Lycée Menabi El Ouloum – 7^e C/13

Exercice 1

1. Démontrer que, si les entiers p et q sont premiers entre eux, alors pour tout entier naturel n, les entiers p et q^n sont aussi premiers entre eux.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ des entiers relatifs tels que $a_n \neq 0$.On considère l'équation algébrique de degré n : (E) $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.
   a. On suppose que (E) admet une solution rationnelle, pouvant donc s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible p/q. En appliquant le théorème de Gauss, démontrer que p divise a_0 et que q divise a_n.
   b. Énoncer alors un critère permettant de connaître les fractions qui peuvent être solutions d'une équation polynomiale, à coefficients entiers, donnée. Ce critère est appelé critère d'**Eisenstein** (1823-1852).
3. En utilisant le critère d'Eisenstein, résoudre l'équation : $4x^3 - 7x^2 - 12x + 21 = 0$.
4. On note $\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$.
   a. Exprimer, pour tout réel x, sin(3x) en fonction de sin(x).
   b. En déduire que α est solution de l'équation : (E) $4x^3 - 3x + \frac{1}{2} = 0$.
   c. En utilisant le critère d'Eisenstein, démontrer que α est irrationnel.

Exercice 2

Soit l'application f: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z) = z + j^2.\overline{z}$ où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer $f(i), f(j), f(i+j)$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ j^2.f(z) \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)|^2 - 2|z|^2 = 2\mathrm{Re}(jz^2)$.
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
   Déterminer les deux ensembles : $(E_1) = \{M(z)/f(z) = 0\}$ et $(E_2) = \{M'(f(z))/z \in \mathbb{C}\}$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = j$.
6. On pose $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.
   a. Déterminer f^2, f^3 et f^4.
   b. En déduire l'expression de $f^n(z)$ en fonction de n, z et j.
7. Soit a, b et c trois nombres complexes.
   a. Vérifier que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)\left(a + b\overline{j} + cj\right)\left(a + bj + c\overline{j}\right)$.
   b. Soit ABC un triangle et a, b et c les affixes de A, B et C.Montrer l'équivalence :
   $$\left\{\begin{array}{c}\text{ABC équilatéral}\\ \text{ou}\\ \text{de centre de gravité O}\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$
   c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 - 3iz + 1 - i = 0$.

Exercice 3

On considère une parabole $\mathcal{P}$, de foyer F et de directrice (D).
Soit Δ une droite passant par F rencontrant $\mathcal{P}$ en M_1 et M_2.

1. Soit T_1 la tangente en M_1 à $\mathcal{P}$ et T_2 la tangente en M_2 à $\mathcal{P}$. Montrer que T_1 est perpendiculaire à T_2.
2. Montrer que T_1 et T_2 se coupent en un point I appartenant à la directrice (D).
3. Montrer que F est le projeté orthogonal de I sur Δ.

Prof. Sidi MAJOR