Professeur : **Abdelwahed**

L'année Scolaire : 2023-2024

Lycée qualifiant 1

La Continuité d'une fonction numérique

2BAC PC-SVT BIOF

MOUAD

La continuité en un point

f est continue en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

La continuité à droite et à gauche

- f est continue à droite en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- f est continue à gauche en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$
- f est continue en $a \Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche en a.

La continuité sur un intervalle

Régle (1)

- f est continue sur un intervalle ouvert $]a;b[$ si f est continue en tout point de $]a;b[$
- f est continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ si f est continue sur $]a;b[$ et f est continue à droite en a et à gauche en b.

Régle (2)

Soit u et v deux fonctions continues sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$ alors ona:

1) Les fonctions $u+v$; $u \times v$ et ku sont continues sur l'intervalle I.
2) Si ona $(\forall x \in I)\ v(x) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont continues sur l'intervalle I.

Régle (3)

1) Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
2) Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son ensemble definition.
3) Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.
4) La fonction tan est continue sur chaque intervalle de son ensemble definition $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$

La continuité d'un composé de deux fonctions

Régle (1)

Si u est continue sur I et v est continue sur J tel que $u(I) \subset J$ alors vou est continue sur I

Régle (2)

1) Si u est continue et positive sur l'intervalle I alors la fonction $\sqrt{u}$ est continue sur I.
2) Si u est continue sur I alors u^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ est continue sur I.

L'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Régle (1)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ ona:

$$f([a;b]) = [m;M]$$

tel que: m est la valeur minimale de f sur $[a;b]$ et M est la valeur maximale de f sur $[a;b]$

Régle (2)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ona:

L'intervalle I	l'image $f(I)$: f est strictement croissante sur I	l'image $f(I)$: f est strictement décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); f(b)\right]$	$\left[f(b); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a); \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x); f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x); \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x); f(b)\right]$	$\left[f(b); \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x); \lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x); \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x); \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x); \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Régle (1)

Si:

- f est continue sur un intervalle $[a;b]$.
- $f(a)\times f(b)<0$.

Alors l'équation $f(x)=0$ admet <u>au moins</u> une solution α sur l'intervalle $[a;b]$.

Régle (2)

Si:

- f est continue sur un intervalle $[a;b]$.
- f est strictement monotone sur $[a;b]$
- $f(a)\times f(b)<0$.

Alors l'équation $f(x)=0$ admet une <u>solution unique</u> α sur l'intervalle $[a;b]$.

Régle (3)

Si:

- f est continue sur un intervalle I .
- f est strictement monotone sur I
- $0\in f(I)$.

Alors l'équation $f(x)=0$ admet une <u>solution unique</u> α sur l'intervalle I.

Méthode de dichotomie

Sachant que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α tel que $a<\alpha<b$,pour <u>déterminer un encadrement de α d'mplitude $r=b-a$</u> on suit les étapes suivantes :

1)On determine $c=\dfrac{a+b}{2}$ le centre de $]a;b[$

2)On calcul $f(c)$.

3)

- Si $f(c)\times f(b)<0$ alors $c<\alpha<b$.
- Si $f(c)\times f(b)>0$ alors $a<\alpha<c$

On procède de la même manière jusqu'à ce qu'on trouve l'encadrement d'amplitude r demandée.

La fonction réciproque

Régle (1)

Si:

- f est continue sur l'intervalle I.
- f est strictement monotone sur l'intervalle I.

Alors <u>f admet une fonction réciproque f^{-1}</u> définie sur un intervalle $J=f(I)$.

Régle (2)

Pour déterminer l'expression $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$
On applique l'équivalence suivant:
Soit $x\in J$ et $y\in I$ ona: $f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow f(y)=x$

Régle (3)

1) La fonction f^{-1} est continue sur $J=f(I)$.
2) La fonction f^{-1} est la même monotonie sur J que celui de f sur I.
3) Les courbes (C_f) et $\left(C_{f^{-1}}\right)$ sont symétriques par rapport la droite d'équation $y=x$.

La fonction racine iéme-puissance rationnelle

Régle (1)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ ona les propriétès suivantes:

1) $(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^+)$: $x=y^n\Leftrightarrow y=\sqrt[n]{x}$
2) $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$: $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$
3) $(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^+)$: $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x=y$
4) $(\forall x\in\mathbb{R}^+)(\forall y\in\mathbb{R}^+)$: $\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\Leftrightarrow x<y$
5) La fonction $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

Régle (2)

Soient $a\in\mathbb{R}^{*+}$; $b\in\mathbb{R}^{*+}$; $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$ ona:

1) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
2) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$ et $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3) $\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a}$ et $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$
4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$

Régle (3)

Soient a et b deux réels positifs ona:

Expression	Son conjugué
$\sqrt[3]{a}-b$	$\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2$
$\sqrt[3]{a}+b$	$\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2$
$\sqrt[4]{a}-b$	$\left(\sqrt[4]{a}\right)^3+\left(\sqrt[4]{a}\right)^2.b+b^2\sqrt[4]{a}+b^3$

Ces régles on l'appliquant sur les limites de F.I $\dfrac{0}{0}$

Régle (4)

Soit $r\in\mathbb{Q}$; $r'\in\mathbb{Q}$; $a\in\mathbb{R}^{*+}$; $b\in\mathbb{R}^{*+}$; $(q;p)\in\mathbb{N}^{*2}$ ona:

1) $a^r=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$
4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$
2) $a^r\times a^{r'}=a^{r+r'}$
5) $\dfrac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$
3) $(ab)^r=a^r\times b^r$
6) $a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$
7) $(a^r)^{r'}=a^{rr'}$