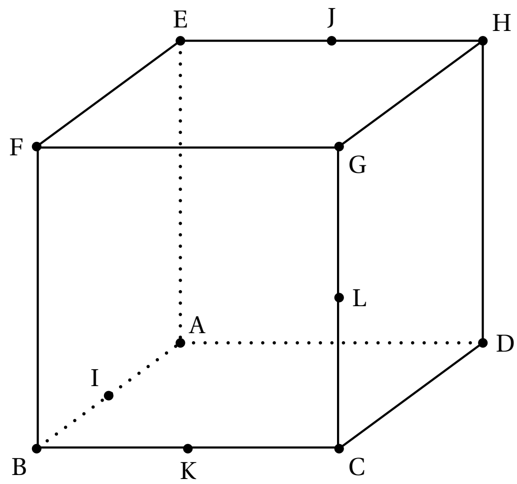
∽ Correction du baccalauréat S Liban ∾
27 mai 2015

EXERCICE 1 **6 points**



1. **a)** Par lecture sur le dessin ci-dessus on détermine facilement les coordonnées des points représentés :

$$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0);\ \mathrm{B}(1,\ 0,\ 0);\ \mathrm{C}(1,\ 1,\ 0);\ \mathrm{D}(0,\ 1,\ 0);\ \mathrm{E}(0,\ 0,\ 1);\ \mathrm{F}(1,\ 0,\ 1);\ \mathrm{G}(1,\ 1,\ 1);\ \mathrm{H}(0,\ 1,\ 1).$$

On obtient alors les coordonnées des quatre points restants

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right);\ \mathrm{J}\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right);\ \mathrm{K}\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right);\ \mathrm{L}\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right).$$

D'où

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}}\ (-1,\ 1,\ -1);\ \overrightarrow{\mathrm{IJ}}\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right);\ \overrightarrow{\mathrm{IK}}\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

et donc

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IK}} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ est donc normal au plan (IJK), il s'ensuit que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ étant normal au plan (IJK), celui-ci a une équation cartésienne de la forme

$$-x+y-z+d=0.$$

Or $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$ appartient à ce plan donc

$$-\frac{1}{2}+d=0 \iff d=\frac{1}{2}$$

le plan (IJK) a donc pour équation

$$-x+y-z+\frac{1}{2}=0 \quad \text{ou encore} \quad -2x+2y-2z+1=0.$$

2. La droite (FD) étant dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\text{FD}}\,(-1,\ 1,\ -1)$ et passant par le point F(1, 0, 1) admet comme représentation paramétrique le système

$$\left\{\begin{array}{ll} x &= 1-t\\ y &= t \qquad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}\\ z &= 1-t\end{array}\right.$$

3. Les coordonnées $(x,\ y,\ z)$ du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK) vérifient les deux relations

$$\left\{\begin{array}{ll} x &= 1-t\\ y &= t\\ z &= 1-t\end{array}\right. \text{(S)} \quad \text{et} \quad -2x+2y-2z+1=0 \quad \text{(E)}$$

Dans (E), on obtient

$$-2(1-t)+2t-2(1-t)+1=0 \iff 6t-3=0 \iff t=\frac{1}{2}.$$

Ce qui donne, en remplaçant dans (S)

$$x=\frac{1}{2} \quad y=\frac{1}{2} \quad z=\frac{1}{2}.$$

4. Comme

$$\overrightarrow{\text{IK}}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0$$

les vecteurs $\overrightarrow{\text{IK}}$ et $\overrightarrow{\text{IJ}}$ sont orthogonaux, le triangle IJK est donc rectangle.
Son aire est

$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times\text{IJ}\times\text{IK}=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0}=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

5. Le volume du tétraèdre FIJK est

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\text{FM}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{8}$$

6. On détermine un système d'équations paramétriques des droites (IJ) et (KL)

$$\text{(IJ)}\left\{\begin{array}{ll} x &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\\ y &= \frac{1}{2}t\\ z &= t\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \text{(KL)}\left\{\begin{array}{ll} x &= 1\\ y &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t'\\ z &= \frac{1}{2}t'\end{array}\right.$$

Ce qui donne le système

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}t &= 1\\ \frac{1}{2}t &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t'\\ t &= \frac{1}{2}t'\end{array}\right.$$

qui admet pour unique solution $t=-1$ et $t'=-2$, ce qui prouve que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes au point $\text{P}\left(1,\ -\frac{1}{2},\ -1\right)$

EXERCICE 2 **6 points**

1. $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[\ \ln(x+1)\ \right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

2. **a)**

$$\begin{aligned}
u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} + \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité}\\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 x^n\frac{x+1}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

b) Il résulte de la question précédente que $u_1 + u_0 = 1$, or $u_0 = \ln(2)$, donc

$$u_1 = 1 - \ln(2).$$

3. **a)** On peut modifier l'algorithme de la façon suivante

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ln(**2**)
Traitement :	Pour i variant de 1 à **n**
	| Affecter à u la valeur $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{i}} - \mathbf{u}$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers 0.

4. **a)**

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité}\\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 x^n\frac{x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or $x \in [0,\ 1]$ donc x^n et $1+x$ sont positifs, mais $x-1$ est négatif , donc

$$\int_0^1 x^n\frac{x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x < 0$$

et par conséquent $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

b) Tous les termes de cette suite étant positifs, la suite (u_n) est donc minorée par 0.

Comme elle est également décroissante, il en résulte d'après le théorème de la convergence monotone qu'elle est convergente.

5. Soit ℓ sa limite, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell,$$

soit

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} + u_n = 2\ell$$

Or

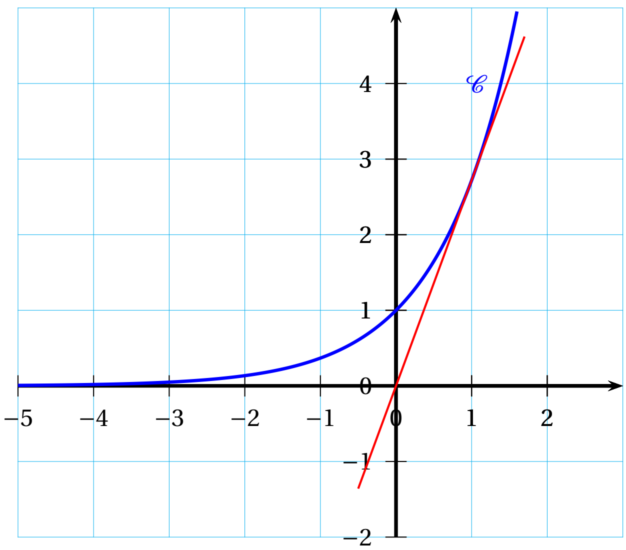
$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} + u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

donc

$$2\ell = 0 \iff \ell = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers 0.

EXERCICE 3 **3 points**



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 est donné par

$$y = \mathrm{e}^1(x-1)+\mathrm{e}^1 \iff y = \mathrm{e}x.$$

   la droite $\mathscr{D}_{\mathrm{e}}$: $y = \mathrm{e}x$ est donc tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. On conjecture que :
   - Si $m < \mathrm{e}$ il n'y a aucun point d'intersection.
   - Si $m = \mathrm{e}$ il y a un point d'intersection.
   - Si $m > \mathrm{e}$ il y a deux points d'intersection.

3. **Première solution**
   Le point M de coordonnées $(x,\ y)$ est un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}_m$ si et seulement si

$$\mathrm{e}^x = mx \iff \mathrm{e}^x - mx = 0.$$

   Posons $f(x) = \mathrm{e}^x - mx$, alors

$$\mathrm{e}^x = mx \iff f(x) = 0.$$

   Étudions cette fonction f, il vient :
   - $f'(x) = \mathrm{e}^x - m$
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -mx = +\infty$ car $m > 0$
   - $f(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - m\right)$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   - $f'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x > m \iff x > \ln(m)$
   - $f(\ln(m)) = m - m\ln(m) = m(1-\ln(m))$

   D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m(1-\ln m)$	$\nearrow$	$+\infty$

Il résulte de ce tableau de variations que

- si $m(1-\ln(m)) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution ;
- si $m(1-\ln(m)) = 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution ;
- si $m(1-\ln(m)) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions

Or comme $m > 0$,

$$m(1-\ln(m)) > 0 \iff 1-\ln(m) > 0 \iff 1 > \ln(m) \iff \mathrm{e} > m,$$

d'où, en définitive

- si $m < \mathrm{e}$ alors la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ n'auront aucun point d'intersection ;
- si $m = \mathrm{e}$ alors la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ auront un seul point d'intersection ;
- si $m > \mathrm{e}$ alors la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ auront deux points d'intersection.

Deuxième solution

On veut déterminer dans $\mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^{x} = mx$. On sait que $m > 0$ et que, pour tout x, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc les solutions de cette équation seront strictement positives.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{x} = mx \iff \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = m$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$.

Cette fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et :

$$f'(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x}}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^{x}(x-1)}{x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $x-1$ donc négatif sur $]0\,,\,1[$ puis positif sur $]1\,,\,+\infty[$.

La fonction f admet donc un minimum pour $x = 1$ égal à $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{1}}{1} = \mathrm{e}$.

D'après le cours, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x} = 1 \implies \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$

On établit le tableau de variation de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Déterminer le nombre de solutions $f(x) = m$ revient à déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f et de la droite horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $y = m$.

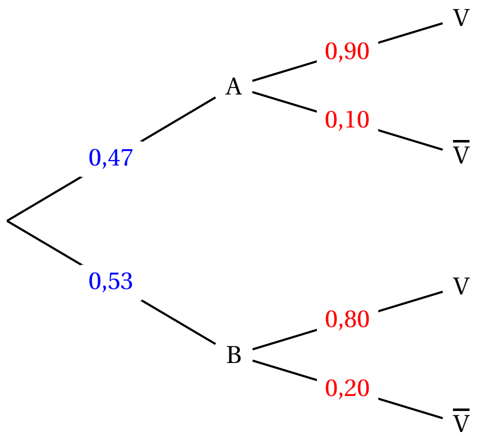
D'après le tableau de variation de f :

- si $m < \mathrm{e}$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point d'intersection donc la droite $\mathscr{D}_m$ et la courbe $\mathscr{C}$ n'ont pas de point d'intersection ;
- si $m = \mathrm{e}$, la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$, donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_f$ ont un seul point d'intersection, et donc la droite $\mathscr{D}_m$ et la courbe $\mathscr{C}$ ont un seul point d'intersection ;
- si $m > \mathrm{e}$, la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ ont deux points d'intersection, donc la droite $\mathscr{D}_m$ et la courbe $\mathscr{C}$ ont deux points d'intersection.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On obtient l'arbre suivant



2. **a)** D'après l'arbre

$$p(V) = 0,47 \times 0,90 + 0,53 \times 0,80 = 0,847.$$

b) $p_V(A) = \dfrac{p(V \cap A)}{p(V)} = \dfrac{0,47 \times 0,90}{0,847} = 0,499$

3. La personne interrogée vote effectivement pour le candidat A si elle dit la vérité et dit voter pour le candidat A ou bien si elle ment et dit voter pour le candidat B, soit d'après l'arbre :

$$p(A) = 0,47 \times 0,90 + 0,53 \times 0,20 = 0,529.$$

4. On détermine un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95%, par

$$I = \left[0,529 - \frac{1}{\sqrt{1200}} ;\ 0,529 + \frac{1}{\sqrt{1200}}\right] = [0,500\,1 ;\ 0,557\,9]$$

Les conditions d'applications étant vérifiées

$$1200 > 30 \quad \text{et} \quad 1200 \times 0,557\,9 > 5 \quad \text{et} \quad 1200 \times 0,442\,1 > 5.$$

La borne inférieur de l'intervalle de confiance au seuil de 95% étant supérieure à 0,5, le candidat A peut raisonnablement croire qu'il sera élu.

5. Par demi-heure, il y a en moyenne $0,4 \times 10 = 4$ personnes qui répondent, soit 8 personnes par heure.

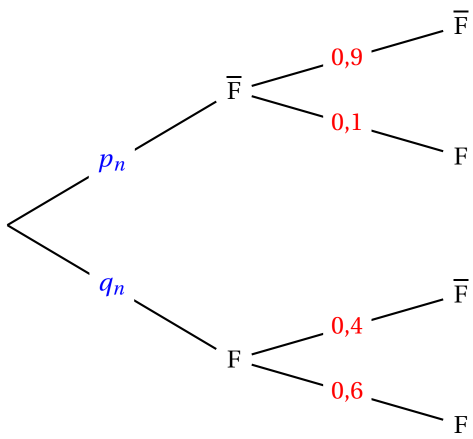
Comme on a besoin d'avoir 1 200 réponses, il faudra en moyenne $\dfrac{1\,200}{8} = 150$ heures pour parvenir à cet objectif.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Puisque $q_0 = 1$, cela signifie que le fumeur a fumé le jour où il a décidé d'arrêter de fumer ! Donc il aura une probabilité de 0,6 de fumer le lendemain, et donc $q_1 = 0,6$ soit $p_1 = 0,4$.

2. On peut modéliser la situation par un arbre :



d'où

$$p_{n+1} = 0,9p_n + 0,4q_n \quad \text{et} \quad q_{n+1} = 0,1p_n + 0,6q_n.$$

Ce qui se traduira par les formules :

- En B3 : = 0,9 × B2 + 0,4 × C2
- En C3 : = 0,1 × B2 + 0,6 × C2

3. **a)** $\text{A} + 0,5\text{B} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5 \times \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} = \text{M}$

b) d'une part

$$\text{A}^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,64+0,16 & 0,64+0,16 \\ 0,16+0,04 & 0,16+0,04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = \text{A}$$

d'autre part

$$\text{A} \times \text{B} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,16-0,16 & -0,64+0,64 \\ 0,04-0,04 & -0,16+0,16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie de même que

$$\text{B} \times \text{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On procède par récurrence :

- Initialisation : C'est vrai pour $n = 0$, en effet :

$$\text{M}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{A} + 0,5^0\text{B} = \text{A} + \text{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Hérédité : supposons que $\text{M}^n = \text{A} + 0,5^n\text{B}$, alors il vient

$$\begin{aligned} \text{M}^{n+1} &= \text{M}^n \times \text{M} = (\text{A} + 0,5^n\text{B}) \times (\text{A} + 0,5\text{B}) \\ &= \text{A}^2 + 0,5^n\text{B} \times \text{A} + 0,5\text{A} \times \text{B} + 0,5^{n+1}\text{B}^2 \\ &= \text{A} + 0,5^{n+1} \times \text{B} \end{aligned}$$

- Conclusion : pour tout n

$$\text{M}^n = \text{A} + 0,5^n\text{B}.$$

d) Comme $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ et que $X_n = M^n \times X_0$, il vient

$$X_n = \left(A + 0{,}5^n B\right) \times X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 + 0{,}5^n \times 0{,}2 & 0{,}8 - 0{,}5^n \times 0{,}8 \\ 0{,}2 - 0{,}5^n \times 0{,}2 & 0{,}2 + 0{,}5^n \times 0{,}8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 - 0{,}5^n \times 0{,}8 \\ 0{,}2 + 0{,}5^n \times 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Donc

$$p_n = 0{,}8 - 0{,}8 \times 0{,}5^n$$

e) Comme $0 < 0{,}5 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8.$$

À long terme la probabilité qu'il arrête de fumer va se stabiliser vers 0,8. On n'a pas la certitude qu'il arrêtera de fumer.