la question (6°d), retrouver de nouveau $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$.

Exercice 15

Partie I

Soit la fonction définie par : $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f.

2. Étudier les variations de f ; puis en déduire le signe de f sur D_f.

Partie II

Soit la fonction g définie par $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

1. Déterminer D_g ; puis étudier les variations de g sur D_g.

2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.

3. En déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : (\frac{n+1}{e})^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

4. Soit $a \in \mathbb{R}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$.

Partie III

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n(x) = -e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$.

1. Déterminer la dérivée de h_n.

2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall a > 0 : \left|1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} - e^a\right| \leq e^a \cdot \frac{a^{n+1}}{n!}.$$

3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$.

Partie IV

Le but de cette partie est de montrer que le nombre e est irrationnel.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}.$$

   Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est e

2. Montrer que $\forall q \in \mathbb{N}^*, u_q < e < v_q$.

3. En utilisant l'inégalité précédente, montrer que e est irrationnel.

Exercice 16

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(0) = 0$ et si $x > 0$

$$f_n(x) = x(\ln x)^n.$$

1°

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0.
b) Étudier les variations de f_n. (Discuter selon la parité de n)

2°

a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique α_n dans $]1, +\infty[$ et montrer que $1 < \alpha_n < e$.
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) = 1 - \ln \alpha_n$. En déduire que la suite (α_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

3° Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n = \sqrt[n]{\alpha_n}$. Montrer que $t_n \ln t_n = \frac{1}{n}$.

4°

a) En étudiant les variations des fonctions $u : x \mapsto x \ln x - (x-1)$ et $v : x \mapsto x \ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, montrer que $\forall x \geq 1 \quad x - 1 \leq x \ln x \leq \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.
b) En déduire que $\forall x \geq 1 \quad \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \leq t_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ puis montrer que $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \alpha_n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
c) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = e$.

Exercice 17

Partie A : Dans tout ce paragraphe, x désigne un nombre réel et t une variable réelle.

1. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que l'on a :

$$\int_0^x te^t\,dt = xe^x - \int_0^x e^t\,dt.$$

   En déduire, par un calcul de l'intégrale $\int_0^x (x-t)e^t\,dt$, que :

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t\,dt.$$

2. On considère l'intégrale

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,dt, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

   (a) Démontrer l'égalité :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t\,dt.$$

   (b) Démontrer, par récurrence sur n, la formule :

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,dt.$$

3. On pose $\varepsilon_n = \frac{1}{x^n}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,dt$. Montrer que

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon_n = 0.$$

Partie B

1. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, on pose $H = ae + b + ce^{-1}$. On définit également :
   - $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,
   - $I = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$,
   - $J = \int_{-1}^0 (1+t)^n e^t\,dt$.

2. Dans les deux premières questions, on suppose $|a| + |c| \neq 0$.

   (a) Montrer que :

$$n!H = n![aP_n(1) + b + cP_n(-1)] + aI + (-1)^{n+1}cJ.$$

   (b) Montrer que :

$$\frac{1}{n+1} \leq I \leq \frac{e}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e(n+1)} \leq J \leq \frac{1}{n+1}.$$

   En déduire la limite de $h(n) = aI + (-1)^{n+1}cJ$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Soit $Q_n = n!H - h(n)$. Montrer qu'il existe deux entiers rationnels k et k' tels que :
$$n!P_n(1) = 1 + kn \quad \text{et} \quad n!P_n(-1) = (-1)^n + k'n.$$
En déduire que Q_n est, pour tout entier n, un entier, et que le nombre $Q_n - [a + (-1)^n c]$ est un multiple de n.
   (a) Prouver que, si $H = 0$, alors a, b, et c sont nuls.
   (b) En déduire qu'il n'existe aucune équation du second degré à coefficients rationnels dont une racine soit e.

Exercice 18

A/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction h_n définie sur $]0, +\infty[$ par $h_n(x) = x^n \ln x$.

1. Montrer que h_n admet un prolongement par continuité en 0.
2. On considère la fonction g_n définie sur $[0, +\infty[$ par $g_n(0) = 0$ et $g_n(x) = x^n \ln x$, si $x > 0$
   (a) Étudier les variations de g_n.
   (b) Étudier les positions relatives de deux courbes (C_n) et (C_p) où $1 \leq n < p$.
   (c) Montrer que l'équation $g_n(x) = 1$ admet une solution unique x_n et que $x_n > 1$.
   (d) Démontrer que la suite (x_n) est décroissante.
   (e) On pose $t_n = (x_n)^n$. Montrer que $t_n(\ln t_n) = n$.
   (f) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $1 \leq t_n \leq n + 1$ et en déduire un encadrement de x_n.
   (g) Démontrer que la suite de terme général x_n admet une limite que l'on précisera.

B/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{x^n \ln x}{1+x^2}$ si $x \in]0, 1]$ et $f_n(0) = 0$.
Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$

1. Justifier l'existence de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On considère la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = -x \ln x$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$. Montrer que $\varphi(x) \leq \frac{1}{e}$ pour tout $x \in [0, 1]$.
3. En déduire que $|U_n| \leq \frac{1}{ne}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 19

À tout entier naturel $n \geq 1$, on associe la fonction numérique f_n définie sur $I = [1, +\infty[$ par :
$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{(\ln x)^n}{x^2} \right).$$
On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A)

1. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$. Étudier les variations de f_1.
2. Tracer C_1 et sa tangente au point d'abscisse 1.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour $x \in I$, $I_n(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt$.

B)

1. En remarquant que $\left(\frac{(\ln x)^n}{x^2}\right) = \left(\frac{\ln x}{x^{2/n}}\right)^n$, déterminer la limite de f_n.

2. a. Calculer $f_n'(x)$ et vérifier que $f_n'\left(e^{n/2}\right) = 0$. Donner le tableau de variation de f_n.

b. Vérifier que la valeur maximale de f_n sur I est $y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

3. a. Soit $x \in I$, déterminer suivant les valeurs de x, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$. Préciser les positions relatives de C_2 et C_1.

b. Déterminer la tangente à C_2 au point d'abscisse 1. Tracer la courbe C_2 et sa tangente au point d'abscisse 1 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. On se propose d'étudier la suite $(y_n)_{n\geq 1}$.

a. Calculer pour $x > 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}.$$

b. Montrer que $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{(n+1)/2}\right)$ et que $y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n$.

c. En déduire que $y_n \leq \frac{1}{2^n \cdot e}$. Quelle est la limite de la suite $(y_n)_{n\geq 1}$?

Exercice 20

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \ln x - \frac{1}{3}, \quad x > 0$$

1) Étudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$; calculer en utilisant une intégration par parties

$$I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(t)\,dt.$$

Calculer $\lim_{\lambda\to 0^+} I(\lambda)$ et l'interpréter géométriquement.

3) On considère $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^{1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

4) Pour tout $n \geq 2$; on pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$ en déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{4}$.

5) On se propose d'utiliser les résultats précédents pour calculer la limite de la suite (u_n), de terme général $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ où $n \geq 2$.

a) Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

et Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right).$$

b) En déduire que

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \frac{1}{12n^4}\left[n^2(n+1)^2\right] - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{1}{3}.$$

c) Déduire de ce qui précède

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \, puis \lim_{n\to+\infty} u_n.$$