Efyal El Mustaghbal **Classes 7^{e}C – 2023/2024**

Évaluation spéciale (9 Juin 2024) _ Durée : 4 heures

Mathématiques

Exercice 1

On considère le système $(\mathbf{S})$ suivant : $\begin{cases} \mathbf{t} \equiv -4 & [\mathbf{mod}.\,19] \\ \mathbf{t} \equiv 4 & [\mathbf{mod}.\,17] \end{cases}$, où l'inconnue $\mathbf{t}$ est un entier relatif.

1) On se propose, dans cette question, de résoudre le système $(\mathbf{S})$.

a) Vérifier que $\mathbf{2010}$ est une solution du système $(\mathbf{S})$.

b) Soit $\mathbf{t}$ une solution de $(\mathbf{S})$.
Montrer que $\mathbf{t = 19x - 4 = 17y + 4}$ où $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $(\mathbf{E})$: $\mathbf{19x - 17y = 8}$.

c) Vérifier que $(\mathbf{4}; \mathbf{4})$ est une solution particulière de $(\mathbf{E})$. Résoudre alors $(\mathbf{E})$.

d) En déduire que les solutions du système $(\mathbf{S})$ sont les entiers relatifs $\mathbf{t}$ de la forme $\mathbf{t = 323k + 72}$ où $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}$.

2) Soit t une solution du système $(\mathbf{S})$.

a) Reproduire et compléter le tableau de congruence suivant :

	$\mathbf{t}$	$\mathbf{t^2}$	$\mathbf{t^3}$	$\mathbf{t^9}$	$\mathbf{t^{18}}$	$\mathbf{t^{36}}$
Modulo $\mathbf{19}$	$\mathbf{-4}$					
Modulo $\mathbf{17}$	$\mathbf{4}$					

b) En déduire que $\mathbf{t^{36} \equiv 1}$ $[\mathbf{mod}.\,\mathbf{323}]$.

c) Vérifier que $\mathbf{t^{30} \equiv 7}$ $[\mathbf{mod}.\,\mathbf{19}]$ et $\mathbf{t^{30} \equiv -1}$ $[\mathbf{mod}.\,\mathbf{17}]$.

d) En déduire que $\mathbf{t^{30} + 69 \equiv 0}$ $[\mathbf{mod}.\,\mathbf{323}]$.

e) Déterminer alors le reste de la division euclidienne de $\mathbf{2010^{2010}}$ par $\mathbf{323}$.

Exercice 2

Dans le plan complexe $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$, on donne le cercle $(\mathbf{\Gamma})$ de centre $\mathbf{O}$ et de rayon $\sqrt{\mathbf{2}}$. On note $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ les points d'affixes respectives $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}\sqrt{\mathbf{2}}$ et $-\mathbf{i}\sqrt{\mathbf{2}}$. Soit $\mathbf{Q}$ un point de $(\mathbf{\Gamma})$ d'affixe un nombre complexe $\mathbf{a}$, distinct de $\mathbf{i}\sqrt{\mathbf{2}}$ et $-\mathbf{i}\sqrt{\mathbf{2}}$.

1) On désigne par $\mathbf{R}$ le point d'affixe $\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}}$.

a) Vérifier que $\mathbf{R} \in (\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}})$. Construire $\mathbf{R}$.

b) Déterminer les nombres complexes $\mathbf{a}$ pour lesquels les points $\mathbf{O}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}$ sont alignés.

2) Soit $\mathbf{P}$ le point d'affixe $\mathbf{ia}$ et $\mathbf{M}$ un point d'affixe $\mathbf{z}$ non nul.

a) Justifier que $\mathbf{P}$ est l'image de $\mathbf{Q}$ par une rotation que l'on précisera. Construire $\mathbf{P}$.

b) Montrer que : $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{M}$ alignés $\Leftrightarrow$ $(\mathbf{i}\overline{\mathbf{a}} + \mathbf{1})\mathbf{z} + (\mathbf{ia} - \mathbf{1})\overline{\mathbf{z}} = \mathbf{i}(\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}})$.

c) Montrer que : $(\mathbf{AP}) \perp (\mathbf{OM})$ $\Leftrightarrow$ $(\mathbf{i}\overline{\mathbf{a}} + \mathbf{1})\mathbf{z} - (\mathbf{ia} - \mathbf{1})\overline{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$.

d) Soit $\mathbf{H}$ le projeté orthogonal de $\mathbf{O}$ sur $(\mathbf{AP})$ et $\mathbf{Z_H}$ son affixe. Justifier que :

$$\mathbf{Z_H} = \frac{\mathbf{i}(\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}})}{\mathbf{2}(\mathbf{i}\overline{\mathbf{a}} + \mathbf{1})}$$

3) Soit $\mathbf{N}$ le point d'affixe :

$$\mathbf{Z_N} = \frac{\mathbf{a} + \overline{\mathbf{a}}}{\mathbf{i}\overline{\mathbf{a}} + \mathbf{1}}$$

a) Vérifier que $\mathbf{N}$ est l'image de $\mathbf{H}$ par une similitude que l'on précisera.

b) Construire le point $\mathbf{N}$.

c) Déterminer le lieu du point $\mathbf{N}$ lorsque $\mathbf{Q}$ varie sur le cercle $(\mathbf{\Gamma})$ privé des points $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$.

Exercice 3

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$\mathbf{f(x)} = \frac{1}{x[1 + (\ln x)^2]}$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

Partie A.

1) On considère la fonction $\mathbf{F}$ définie sur $\left]-\pi/2; \pi/2\right[$ par :

$$F(x) = \int_1^{e^{\tan x}} f(t)\, dt$$

a) Justifier l'existence de $\mathbf{F}$.

b) Montrer que $\mathbf{F}$ est dérivable sur $\left]-\pi/2; \pi/2\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

c) En déduire que pour tout réel $x \in \left]-\pi/2; \pi/2\right[$, on a : $F(x) = x$.

2) **a)** Montrer que :

$$\int_1^e f(t)\, dt = \frac{\pi}{4}$$

b) Calculer, en cm^2, l'aire $\mathbf{A}$ de la région du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = 1/e$, $x = e$ et $y = 0$.

Partie B.

On considère la suite numérique $\mathbf{u}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Soit $\mathbf{x}$ un réel strictement positif donné. On pose pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$:

$$S_n(x) = \frac{1}{x}\left[1 \quad - (\ln x)^2 \quad + (\ln x)^4 \quad + \cdots + (-1)^n (\ln x)^{2n}\right]$$

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$:

$$S_n(x) = f(x) + (-1)^n \frac{(\ln x)^{2n+2}}{x[1 + (\ln x)^2]}$$

2) **a)** Soit $\mathbf{k}$ un entier naturel non nul. Calculer :

$$\int_1^e \frac{1}{x} (\ln x)^{2k}\, dx$$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$ on a :

$$u_n = \frac{\pi}{4} + R_n(x) \qquad \text{où} \qquad R_n(x) = (-1)^n \int_1^e \frac{(\ln x)^{2n+2}}{x[1 + (\ln x)^2]}\, dt$$

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}$$

d) En déduire que la suite $\mathbf{u}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4

Partie A. Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement ces limites.

2) **a)** Montrer que pour tout $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$ et tracer $(\mathcal{C})$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $]1; +\infty[$ une unique solution β et que $\beta < e$.

Partie B.

1) Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $\mathbf{x} > 1$, on pose :

$$\mathbf{F(x)} = \int_{\beta}^{x} (\mathbf{f(t)})^{n}\,\mathbf{dt} \quad \text{et} \quad \mathbf{H(x)} = \int_{\ln\beta}^{\ln x} \frac{e^t}{t^n}\,\mathbf{dt}$$

a) Montrer que $\mathbf{H}$ est dérivable sur $]\mathbf{1}; +\infty[$ et calculer $\mathbf{H'(x)}$.

b) En déduire que pour tout réel $\mathbf{x} > 1$, on a : $\mathbf{H(x)} = \mathbf{F(x)}$.

2) On pose pour tout entier $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$:

$$\mathbf{U_n} = \int_{\beta}^{e} (\mathbf{f(t)})^{n}\,\mathbf{dt}$$

a) Vérifier que pour tout entier $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$:

$$\mathbf{U_n} = \int_{\ln\beta}^{1} \frac{e^t}{t^n}\,\mathbf{dt}$$

b) En déduire que pour tout entier $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$:

$$\frac{\beta^n - \beta}{n-1} \leq \mathbf{U_n} \leq \frac{e}{n-1}(\beta^{n-1} - 1)$$

c) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta^n}{n} = +\infty$$

puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{U_n}$.

d) Calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{\beta^n}$$

3) Pour tout entier $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$, on pose :

$$\mathbf{S_n} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{k} - \mathbf{2})\mathbf{U_k}$$

a) En intégrant par parties, montrer que pour tout entier $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$: $\mathbf{U_n} = \mathbf{e} - \beta^{n+1} + \mathbf{nU_{n+1}}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$:

$$\mathbf{S_n} = \frac{\beta^{n+1} - \beta^2}{\beta - 1} + (\mathbf{1} - \mathbf{n})\mathbf{e} - \mathbf{U_n}$$

c) Déterminer alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\beta^n}$$

Bonne chance