Exercice 1

On considère l'équation $(E) : 109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) **Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on conclure pour l'équation (E) ?**

b) **Donner une solution particulière de (E). Déterminer alors l'ensemble des solutions de (E).**

c) **En déduire qu'il existe un unique entier naturel d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel e tels que $109d = 1 + 226e$. On précisera les valeurs de d et e.**

2° Montrer que 227 est premier.
3° On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g définies de A dans A de la manière suivante :

$$f(a) = r \quad \text{où } r \text{ est le reste de la division euclidienne de } a^{109} \text{ par } 227$$

et

$$g(a) = r' \quad \text{où } r' \text{ est le reste de la division euclidienne de } a^{141} \text{ par } 227.$$

a) **Vérifier que $g(f(0)) = 0$.**

b) **Justifier que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$.**

c) **En déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g(f(a)) = a$.**
Que peut-on dire de $f(g(a))$?

Exercice 2

Soit p, q deux entiers naturels premiers et r un entier naturel premier avec p et avec q.

1° a) **Montrer que p divise $r^{p-1} - 1$ et que q divise $r^{q-1} - 1$.**
b) **Montrer que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.**
c) **En déduire que pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.**

2° Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3[221]$.
On remarquera que $221 = 13 \times 17$.

Exercice 3

Partie 1 : On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 29x - 13y = 6$

a) **Justifier que l'équation admet des solutions entières.**

b) **Vérifier que $(2, 4)$ est une solution de (E) puis résoudre (E).**

Partie 2 : On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E') : x^{19} \equiv -2 \pmod{29}$

a) **Justifier que $2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$, puis en déduire que -8 est une solution de (E').**

b) **Soit x_0 une solution de (E'). Justifier que $x_0^{28} \equiv 1 \pmod{29}$.**

c) **Montrer que $x_0^{57} \equiv -8 \pmod{29}$ puis que $x_0 \equiv -8 \pmod{29}$.**

d) **En déduire l'ensemble des solutions de (E').**

Partie 3 : Soit A la solution de (E') la plus proche de 2021 telle que $n \geq 2$ soit un entier naturel. On suppose que A s'écrit $abcde$ dans le système de base n, où a, b, c, d, e représentent des chiffres distincts de ce système. Justifier que n ne peut être ni supérieur à 6 ni inférieur à 5. Déterminer n et préciser l'écriture de A dans ce système.

Exercice 4

1. **Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 5u - 53v = 24$.**
   (a) **Vérifier que $(26, 2)$ est une solution de (E).**
   (b) **Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).**
2. **Soit $x \in \mathbb{Z}$.**
   (a) **Déterminer les restes modulo 5 de $x^2 - x$.**
   (b) **Montrer que $(x-27)^2 \equiv x^2 - x - 13 \pmod{53}$.**
3. **On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) :**

$$\begin{cases} x^2 - x \equiv 1 \pmod{5} \\ x^2 - x \equiv 13 \pmod{53} \end{cases}$$

   (a) **Montrer que x est une solution de (S) si et seulement si, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que**

$$\begin{cases} x = 3 + 5u \\ x = 27 + 53v. \end{cases}$$

   (b) **Déterminer les solutions du système (S).**
4. **Déterminer dans $\mathbb{Z}$ les solutions de l'équation $x^2 - x - 66 \equiv 0 \pmod{265}$.**

Exercice 5

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, on considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = 2 - \frac{2}{z}$.

1. **Déterminer l'ensemble des points invariants par f.**
2. **Soit $A(1+i)$ et $B(1-i)$. Montrer que**

$$\frac{\overline{\textbf{MA}}}{\overline{\textbf{MB}}} = \frac{\overline{\textbf{M'A}}}{\overline{\textbf{M'B}}}.$$

3. **Soit (M_n) la suite de points définie par $M_0(i)$ et $M_{n+1} = f(M_n)$.**
   (a) **Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3.**
   (b) **Soit I le barycentre du système $(A, 5), (B, -1)$ et (X_n) la suite définie par $X_n = IM_n$. Montrer que (X_n) est constante.**

Exercice 6

1. (a) **Déterminer le reste de la division euclidienne de 2015 par 11.**
   (b) **Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{10} par 11.**
   (c) **Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{2015} + 2015$ par 11.**
2. **On désigne par p un entier naturel. On considère pour tout n le nombre $A_n = 2^n + p$. On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.**
   (a) **Montrer que d_n divise 2^n.**
   (b) **Déterminer la parité de A_n et d_n en fonction de celle de p.**

Exercice 7

Étant donnée la matrice carrée d'ordre deux :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{où } a \in \mathbb{R}.$$

1. **Calculer A^2, A^3 et A^4.**
2. **Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.**
3. **Montrer que :**
$$A^{p+1} = \frac{1}{2p+1}\left(A + A^2 + \cdots + A^{2p+1}\right) \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 8

p est un nombre premier supérieur ou égal à 7. Le but de cet exercice est de montrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240 puis d'appliquer ce résultat.

1. **Peut-on avoir $p \equiv 0 \pmod 3$? En analysant les autres cas modulo 3, démontrer que n est divisible par 3.**
2. **En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que :**
$$p^2 - 1 = 4k(k+1)$$
En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 8 puis que n n'est divisible par 16.
3. **En raisonnant comme à la question 1) modulo 5, démontrer que 5 divise n.**
4. **Déduire des questions précédentes que 240 divise n.**
5. **Existe-t-il 15 nombres premiers $(p_1, p_2, \ldots, p_{15})$, supérieurs à 7, tels que l'entier**
$$A = p_1^4 + p_2^4 + \cdots + p_{15}^4$$
soit un nombre premier ?

Exercice 9

Soit a et b deux entiers relatifs premiers entre eux. On pose : $N = a^4 + b^4$.

1. **Montrer que :**
$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad n^4 \equiv 0 \pmod{16} \quad \textbf{ou} \quad n^4 \equiv 1 \pmod{16}.$$
2. **En déduire que :**
$$N \equiv 1 \pmod{16} \quad \textbf{ou} \quad N \equiv 2 \pmod{16}.$$
3. **Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$ et p/N :**
   (a) **Montrer que $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.**
   (b) **Montrer que :**
   $$(\exists c \in \mathbb{Z}) \quad ac \equiv -1 \pmod p,$$
   puis en déduire que :
   $$(\exists x \in \mathbb{Z}) \quad x^4 \equiv -1 \pmod p.$$
   (c) **Soit r le reste de la division euclidienne de p par 8 :**
      i. **Montrer que :**
      $$x^{r-1} \equiv 1 \pmod p.$$
      ii. **Montrer que :**
      $$r = 1.$$