4ème évaluation (Mai 2024)

Mathématiques

Exercice 1

Les questions **1**, **2**, **3**, **4** et **5** sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit x et y deux entiers naturels tels que : $x \equiv 2\ [5]$ et $y \equiv 3\ [5]$.
Déterminer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des nombres suivants :
$$A = x^2 + 3y \quad ; \qquad B = 2x^3 - y^2 \quad ; \qquad C = 3x^2 - 2y^3$$

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ chacune des équations diophantiennes :
$$① \ 253x - 165y = 22 \quad ; \qquad ② \ 20x + 8y = 7$$

3. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ vérifiant $N = 9a + 1$ et $N = 5b + 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 45.

4. Déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels tels que :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8\,884 \\ \mathrm{PPCM}(x;\,y) = 1260 \end{cases}$$

5. Déterminer tous les entiers naturels x tels que : $x^{19} + 3x \equiv 2\ [7]$.

Exercice 2

Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 + (1 - 2i)e^2 - (5 + 3i)z + 4 - 8i$.

1. Calculer $P(i)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Dans le plan complexe $(O;\,\vec{u},\vec{v})$, on note A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$.

a. Placer les points A, B et C puis déterminer la nature du triangle ABC.

b. Déterminer l'affixe z_G du barycentre G du système $\{(A;9),(B;-2),(C;6)\}$ puis placer G.

c. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que :
$$9MA^2 - 2MB^2 + 6MC^2 = 195.$$

d. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que :
$$3MA^2 - 5MB^2 + 2MC^2 = 65.$$

e. Préciser la position relative des deux ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

3. Soit f la transformation plane d'écriture complexe $z' = mz + (2 - 2m)i$, où $m \in \mathbb{Z}$.

a. Résoudre l'équation $z' = z$ (on discutera suivant les valeurs du paramètre m).

b. Déterminer la valeur de m pour laquelle $f(B) = A$, puis caractériser f dans ce cas.

Exercice 3

1. Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x(1 + \ln x) - 2\ln x$.

a. Calculer $g'(x)$.

b. Montrer que $g'(x) > 0$ pour $x > 1$ et $g'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$.

c. Dresser le tableau de variation de g. En déduire que pour tout $x > 0$, on a $g(x) \geq 1$.

2. Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

a. Calculer les limites de f aux bornes de $]0,+\infty[$.

b. Montrer que $f'(x) = g(x)/x$ et dresser le tableau de variation de f.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $\beta \in\,]0,+\infty[$. On admet $0 < \beta < 1/2$.

d. Écrire l'équation de la tangente T à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse $x_0 = 1$.

e. Déterminer les points de $(\mathcal{C})$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite $(\mathbf{D})$: $\mathbf{y = x}$.

3. a. Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathbf{h}$ définie par : $\mathbf{h(x) = x - 1 - \ln x}$.
En déduire le signe de $\mathbf{h(x)}$.

b. Montrer que $\mathbf{f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)}$ puis préciser les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et $\mathbf{T}$.

4. a. Calculer $\lim_{x\to+\infty}[f(x)/x]$ et en donner une interprétation graphique.

b. Tracer $(\mathcal{C})$ et $\mathbf{T}$.

5. a. En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_1^e x \ln x \, dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

b. En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathbf{D})$ et les droites d'équations $\mathbf{x = 1}$, $\mathbf{x = e}$.

Exercice 4

On considère la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{f(x) = (2 - x)e^x}$ et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty\,.$$

b. Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$.

a. Établir l'équation réduite de la tangente à $(\mathcal{C})$ en son point $\mathbf{A}$ d'abscisse $\mathbf{0}$. Vérifier que $\mathbf{A}$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C})$.

b. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

c. Vérifier que la fonction $\mathbf{f}$ est solution de l'équation différentielle $\mathbf{y = 2y' - y''}$, puis calculer l'aire du domaine plan délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $\mathbf{x = 2}$.

2. On définit la suite numérique $(\mathbf{U_n})$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{2^n}{n!}$$

a. Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \qquad 0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$$

b. En déduire que :

$$\forall n \geq 2, \qquad 0 \leq U_n \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

Donner la limite de $\mathbf{U_n}$ lorsque $\mathbf{n}$ tend vers $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 1}$, on pose :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^2 (2 - x)^n e^x \, dx \ ; \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}$$

a. Justifier que $\mathbf{I_1 = e^2 - 3}$ et en donner une interprétation géométrique.

b. Montrer que : $\forall n \geq 1,\ 0 \leq I_n \leq (e^2 - 1)U_n$, puis donner la limite de $\mathbf{I_n}$ quand $\mathbf{n}$ tend vers $+\infty$.

c. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathbf{I_{n+1} = I_n - U_{n+1}}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$, $\mathbf{e^2 = S_n + I_n}$, puis en déduire la limite de $\mathbf{S_n}$ lorsque $\mathbf{n}$ tend vers $+\infty$.

Bonne chance