Évaluation 5 (mai 2024)

Épreuve de mathématiques – Durée : 4 heures

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(\mathbf{E})$: $3x - 2y = 1$.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Montrer que le couple $(14n + 3; 21n + 4)$ est solution de $(\mathbf{E})$.
   b. En déduire que $\mathrm{PGCD}(14n + 3; 21n + 4) = 1$.
3. On pose $\mathrm{PGCD}(2n + 1; 21n + 4) = d$.
   a. Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.
   b. Montrer l'équivalence : $n \equiv 6\ [\mathrm{mod}.13] \iff d = 13$.
4. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.
   a. Montrer que A et B sont divisibles par $n - 1$.
   b. Déterminer le PGCD de A et B en fonction de n.

Exercice 2

Dans le plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(z_A = -2 - i)$ et $B(z_B = -1 - 3i)$.

1. On considère l'équation $(\mathbf{E})$: $z^2 - (2m + 2 + i)z + 2m^2 + (5 + 5i)m - 1 + 7i = 0$ d'inconnue complexe z, où m est un paramètre complexe.
   a. Montrer que l'on a : $\forall T \in \mathbb{C}, -4T^2 - (12 + 16i)T + 7 - 24i = (2iT - 4 + 3i)^2$.
   b. Résoudre l'équation $(\mathbf{E})$.
2. Soient S_1 et S_2 les transformations du plan définies par :
   $$S_1 : M(m) \mapsto M_1(z_1 = (1 + i)m - 1 + 2i) \quad \text{et} \quad S_2 : M(m) \mapsto M_2(z_2 = (1 - i)m + 3 - i)$$
   a. Préciser la nature de S_1 et S_2 et donner leurs éléments caractéristiques.
   b. Montrer que $S_1 \circ S_2$ est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre C.
   c. Justifier que la transformation R telle que $R(M_1) = M_2$, pour tout point $M(m)$, est une rotation dont on déterminera une mesure de l'angle et le centre D.
   d. Placer les points A, B, C et D, puis préciser la nature du triangle ABD.
3. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de foyers A et B et dont D en est un sommet.
   a. Déterminer le centre I de $\mathcal{E}$ et justifier que le grand axe vaut $\sqrt{10}$.
   b. Donner l'équation de $\mathcal{E}$ après avoir précisé le repère
   c. Construire $\mathcal{E}$ après avoir placé ses sommets.

Exercice 3

1. Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :
   $$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$
   et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentativedans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   a. Calculer les limites de $f(x)$ en 1^+ et en $+\infty$.
   b. Calculer la dérivée $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
   c. Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :
   $$I_n = \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{(\ln x)^n}$$
   a. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?
   b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{e^2(e-1)}{3^n} \leq I_n \leq \frac{e^2(e-1)}{2^n}$$

En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On considère la somme S_n définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-2) I_k$$

a. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \geq 1, \qquad nI_{n+1} - I_n = \frac{e^2}{2^n} - \frac{e^3}{3^n}$$

b. En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \qquad S_n + I_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{e^2}{2^k} - \frac{e^3}{3^k} \right)$$

c. Justifier que :

$$\forall n \geq 1, \qquad e^2 \left(1 - \frac{e}{2} - \frac{e+1}{2^n} + \frac{e}{2 \times 3^{n-1}} \right) \leq S_n \leq e^2 \left(1 - \frac{e}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{e+2}{2 \times 3^n} \right)$$

d. En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)e^x$ et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. **a.** Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \ ; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ ; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \, .$$

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Établir l'équation réduite de la tangente à $(\mathcal{C})$ en son point A d'abscisse 0. Vérifier que A est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C})$.

d. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

e. Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y = 2y' - y''$, puis calculer l'aire du domaine plan délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 2$.

2. On définit la suite numérique (U_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ U_n = \frac{2^n}{n!}$$

a. Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \qquad 0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{2}{3}$$

b. En déduire que :

$$\forall n \geq 2, \qquad 0 \leq U_n \leq 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-2}$$

Donner la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^2 (2-x)^n e^x \, dx \ ; \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}$$

a. Justifier que $I_1 = e^2 - 3$ et en donner une interprétation géométrique.

b. Montrer que : $\forall n \geq 1, \ 0 \leq I_n \leq (e^2 - 1) U_n$, puis donner la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.

c. En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $e^2 = S_n + I_n$, puis en déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin