République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Institut Pédagogique National

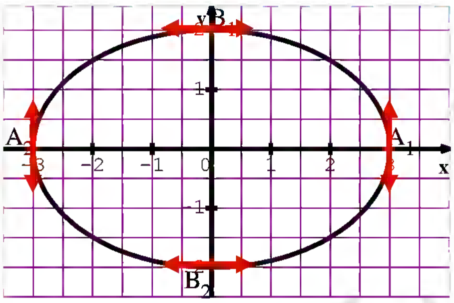
Honneur –Fraternité- Justice

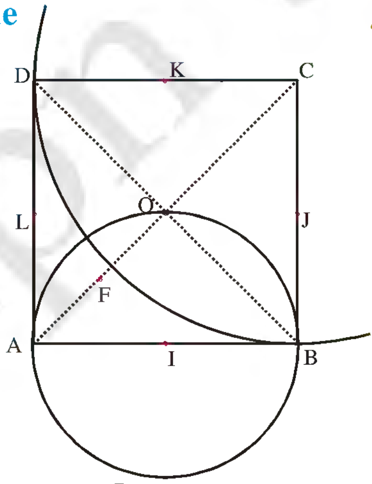
Annales du Baccalauréat National

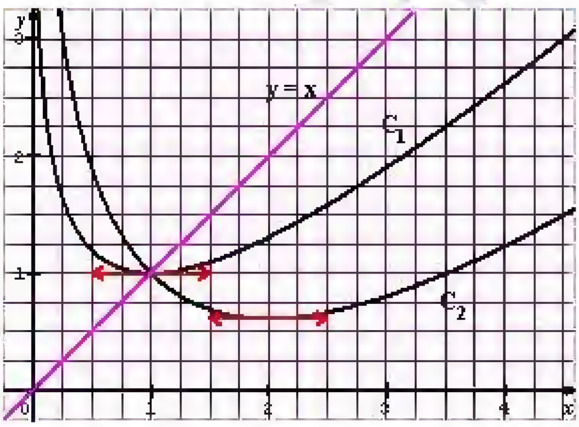
Corrigés de tous les sujets de Mathématiques
en
séries
C & TMGM
Durant la période

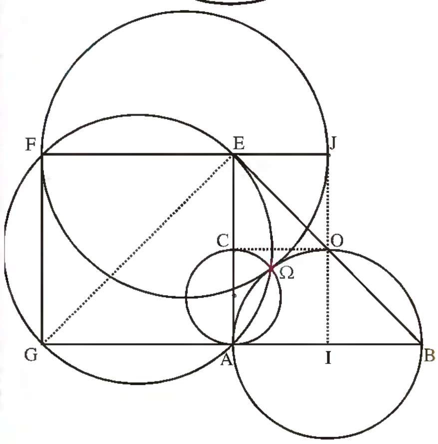
2012

2000









Corrigés par :
Mohamed El Bechir Ould Sidaty
à l'IPN
Mohamedou Ould Zah
à l'IPN
Bah Ould Sidatt
au Lycée Technique de Nktt

Edition mars 2013

Table des matières

Avant – propos

Chers collègues professeurs,

Chers élèves,

Dans le cadre de ses efforts permanents d'innovation d'adaptation et d'amélioration des supports didactiques et eu égard à l'importance accordée à l'enseignement des disciplines scientifique dans les nouvelles orientations du système éducatif national, l'IPN met à la disposition des candidats du Baccalauréat des séries C et TMGM les annales du Baccalauréat national en Mathématiques.
Ils trouveront tous les corrigés des sujets du Baccalauréat National, tant à la session normale qu'à la session complémentaire durant la période 2000 – 2012.
Les énoncés sont annexés dans leur intégralité tels qu'ils ont été donnés le jour de l'examen.

La publication du présent document répond à des impératifs liés à la formation et à l'encadrement des futures générations et aux besoins observés en matière d'édition des annales depuis deux décennies.

En outre, le rôle du professeur, reste incontournable pour une meilleure utilisation des annales tout en mettant en œuvre le contenu, la démarche et la mise à l'exercice véhiculer à travers ce document.

Nous sommes convaincus que les efforts qui seront fournis en harmonie et en complémentarité entre les différents acteurs concernés par l'utilisation de ces annales vont contribuer à la réussite et à l'atteinte des objectifs attendus, en particulier la vulgarisation des expériences et la diffusion du savoir et du savoir-faire du Baccalauréat.

Chers élèves,

La difficulté principale et la question centrale qui se pose pour un candidat au Baccalauréat c'est comment traiter un sujet de mathématique au baccalauréat :
Voici quelques pistes pour vous aider à surmonter cette difficulté et à répondre à cette question :

- Lisez attentivement l'énoncé jusqu'à à la fin.
  En effet, les questions sont rarement indépendantes et il peut arriver que l'une d'entre elles donne une indication précieuse quant à la résolution des questions précédentes.
- Avant de vous lancez dans les calculs, recensez les savoir et savoir-faire auxquels chaque question peut faire appel et prenez le temps de réfléchir pour essayer de trouver l'outil de démonstration le mieux approprié.
- Cherchez d'abord les questions au brouillon ; si vous terminez l'exercice, recopier-le ; si vous n'arrivez pas à résoudre une question, commencer à recopier en mettant au propre ; en faisant ressortir les résultats obtenus, cela vous aidera à trouver la suite.
- Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat donné dans l'énoncé laissez un blanc dans votre copie et continuer l'exercice ou le problème en utilisant le résultat donné.
- N'oublier pas de justifier vos réponses ; mais une justification doit-être claire et concise.
- Soignez la présentation de votre copie, respecter les notations du texte.
- Si vous devez faire un graphique respectez les unités si elles sont indiquées dans l'énoncé, sinon pensez à bien les choisir.
- Veillez à gérer au mieux le temps imparti.

Enfin, En souhaitant que cet outil soit un auxiliaire utile pour les Professeurs de cette discipline et aux élèves des classes de 7ème C et 3TMGM, la section des mathématiques de l'IPN reste disposée à accueillir toutes remarques ou suggestions de nature à améliorer les prochaines éditions de cet outil.

Les auteurs

$1^{ère}$ partie
Enoncés des sujets

République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2012
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{f(x) = e^x \ln(e^x + 1)}$. Soit $(\mathbf{C})$ la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{i},\vec{j})$.

1. Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\ .$$ (0,75 pt)

2.a) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. (0,75 pt)

b) Montrer que $\mathbf{f}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $\mathbf{J}$ que l'on déterminera. (0,25 pt)

c) Tracer la courbe $(\mathbf{C})$. (0,25 pt)

3. On pose $\mathbf{I} = \int_0^1 f(x)dx$. On se propose de calculer $\mathbf{I}$ par deux méthodes.

<u>Méthode a :</u> Déterminer trois réels $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ tels que pour tout réel $\mathbf{x}$:

$$f'(x) = f(x) + ae^x + b + \frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}.$$ En déduire $\mathbf{I}$. (0,5 pt)

<u>Méthode b :</u> En posant $\mathbf{t = e^x + 1}$, utiliser une intégration par parties pour calculer $\mathbf{I}$. (0,5 pt)

Exercice 2 (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(\mathbf{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $\mathbf{A(2;1;3)}$, $\mathbf{B(3;2;1)}$, $\mathbf{C(4;1;4)}$, $\mathbf{D(5;3;-2)}$ et $\mathbf{E(6;-2;-4)}$.

1.a) Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan $(\mathbf{ABC})$ (1 pt)

b) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathbf{ABC})$. (0, 25 pt)

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\mathbf{DE})$. (0, 5 pt)

d) Déterminer les coordonnées du point $\mathbf{F}$ projeté orthogonal de $\mathbf{D}$ sur le plan $(\mathbf{ABC})$. Déterminer un réel $\mathbf{k}$ tel que $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{DF}$ (0,5 pt)

2.a) Calculer le volume $\mathbf{V}$ du tétraèdre $\mathbf{ABCD}$. (On rappelle que $V = \frac{1}{3}\text{Base} \times \text{Hauteur}$). (0,25 pt)

b) Déterminer les deux ensembles Γ_1 et Γ_2 des points $\mathbf{M}$ de l'espace définis par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2 - ME^2 = -30$$ (0,25 pt)

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -36\ .$$ (0,25 pt)

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{u},\vec{v})$.

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation E_θ : $z^2 - (6\cos\theta)z + 4 + 5\cos^2\theta = 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

1.a) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation E_θ. On note z_1, z_2 les solutions de E_θ avec $\mathrm{Im}(z_1) \geq 0$ si $\theta \in [0,\pi[$ (1 pt)

b) Préciser les valeurs de θ et les solutions de E_θ dans les cas suivants :

- L'équation E_θ admet des solutions doubles. Dans ce cas on note A_1 et A_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 avec $Re(z_1) \geq 0$. (0,25 pt)

- L'équation E_θ admet deux solutions imaginaires pures. Dans ce cas on note B_1 et B_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2 avec $Im(z_1) \geq 0$. (0,25 pt)

2. Dans le cas général on note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1, z_2.

a) Déterminer le lieu géométrique Γ des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit $\theta \in [0,2\pi[$. (1 pt)

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ et le construire. (0,5 pt)

3. On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', barycentre du système $\{(A_1,-4);(B_1,2);(M,3)\}$.

a) Ecrire z' en fonction de z puis reconnaitre f et donner ses éléments caractéristiques. (0, 5 pt)

b) Donner une équation cartésienne de $\Gamma' = f(\Gamma)$. Donner les éléments caractéristiques de Γ' dans $(O;\vec{u},\vec{v})$. (0, 5 pt)

Exercice 4 (4 points)

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme général $U_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, $n \geq 2$.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de f. (1 pt)

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; on pose $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln x dx$. (0,5 pt)

b) En déduire le calcul de $I(\lambda)$ puis $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} I(\lambda)$. (0,5 pt)

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\dfrac{k}{n})$.

a) Montrer que : $\dfrac{1}{n}f(\dfrac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \dfrac{1}{n}f(\dfrac{k}{n})$; pour $1 \leq k \leq n-1$. (0,25 pt)

b) En déduire que : $S_n - \dfrac{1}{n}f(\dfrac{1}{n}) \leq I(\dfrac{1}{n}) \leq S_n$ puis que : $I(\dfrac{1}{n}) \leq S_n \leq I(\dfrac{1}{n}) + \dfrac{1}{n}f(\dfrac{1}{n})$. (0,5 pt)

c) En utilisant 3.b) montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$. (0,25 pt)

4.a) Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$ et que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. (0,5 pt)

b) En déduire que : $S_n = \dfrac{n^2+n}{2n^2} - \ln U_n$. (0,25 pt)

c) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. (0,25 pt)

Exercice 5 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct **ABC** de coté **a** ,$(a > 0)$, de centre **G**. Soient **I** , **J** et **K** les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Le point **E** est le symétrique de **K** par rapport à **I**.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. **(0,5 pt)**

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme **B** en **I** et **J** en **A** . **(0,5 pt)**

b) Déterminer les éléments caractéristiques de r_1 . **(0,5 pt)**

3. Soit **t** la translation de vecteur $\overrightarrow{AJ}$. On pose : $r_2 = t \circ r_1$ et $f = s_{JC} \circ s_{JE} \circ s_{KE}$.

a) Déterminer $r_2(J)$ et caractériser r_2 . **(0,5 pt)**

b) Déterminer deux droites Δ_1 et Δ_2 telles que $r_1 = s_{KC} \circ s_{\Delta_1}$ et $r_2 = s_{JC} \circ s_{\Delta_2}$. En déduire que $f = t_{\overrightarrow{AJ}} \circ s_{KC}$ **(0,5 pt)**

c) Déterminer l'image du triangle **BIK** par **f** . Justifier que **f** est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. **(0,5 pt)**

4.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe **s** qui transforme **E** en **I** et **C** en **G** . **(0,5 pt)**

b) Déterminer un angle et le rapport de **s** . **(0,5 pt)**

c) Montrer que le centre de **s** est situé sur les cercles circonscrits aux triangles **BCG** et **BEI** . Préciser ce centre. **(0, 25 pt)**

5. Dans cette question, **M** est un point variable du cercle Γ de diamètre $[BC]$.

On note $s(M) = M'$.

a) Déterminer le lieu géométrique Γ' du point M' lorsque **M** décrit Γ. **(0, 25 pt)**

b) Montrer que pour tout point **M** de Γ distinct de **B** , la droite (MM') passe par le point **K** . **(0, 25 pt)**

c) En déduire un programme de construction de M' à partir d'une position de **M** sur Γ. Placer **M** et M' en supposant que les points **B** , **M** et **C** se succèdent dans le sens trigonométrique sur Γ. **(0, 25 pt)**

6) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $s^2 = s \circ s$ et $s^n = s \circ s^{n-1}$. On définit une suite de points (M_n) par $M_0 = E$; $M_1 = s(M_0)$ et $M_n = s^n(M_0)$.

a) Sur une nouvelle figure, placer les points B, M_0, M_1, M_2, M_3 (Pour la construction, on pourra prendre la droite **(BE)** verticalement avec **BE = 6cm**). **(0, 25 pt)**

b) Calculer en fonction de **n** et **a** la somme : $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$. **(0, 25 pt)**

c) Calculer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et l'interpréter. **(0, 25 pt)**

d) Justifier que : $M_{1960} \in (BM_4)$ et $M_{2012} \in (BG)$. **(0, 25 pt)**

Fin.

Baccalauréat 2012

Session Complémentaire

رمضان 1433 هـ

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z)=z^3-(4-2i)z^2+(4-6i)z-4+8i$.
 a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:
$$P(z)=(z+2i)(z^2+az+b)$$ (0,75 pt)
 b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. (0,75 pt)
2. Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.
 a) Placer les points A, B et C. (0,5 pt)
 b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que A est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$. (0,5 pt)
 c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\frac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur. (0,5 pt)
3. Pour tout point M du plan on pose : $\varphi(M)=3MO^2-4MA^2+MB^2+2MC^2$ et on note Γ_k l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=k$, où k est un réel.
 a) Discuter suivant les valeurs de k, la nature de Γ_k. (0,5 pt)
 b) Déterminer et construire Γ_{16}. (0,5 pt)

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par: $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer et interpréter graphiquement : $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (1 pt)
 b) Dresser le tableau de variation de f. (1 pt)
 c) Construire la courbe (C). (0,5 pt)
2. Pour tout entier naturel $n\geq2$, on pose :
$$U_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}-\ln(\ln n)=\frac{1}{2\ln2}+\frac{1}{3\ln3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}-\ln(\ln n).$$
a) Montrer que tout entier naturel $n\geq2$, $\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\leq\int_n^{n+1}f(t)dt\leq\frac{1}{n\ln n}$ (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq2$, $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\int_n^{n+1}f(t)dt$. En déduire le sens de variation de (U_n). (0,5 pt)

c) Montrer que tout entier naturel $n\geq2$, $U_{n+1}-U_n\geq f(n+1)-f(n)$. En déduire que $U_n\geq-\ln(\ln2)$. (0,25 pt)

d) Déduire de ce qui précède que la suite (U_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $-\ln(\ln2)\leq\ell\leq\frac{1}{2\ln2}-\ln(\ln2)$. (0,25 pt)

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+1}{e^x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. (1 pt)

b) Montrer que la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point d'abscisse 1. (1 pt)

2.a) Dresser le tableau de variation de f. (0,5 pt)

b) Construire la courbe (C). (0,5 pt)

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (I_n). (0,5 pt)

b) Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en conclure ? (0,5 pt)

c) Donner un encadrement du nombre I_n qui permet de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. Calculer cette limite. (0,5 pt)

4.a) Calculer I_0. (0,5 pt)

b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout n : $I_{n+1}=\dfrac{-1}{e}+(n+1)I_n$. (0,5 pt)

c) Calculer l'aire sous la courbe (C) délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$. (0,5 pt)

Exercice 4 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct $ABCD$ de coté a, $(a>0)$.

Soient E et F les symétriques respectifs des points C et B par rapport à (AD). Soit G le point tel que le triangle DBG soit équilatéral direct. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[DB]$ et $[DF]$.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (1 pt)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme D en G et F en B. Préciser l'angle et le centre de r_1. (1 pt)

c) Soit la rotation r_2 qui transforme G en E et B en A. Préciser l'angle et le centre de r_2. (0,5 pt)

d) On pose $r=r_2\circ r_1$. Déterminer $r(D)$ et $r(F)$. Caractériser r. (0,75 pt

2. On considère l'homothétie h de centre B et de rapport $k=\dfrac{1}{2}$. On note $s=h\circ r$.

a) Montrer que s est une similitude directe. Préciser le rapport et un angle de s. (0,75 pt

b) Soit Ω le centre de s. Montrer que Ω appartient à deux cercles Γ_1 et Γ_2 que l'on déterminera. (0,75 pt

c) Déterminer deux réels α et β tels que Ω soit le barycentre du système $\{(E,\alpha);(I,\beta)\}$. Placer Ω sur la figure. (0,25 pt

3. On considère l'ensemble Γ des points M du plan tels que $MA+ME=2a$ où a est la longueur du coté du carré $ABCD$.

a) Montrer que Γ est une ellipse passant par D. (0,5 pt)

b) Préciser les sommets, les longueurs des axes de Γ et calculer son excentricité e. (0,25 pt

c) Déterminer $\Gamma'=s(\Gamma)$ puis construire Γ et Γ'. (0,25 pt

Fin.

Baccalauréat 2011
Session Normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (1+2\cos\theta)z^2 + (1+2\cos\theta)z - 1$ où $\theta \in [0;2\pi[$.

1) Calculer $P(1)$ puis déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ sachant que z_0 est réel, et $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$ si $\sin\theta \geq 0$. (1,5)

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. Déterminer, lorsque θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$, le lieu géométrique Γ_1 des points M_1 et M_2. (0,5)

3) Soit le point G barycentre du système $S = \{(M_0,1);(M_1,1);(M_2,-3)\}$

a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0;2\pi[$, alors le lieu géométrique Γ du point G est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne. (0,5)

b) Déterminer, dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, les coordonnées du centre et des sommets, puis calculer l'excentricité de l'ellipse Γ. Construire Γ dans ce repère. (0,5)

4) On suppose dans cette question que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les coordonnées des points M_0, M_1, M_2 et G. Placer ces points sur la figure précédente. Quelle est la particularité de G dans ce cas ? (0,5)

b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ' des points M du plan tels que : (0,5)

$$MM_0^2 + MM_1^2 - 3MM_2^2 = 6$$

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x(1-\ln x); & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$, interpréter graphiquement. (0,75)

b) Dresser le tableau de variations de f. (0,75)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Construire la courbe (C). (0,25)

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $\begin{cases} f_n(x) = x^n(1-\ln x); & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

a) Pour $n \geq 2$, étudier la dérivabilité de f_n à droite de $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement. (0,25)

b) Dresser le tableau de variation de f_n. (0,5)

3.a) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points communs que l'on déterminera. (0,5)

b) Etudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}). (0,25)

4) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $U_n = \int_1^e f_n(x)dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale U_n. (0,25)

b) Justifier sans calcul, que la suite (U_n) est positive et décroissante. (0,25)

c) Donner l'expression de U_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. (0,25)

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement. (0,75)

b) Vérifier que f est impaire, puis dresser son tableau de variation. (1)

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm. (0,25)

d) Calculer l'aire A du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 3$. (0,25)

2. On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0=\ln 3$, et pour tout entier naturel $n\geq 1$: $U_n=\int_0^{\ln 3}(f(t))^n dt$.

a) Calculer U_1. (0,25)

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0\leq U_n\leq\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\ln 3$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. (0,5)

c) Vérifier que pour tout $x\geq 0$ on a : $1-f'(x)=(f(x))^2$. Montrer que pour tout $n\geq 0$:

$$U_{n+2}-U_n=\frac{-1}{n+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$ (0,75)

d) En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$\begin{cases} U_{2n}=\ln 3-\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1} \\ U_{2n+1}=\ln\dfrac{5}{3}-\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p} \end{cases}$$ (0,5)

e) Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on pose :

$$S_n=\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}=\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}\left(\frac{4}{5}\right)^p$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. (0,75)

Exercice 4 (7 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre G et de côté a, $a>0$.
Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale) (0,75)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme I en A et B en J. (0,5)

c) Déterminer un angle de r_1 et préciser son centre. (0,5)

2) On considère la rotation r_2 de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Déterminer $r_2(C)$, $r_2(J)$. (0,5)

b) En déduire l'image de la droite (AC) par r_2 puis la construire. (0,25)

3) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $k=\dfrac{-1}{2}$. On pose $s=r_1\circ h$.

a) Quelle est l'image du triangle ABC par h? (0,25)

b) Montrer que s est une similitude directe et donner son rapport et son angle. (0,5)

c) Déterminer $s(A)$. Que peut-on conclure ? (0,25)

d) Donner la forme réduite de s.

4) On pose $s^1 = s$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $s^{n+1} = s \circ s^n$. (0,25)

a) Caractériser s^3. (0,25)

b) Soit $p = 10^{2011}$. Montrer que s^{p-1} est une homothétie de rapport négatif. (0,75)

5) Pour tout point M du plan, on pose : $r_1(M) = M_1$, $r_2(M) = M_2$ et $s(M) = M'$.

a) Déterminer M_1, M_2 dans chacune des positions suivantes de M: M est en I ; en K ; ou en A. (0,75)

b) Montrer que, pour tout M distinct de A, le triangle AMM' est rectangle. (0,25)

c) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 soient alignés. (On pourra considérer les triangles IMM_2, KMM_1 et l'angle $(\overline{MK};\overline{MI})$). (0,5)

6) On suppose dans cette question que M est situé sur le cercle de diamètre $[AC]$, M est distinct du point A. Montrer que :

a) La droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,25)

b) La droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera. (0,25)

c) L'angle $(\overline{M_1M_2}, \overline{MM'})$ à une mesure constante α modulo π que l'on déterminera. (0,25)

Fin.

République Islamique de Mauritanie
Ministère d'Etat à l'Education Nationale, à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche Scientifique
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2011
Session Complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z) = z^3 - (6-2i)z^2 + (10-8i)z - 4 + 8i$.

1.a) Calculer $P(2)$. (0,5)

b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. (1)

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ avec $|z_A| < |z_B| < |z_C|$. Placer les points A, B et C. Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle et que le quadrilatère OACB est un parallélogramme. (1)

3) Soit s la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = \frac{1+i}{2}z - i$.

a) Justifier que s est une similitude directe du plan. (0,5)

b) Déterminer les éléments caractéristiques de s. (0,5)

c) Vérifier que $s(C) = B$. (0,5)

Exercice 2 (4 points)

1) On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$.

a) Dresser le tableau de variations de g. (0,75)

b) Montrer que g réalise une bijection de IR sur IR. (0,5)

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une unique solution α telle que $0,6 \le \alpha \le 0,7$. (0,5)

2) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{2xe^{-x}}{x^2+2}$.

a) Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = \frac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$ (0,5)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,75)

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1cm, \|\vec{j}\| = 5cm$. (0,25)

3) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \ge 1$ par : $U_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

On ne cherche pas à calculer l'intégrale U_n

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \ge 1$: $0 \le U_n \le (1 - \frac{1}{e})e^{-n}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$. (0,5)

b) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \ge n_0$, $0 \le U_n \le 10^{-5}$. (0,25)

Exercice 3 (5,5 points)

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de sens direct, de centre O.
Les points E, F, G et H sont les milieux respectifs des segments : [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure (on prendra (AB) horizontale) (0,5)

2) a) Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(D) = H$ et $r(H) = O$. (0,5)

b) Déterminer le centre I et un angle de la rotation r. (0,5)

c) Montrer que $r(A) = F$ puis construire les points B' et C' images respectives de B et de C par r. (0,5)

3) Soit $\mathbf{h}$ l'homothétie de centre $\mathbf{D}$ et de rapport $\mathbf{k}=\frac{1}{2}$. On pose $\mathbf{s}=\mathbf{r}\circ\mathbf{h}$.

a) Justifier que $\mathbf{s}$ est une similitude directe. Déterminer le rapport et l'angle de $\mathbf{s}$. (0,75)

b) Déterminer l'image du carré $\mathbf{ABCD}$ par la similitude $\mathbf{s}$. (0,75)

4) Soit Ω le centre de la similitude $\mathbf{s}$.

a) Montrer que le point Ω appartient aux cercles de diamètres respectifs $[\mathbf{AO}],[\mathbf{BG}],[\mathbf{CD}]$ et $[\mathbf{DH}]$. (0,5)

b) On considère les cercles Γ et Γ' passant par Ω et de centres respectifs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{O}$. Soit $\mathbf{T}$ l'intersection de Γ et Γ' autre que Ω. Démontrer que $s(\Gamma)=\Gamma'$. En déduire que les points Ω, $\mathbf{A}$, $\mathbf{O}$ et $\mathbf{T}$ sont cocycliques. (0,5)

c) Soit $\mathbf{M}$ un point de Γ distinct de Ω et de $\mathbf{T}$. On pose $\mathbf{s(M)=M'}$. Démontrer que les points $\mathbf{M}$, $\mathbf{M'}$ et $\mathbf{T}$ sont alignés. (0,5)

d) Soit $\mathbf{A'}$ et $\mathbf{O'}$ les points diamétralement opposés à Ω respectivement sur les cercles Γ et Γ'.

$\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ les milieux respectifs des segments $[\mathbf{MM'}]$ et $[\mathbf{OO'}]$.

Déterminer la nature du triangle $\Omega\mathbf{JK}$. En déduire le lieu géométrique du point $\mathbf{J}$ lorsque $\mathbf{M}$ décrit Γ privé de Ω et de $\mathbf{T}$. (0,5)

<u>Exercice 4 (6.5 points)</u>

Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par $\mathbf{f(x)=x\ln(x+1)}$.

Soit $(\mathbf{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\mathbf{O};\vec{u},\vec{v})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. (0,75)

b) Montrer que la fonction $\mathbf{f}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1,0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$. (0,75)

c) Dresser le tableau de variations de $\mathbf{f}$ et construire la courbe $(\mathbf{C})$. (0,5)

2. a) Déterminer trois réels **a, b** et **c** tels que, pour tout $x\neq-1$, $\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$. (0,5)

b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $\mathbf{x=0}$ et $\mathbf{x=1}$ (0,5)

3) Pour tout entier $n\geq1$, on pose : $U_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx$.

a) Montrer que l'écriture précédente définit bien une suite numérique (U_n). (0,5)

b) Calculer U_1 et en donner une interprétation graphique. (0,5)

c) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. La suite (U_n) converge-t-elle ? Justifier. (0,5)

d) Démontrer que pour tout entier $n\geq1$, $0\leq U_n\leq\frac{\ln2}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (U_n). (0,5)

4) Pour tout entier $n\geq1$, on pose : $V_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx$

a) Vérifier que : $U_n=\frac{\ln2}{n+1}-\frac{1}{n+1}V_n$. (0,5)

b) Démontrer que : $\frac{1}{2(n+2)}\leq V_n\leq\frac{1}{n+2}$. En déduire la limite de la suite (V_n). (0,5)

c) Démontrer que pour tout entier $n\geq1$, $V_n=(-1)^n(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^n}{n+1}-\ln2)$.

En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^n}{n+1})=\ln2$. (0,5)

Fin.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Enseignement Secondaire et Supérieur
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Baccalauréat 2010
Session Normale

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

1. On considère la fonction numérique $\mathbf{f}$ définie sur IR par : $f(x) = e^x - x - 1$.
   a) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. (1)
   b) En déduire que pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$. (0,25)
2.a) Montrer que pour tout réel $x > -1$: $\ln(1+x) \leq x$. (0,25)
   b) Montrer que pour tout réel $x < 1$: $\ln(1-x) \leq -x$. (0,25)
3. On considère la suite numérique (S_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par son terme général:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{c'est-à-dire} \quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$
   a) En utilisant la question 2, montrer que pour tout $n \geq 1$: $S_n \geq \ln(n+1)$. (0,5)
   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. (0,25)
4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $U_n = S_n - \ln n$.
   a) Montrer que pour tout $n > 1$: $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$. En déduire le sens de variation de la suite (U_n). (0,25)
   b) En déduire que la suite (U_n) est convergente vers un réel γ, puis vérifier que : $0 < \gamma < 1$. (γ est appelé la constante d'Euler) (0,25)

Exercice 2 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (6\cos\theta + i)z^2 + (4 + 5\cos^2\theta + 6i\cos\theta)z - (4 + 5\cos^2\theta)i$ où $\theta \in [0; 2\pi]$.

1.a) Vérifier que $z_0 = i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$. Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$. (1)
   b) Déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ sachant que si $\sin\theta \geq 0$, $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$. (0,75)
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2. Soit G le centre de gravité du triangle $M_0M_1M_2$.
   a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi]$, alors l'affixe du point G est $z_G = 2\cos\theta + \frac{1}{3}i$. (0,5)
   b) Déterminer puis construire le lieu géométrique Γ du point G. (0,25)
3.a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi]$, alors le lieu géométrique Γ' des points M_1 et M_2 est une ellipse dont on déterminera une équation cartésienne. (0,5)
   b) Déterminer le centre et les sommets puis calculer l'excentricité de l'ellipse Γ'. Construire Γ' dans le repère précédant. (1)

Exercice 3 (5 points)

1. On considère la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par : $u(x) = x - 2 + \ln x$.
   a) Dresser le tableau de variation de la fonction u. (0,5)
   b) Montrer que u réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera. (0,25)
   c) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α puis vérifier que : $1 \leq \alpha \leq 2$. (0,5)
   d) En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0; +\infty[$. (0,25)
2. Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 \ln x, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

a) Démontrer que f est continue à droite de $x_0 = 0$. (0,25)

b) Démontrer que f est dérivable à droite de $x_0 = 0$. Préciser $f'_d(0)$ et interpréter graphiquement. (0,25)

c) Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f'(x) = xu(\frac{1}{x})$; où u est la fonction définie à la question 1. En déduire le signe de $f'(x)$. (0,5)

d) Dresser le tableau de variation de f. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution β et vérifier que : $1 \le \beta \le 2$. (0,75)

e) Tracer la courbe (C). (0,75)

3. Pour tout entier naturel $n \ge 1$ on pose: $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\beta} f(x)dx$

a) Exprimer I_n en fonction de β et de n, (On pourra utiliser une intégration par parties). (0,5)

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et donner une interprétation géométrique de cette limite. (0,5)

Exercice 4 (8 points)

Dans le plan orienté on considère un carré direct $ABCD$ de coté a, $(a > 0)$. Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Le point E est le symétrique de C par rapport à D et F celui de B par rapport à A.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes. (0,5)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme D en F et C en E. Préciser son angle et son centre. (1)

b) Déterminer deux droites Δ_1 et Δ_2 telles que $r = s_{\Delta_1} \circ s_{AC}$ et $r = s_{AB} \circ s_{\Delta_2}$. (0,5)

c) Déterminer la nature de la composée $\sigma = s_{AB} \circ s_{AD} \circ s_{AC}$ puis la caractériser. (0,5)

3.a) Prouver qu'il existe une unique similitude s_1 qui transforme D en L et C en D. Préciser son angle et son rapport. (1)

b) Soit R le centre de la similitude s_1. Vérifier que le point R est commun aux cercles de diamètres $[DL]$ et $[CD]$ puis le préciser. Vérifier que R est le point d'intersection des deux droites (CL) et (DI). (0,75)

c) On considère l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$. Soit $f = h \circ r$. Préciser la nature de f et déterminer $f(D)$ et $f(C)$. Que peut-on remarquer ? (0,75)

d) Donner la forme réduite de la similitude s_1. (0,25)

4. On considère la similitude directe s_2 qui transforme F en B et B en C.

a) Déterminer l'angle et le rapport de s_2. (0,5)

b) Soit Q le centre de s_2. Vérifier que Q est le point d'intersection des deux droites (CL) et (BK). (0,25)

5. Soient les points : P intersection des droites (AJ) et (BK) ; S intersection de (AJ) et (DI).

a) Démontrer que : $Q = bar\{(A,-1);(B,2);(C,1);(D,3)\}$. (0,25)

b) Donner des expressions semblables pour les points P, R et S. (0,5)

c) Démontrer que $PQRS$ est un carré puis calculer son aire en fonction de a. (0,5)

6. Soit Γ l'ensemble des similitudes directes de centre O (centre du carré $ABCD$), et qui transforment $ABCD$ au carré $PQRS$.

a) Prouver que ces similitudes sont de même rapport puis le déterminer. (0,25)

b) Soit g une similitude de l'ensemble Γ dont l'angle $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Donner les valeurs exactes de chacun des nombres $\sin\theta$ et $\cos\theta$. (0,25)

c) Donner en fonction de θ les angles possibles des autres éléments de l'ensemble Γ. (0,25)

Fin.

Baccalauréat 2010
Session Complémentaire

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Pour tout réel t et pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $G_0(t) = \int_0^t e^x dx$ et $G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$.

1.a) Démontrer que $G_n(t)$ existe pour tout entier naturel et donner l'expression $G_0(t)$ et de $G_1(t)$ en fonction de t. (1,25)

b) Démontrer que pour tout réel $t \geq 0$ on a : $\frac{1}{2}t^2 \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2 e^t$. (0,5)

c) Démontrer que pour tout réel $t \leq 0$ on a : $\frac{1}{2}t^2 e^t \leq G_1(t) \leq \frac{1}{2}t^2$. (0,5)

d) En déduire le calcul de la limite : $\lim_{t \to 0} \frac{te^t - e^t + 1}{t(e^t - 1)}$. (0,25)

2) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $I_n = G_n(1) = \int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$. En déduire I_n en fonction de I_{n-1} pour $n \geq 1$. (0,5)

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ? (0,5)

c) Donner un encadrement de I_n qui permet de calculer $\lim_{n \to +\infty} I_n$ et calculer cette limite. (0,5)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose :
$P(z) = z^3 - (4+6i)z^2 + (-6+16i)z + 12 - 4i$.

1.a) Calculer $P(1+i)$. (0,25)

b) Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a :
$P(z) = (z-1-i)(z^2 + az + b)$. (0,5)

c) Déterminer les solutions de l'équation $P(z) = 0$. (0,5)

2.a) Placer les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ sachant que $|z_A| \leq |z_B| \leq |z_C|$. Déterminer la nature du triangle ABC. (0,5)

b) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s de centre A qui transforme C en B. (0,25)

c) Donner l'expression complexe de s. Déterminer le rapport et un angle de s. (0,75)

3) On considère la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le M' d'affixe z' tel que :
$z' = \frac{1-i}{2}z + i$. Pour tout entier naturel n on pose : $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$. On définit une suite de points (M_n) par $M_0 = C$ et $M_n = f^n(M_0)$.

a) Reconnaître la transformation f et déterminer ses éléments caractéristiques. (0,5)

b) Déterminer la nature du triangle AM_nM_{n+1}. (0,25)

c) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}$. (0,25)

d) Calculer la limite $\lim_{n \to +\infty} S_n$ et l'interpréter. (0,25)

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct ABC de coté a, $(a > 0)$. Soient I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA].

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,5)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme I en C et B en J. (0,25)

b) Préciser l'angle et le centre Ω de r_1. (0,5)

3. Soit $\mathbf{t}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{CK}$. On pose : $r_2 = t \circ r_1$.

a) Déterminer la nature de la composée $r_2 = t \circ r_1$. Préciser $r_2(I)$ et $r_2(B)$. Caractériser r_2. (1)

b) Déterminer une droite Δ telle que $s_\Delta \circ r_2 = s_{(AJ)}$. En déduire une autre décomposition de r_2. (0,25)

4. On considère les similitudes directes s_1 et s_2 de centres respectifs A et C telles que : $s_1(B) = K$ et $s_2(K) = B$.

a) Déterminer un angle et le rapport de chacune des similitudes directes s_1 et s_2. (1)

b) Déterminer la nature de la composée $f = s_2 \circ s_1$ et la caractériser. (0,25)

5. Dans cette question, M est un point variable du plan. On pose $r_1(M) = M_1$ et $r_2(M) = M_2$.

a) Démontrer que si M est distinct de J et de Ω alors on a : $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) \quad [2\pi]$. (0,5)

b) En déduire le lieu géométrique du point M lorsque les points M, M_1 et M_2 sont alignés. (0,25)

c) Démontrer que pour toute position du point M dans le plan, la distance M_1M_2 reste constante et la préciser et que la droite (M_1M_2) possède une direction fixe à préciser. (0,5)

Exercice 4 (7 points)

I- On considère la fonction numérique g définie par : $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x + 1}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x > -1$ on a : $g(x) > 0$. (0,25)

2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel $x > -1$ on a : $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$. (0,75)

3. Déterminer la primitive G de la fonction g sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ et qui vérifie : $G(0) = 1$. (0,5)

II- On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + x + 1 + \ln(x+1)$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique. (1)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,5)

2.a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $I =]-1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,25)

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Vérifier que $-0,53 < \alpha < -0,52$. (0,5)

3.a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) \geq x + 1$. Interprétation graphique. (0,25)

b) Montrer que les courbes (C) et (C'), représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, se coupent en un unique point dont l'abscisse β vérifie $-0,81 < \beta < -0,80$. (0,5)

c) Démontrer que : $(f^{-1})'(\beta) = \dfrac{\beta + 1}{2\beta^2 + 3\beta + 2}$. (0,5)

4.a) Déterminer tous les points de la courbe (C) en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $y = 2x$. (0,5)

b) Discuter suivant les valeurs du paramètres réel k le nombre de solution de l'équation : $x^2 - x + 1 + \ln(x+1) = k$. (0,5)

c) Construire les courbes (C) et (C'). (0,5)

5. Soit A l'aire du domaine plan limité par les courbes (C) et (C') et les axes des coordonnées.

a) Montrer que : $A = \alpha^2 + \int_\beta^\alpha (2x^2 + 2 + 2\ln(x+1))dx$. (0,25)

b) Calculer A en fonction de α et β (On pourra utiliser une intégration par parties). (0,25)

Fin.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Baccalauréat 2009

Session normale

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit l'équation E_θ : $z^2-2(1+i\sin\theta)z+2i\sin\theta=0$ avec $\theta\in[0;2\pi]$.

1.a) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, chacune des équations $E_{\frac{\pi}{2}}$ et E_π. (0,5)

b) Déterminer les solutions z' et z'' de l'équation E_θ sachant que $\mathrm{Re}\,z'\geq \mathrm{Re}\,z''$ si $\cos\theta\geq 0$. (0,5)

2. Soient M' et M'' les points d'affixes respectives z' et z''.

a) Démontrer que si θ décrit l'intervalle $[0;2\pi]$ alors le lieu géométrique Γ des points M' et M'' est un cercle à déterminer. (0,5)

b) Démontrer que si M' et M'' sont distincts alors la droite $(M'M'')$ a une direction fixe indépendante de θ. (0,5)

c) Construire le cercle Γ et placer les points M' et M'' pour $\theta=\frac{\pi}{6}$. (0,5)

3. Soit G le point défini par : $G=\mathrm{bar}\{(M';3),(M'';2)\}$.

a) Déterminer l'affixe z_G de G en fonction de θ. (0,5)

b) Démontrer que si θ décrit $[0;2\pi]$ alors le lieu géométrique Γ' de G est une ellipse dont on donnera une équation cartésienne. (0,5)

c) Déterminer le centre et les sommets et calculer l'excentricité de l'ellipse Γ'. Construire Γ' dans le repère précédent. (0,5)

Exercice 2 (4 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=x^2\ln(x+1)$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1.a) Calculer $f'(x)$ et montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. (0,5)

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0=0$ et étudier leur position relative. Interpréter graphiquement. (0,5)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,5)

2.a) Démontrer que f admet une fonction réciproque que l'on notera g. (0,5)

Soit (C') courbe représentative dans le repère précédent.

b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en trois points dont un seul est d'abscisse strictement négative α. Vérifier que : $-0,8<\alpha<-0,7$. (0,5)

c) Construire les courbes (C) et (C'). (0,5)

3.a) Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout réel x de $]-1;+\infty[$: $\frac{x^3}{x+1}=ax^2+bx+c+\frac{d}{x+1}$. (0,5)

b) En utilisant une intégration par parties, calculer en fonction de α, l'aire du domaine plan des points $M(x;y)$ délimité par les courbes (C) et (C') où $\alpha\leq x\leq 0$. (0,5)

Exercice 3 (5 points)

A tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$ on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=x^ne^{-x}$.

Soit C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Etudier les variations de la fonction f_1 telle que $f_1(x)=xe^{-x}$ et représenter sa courbe C_1. (0,5)

b) Calculer l'aire du domaine délimité par C_1, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=1$. (0,5)

2.a) Démontrer que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes que l'on déterminera. (0,5)

b) Etudier la position relative des courbes C_n et C_{n+1} en fonction de la parité de n. (0,5)

3. Pour tout entier naturel non nul ($n \in IN^*$) on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Vérifier que : $I_1 = 1 - 2e^{-1}$. (0,5)

b) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$ (0,5)

c) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4. Pour tout entier naturel non nul ($n \in IN^*$) on pose : $J_n = \frac{e}{n!} I_n$. (0,5)

a) Démontrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{(n+1)!}$. (0,5)

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$ on a : $J_n = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$. (0,5)

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} J_n$. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$. (0,5)

Exercice 4 (7 points)

Dans le plan orienté on considère quatre points deux à deux distincts A, B, C et D tels que : $AC = BD$, $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soient les points M milieu de $[AC]$, N milieu de $[BD]$ et H le point d'intersection (AC) et (BD). On considère les cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ (On pourra s'aider de la figure ci-jointe, on ne demande pas de la reproduire).

1.a) Démontrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme A en B et C en D. Préciser son angle et montrer que son centre P appartient aux cercles Γ_1 et Γ_3. (0,5)

b) Soit r_2 la rotation qui transforme A en D et C en B. Préciser son angle et montrer que son centre Q appartient aux cercles Γ_2 et Γ_4. (0,5)

c) Démontrer que le quadrilatère $PMQN$ est un carré. (0,5)

2. Soient P_1 et P_2 les points diamétralement opposés à P respectivement sur les cercles Γ_1 et Γ_3. Soient Q_1 et Q_2 les points diamétralement opposés à Q respectivement sur les cercles Γ_2 et Γ_4.

a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme A en P_1 et C en P_2. Déterminer les éléments caractéristiques de cette similitude. (0,5)

b) Déterminer $s_1(M)$ en déduire que les points P_1, P_2, Q et H sont alignés. (0,5)

3) On considère la similitude directe s_2 de centre Q, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer les images des points Q_1, Q_2 et P par s_2. (0,5)

b) En déduire que les points Q_1, Q_2, P et H sont alignés. (0,5)

4. On pose $\sigma = s_1 \circ s_2$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de σ. (0,5)

b) Démontrer que : $P_1P_2 = Q_1Q_2$ et $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{Q_1Q_2}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ (0,5)

5. Soit r la rotation qui transforme P_1 en Q_1 et P_2 en Q_2.

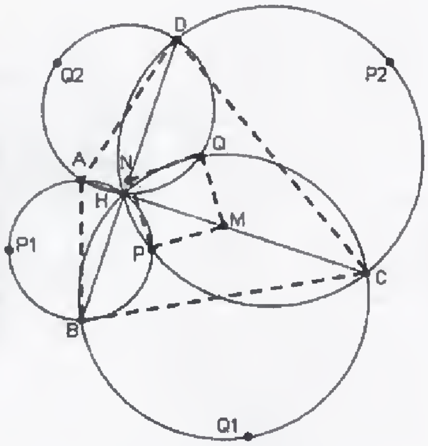
a) Reconnaître le centre de la rotation r. (0,5)

b) Démontrer la cocyclicité des points M, H, P_2 et Q_2. (0,5)

c) Quelles sont les cocyclicités semblables que l'on peut remarquer ? (0,5)

d) Démontrer que : $P_2A^2 + P_2C^2 = Q_2A^2 + Q_2C^2$. (0,5)

e) Quelles sont les relations semblables que l'on peut remarquer ? (0,5) (0,5)



Fin

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2009

Session complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit la transformation ponctuelle f_ω qui associe à tout point M du plan d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que :

$z' = (\frac{1}{2}+\omega i)z + 1 - 2\omega i, \qquad \omega \in \mathbb{C}$.

1. Reconnaître et caractériser la transformation f_ω pour les valeurs suivantes du nombre complexe ω :

a) $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\omega = -\frac{1}{2}i$ c) $\omega = 1 + \frac{1}{2}i$ d) $\omega = 2i$. (1,5pt)

2. Dans la suite de l'exercice on considère $\omega \in \mathbb{R}$ et on pose $\theta = \arg(\frac{1}{2}+\omega i)$ avec $\theta \in]-\pi;\pi]$. On considère les points $A(2;0)$ et $M_0(3;0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $M_{n+1} = f_\omega(M_n)$ et on désigne z_n l'affixe de M_n.

a) Vérifier que $z_1 = \frac{5}{2} + \omega i$ puis calculer z_2 en fonction de ω. (1pt)

b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$. (0,5pt)

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = |z_n - 2|$. Montrer que la suite (V_n) est géométrique puis déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la suite (V_n) est convergente. (0,5pt)

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $d_n = \left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$. Montrer que $d_n = V_{n+1}$ puis calculer, en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$, en donner une interprétation géométrique. (0,5pt)

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction numérique f_n définie par : $f_n(x) = \frac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}$ où n est un entier naturel. Soit C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Dresser le tableau de variation de f_0 où $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. (1pt)

b) Montrer que C_0 admet deux asymptotes horizontales que l'on déterminera. (0,5pt)

c) Montrer que le point $\Omega(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe C_0 puis construire C_0. (0,5pt)

2.a) Vérifier que pour tout réel x : $f_1(x) = f_0(-x)$. En déduire une transformation géométrique simple qui permet de construire C_1 à partir de C_0. (0,5pt)

b) Vérifier que pour tout réel x : $f_1(x) = 1 - f_0(x)$. En déduire une transformation géométrique simple qui permet de construire C_1 à partir de C_0. (0,5pt)

c) Construction C_1 à partir de C_0 dans le repère précédent. (0,25pt)

3. On pose pour tout entier naturel n : $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

a) Calculer U_0 et U_1. (0,5pt)

b) Prouver que pour tout entier naturel $n > 1$ on a : $0 < U_n < \frac{1}{n-1}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$. (0,5pt)

4. On pose pour tout entier naturel non nul n : $V_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$ et $V_0 = 1$.

Soit $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$.

a) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul on a : $U_{n+1} + U_n = |V_n|$. (0,25pt)

b) Prouver que pour tout entier naturel n non nul on a : $|S_n - U_0| = |U_{n+1}|$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. (0,5pt)

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et de coté a. Soit G le centre de gravité de ce triangle et soit D le symétrique de A par rapport à C.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes. Elle sera complétée au fur et à mesure. (1pt)

2.a) Prouver qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en C et B en D. (0,5pt)

b) Préciser un angle de r et déterminer son centre E puis le lacer sur la figure. (0,5pt)

3. Prouver que les points A, B, D et E sont cocycliques, préciser le centre et le rayon de ce cercle puis le construire. (0,5pt)

4. Soit s la similitude directe de centre B et transforme D en C.

a) Déterminer un angle et le rapport de s. (0,5pt)

b) Déterminer l'image du triangle BDE par $s \circ s$. (0,5pt)

5. On pose $f = r \circ s$ et $g = s \circ r$.

a) Préciser et construire $f(B)$, $f(E)$, $g(B)$ et $g(A)$. (0,5pt)

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f et g. (0,75pt)

c) Démontrer que les cercles de diamètres respectifs $[AG]$, $[BC]$, $[CE]$ et $[DB]$ ont un point commun. Quelle est la particularité de ce point ? (0,25pt)

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = 2x - 3 + \ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Vérifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$. (0,5pt)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, interpréter graphiquement; (0,5pt)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (0,5pt)

d) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une notée D est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D. (0,75pt)

2.a) Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{2(x-1)}{x}\varphi(x)$ où φ est une fonction strictement positive pour tout $x \neq 0$ à déterminer. (0,5pt)

b) Dresser le tableau de variation de f. (0,5pt)

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions distinctes α, β et γ dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1}. (0,75pt)

d) Construire (C). (0,25pt)

3. On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe et les droites d'équations respectives : $y = 2x - 3$, $x = 2$ et $x = 1 + \sqrt{3}$.

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{2}{1+(x-1)^2}$. (0,5pt)

b) Calculer $A = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$. (0,5pt)

c) En posant $x = 1 + \tan t$ pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$; calculer $B = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2}{1+(x-1)^2}dx$. (0,5pt)

d) Déduire de ce qui précède le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire. (0,25pt)

Fin

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction de l'Enseignement Secondaire
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2008
Session normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (3 points)

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=x+\frac{1}{e^x+1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1.a) Dresser le tableau de variation de f. **(1 pt)**

b) Démontrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera. **(0,5 pt)**

2. Démontrer et interpréter géométriquement chacune des relations suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+1))=0$; **(0,25 pt)**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$; **(0,25 pt)**

c) $\forall x\in\mathbb{R};\quad x\le f(x)\le x+1$; **(0,25 pt)**

d) $\forall x\in\mathbb{R};\quad f(-x)+f(x)=1$; **(0,25 pt)**

e) $f(-0,7)\times f(-0,6)<0$. **(0,25 pt)**

3. Construire la courbe (C). **(0,25 pt)**

Exercice 2 (3 points)

Pour tout entier naturel $n\in IN^*$ on pose : $U_n=\int_1^e x^3(\ln x)^n dx$.

1.a) Démontrer en utilisant une intégration par parties que : $U_1=\frac{3e^4+1}{16}$. **(1 pt)**

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ? **(0,5 pt)**

2.a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n\ge 2$ on a: $4U_n+nU_{n-1}=e^4$. **(0, 5 pt)**

b) En déduire le calcul de U_2 et U_3. **(0, 5 pt)**

3.a) Démontrer que pour tout entier $n\in IN^*$ on a: $\frac{e^4}{n+5}\le U_n\le\frac{e^4}{n+4}$. **(0,25 pt)**

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(nU_n)$. **(0,25 pt)**

Exercice 3 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z)=z^3-(5+6i)z^2+(-4+14i)z+8-8i$.

1.a) Calculer $P(1)$. **(0,5 pt)**

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$. **(1,25 pt)**

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère quatre points A, B, C et G tels que : $z_A=2i$, $z_B=1$, $G=\text{bar}\{(A,2),(B,-2),(C,-1)\}$ et $z_G=6$.

a) Calculer l'affixe z_C du point C et montrer que le triangle ABC est rectangle en A. Placer les points A, B, C et G sur la figure. **(1 pt)**

b) Déterminer puis construire les deux ensembles Γ_1 et Γ_2 des points M du plan définis par :

$$M\in\Gamma_1\Leftrightarrow 2MA^2-2MB^2-MC^2=-10$$ **(0,5 pt)**

$$M\in\Gamma_2\Leftrightarrow MA^2-MB^2=-5.$$ **(0, 5 pt)**

c) Que peut-on dire à propos de la position relative des deux ensembles Γ_1 et Γ_2 ? **(0,25 pt)**

Exercice 4 (4 points)

1) On considère la fonction u définie sur $]1;+\infty[$ par : $u(x)=\frac{1}{\ln x}$.

Dresser le tableau de variation de u. (1 pt)

2) On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=e^{u(x)}=e^{\frac{1}{\ln x}}$.

Démontrer que f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et dresser son tableau de variation. (1 pt)

3) Pour tout entier naturel $n\in \mathbb{N}^*$ on pose : $F_n(x)=\int_x^{x+n} f(t)dt=\int_x^{x+n} e^{\frac{1}{\ln t}}dt$ où $x\in]1;+\infty[$.

a) Montrer que : $\forall x\in]1;+\infty[;\quad nf(x+n)\le F_n(x)\le nf(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$. (0, 5 pt)

b) Montrer que : $\forall x>0;\quad e^x>1+x$. En déduire que : $\forall t>1;\quad 0<\ln t<t-1$. (0, 5 pt)

c) Montrer que : $\forall x\in]1;+\infty[;\quad F_n(x)-n>\ln\left(\frac{x+n-1}{x-1}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to1^+} F_n(x)$. (0, 5 pt)

d) Dresser le tableau de variation de F_n. (0,25 pt)

e) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction F_1 dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, (cas $n=1$). (0,25 pt)

Exercice 5 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABE direct rectangle et isocèle en A. Soient F et G les points tels que le quadrilatère $AEFG$ soit un carré direct. Les points I, O et C sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BE]$ et $[EA]$. Le point J est le symétrique de I par rapport à O.

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes (On pourra prendre (AB) horizontale). (1 pt)

b) Démontrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et E en A. (1 pt)

c) Déterminer l'angle et le centre de r. (0, 5 pt)

d) Déterminer $r(J)$. (0,25 pt)

2.a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s qui transforme C en A et A en B. (0, 5 pt)

b) Déterminer l'angle et le rapport de s. (0,5 pt)

c) Montrer que $s(E)=G$ et déterminer l'image du carré $COJE$ par la similitude directe s. (0,75 pt)

3) Soit Ω le centre de la similitude s.

a) Montrer que le point Ω appartient aux cercles de diamètres $[JF]$, $[EG]$, $[CA]$ et $[AB]$. (0,75 pt)

b) Démontrer que les deux cercles de diamètres $[JF]$ et $[AB]$ sont tangents en Ω. (0,25 pt)

4. On considère les deux cercles Γ et Γ' passant par Ω et de centres respectifs A et B. Soit D l'intersection de ces deux cercles autre que Ω.

a) Démontrer que $s(\Gamma)=\Gamma'$. En déduire que les points Ω, A, B et D sont cocycliques. (0,25 pt)

b) Soit M un point de Γ distinct de Ω et de D. On pose $s(M)=M'$. Démontrer que les points M, M' et D sont alignés. (0,25 pt)

Fin.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction de l'Enseignement Secondaire
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2008
Session complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose:

$$P(z)=z^3-(4+8i)z^2+(-16+20i)z+24+8i.$$

1.a) Calculer $P(2i)$. **(0,5pt)**

b) Déterminer les complexes α et β tels que pour tout complexe z on a:

$P(z)=(z-2i)(z^2+\alpha z+\beta)$ puis résoudre l'équation $P(z)=0$. **(1pt)**

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=2+2i$ et $z_B=2i$ et le cercle Γ de diamètre $[OA]$.

Soit M un point variable appartenant au cercle Γ et distinct des points O et A. On considère les deux triangles AEM et OMF directs, isocèles et rectangles respectivement en A et en O. On désigne par G le centre de gravité du triangle OAM et on appelle e, f, g et m les affixes respectives des points E, F, G et M.

a) Construire une figure et démontrer que, quelque soit le point M choisi sur le cercle Γ, on a $|m-1-i|=\sqrt{2}$. **(1pt)**

b) Écrire en fonction de m chacun des nombres complexes e, f et g. **(0,75pt)**

c) Démontrer que le milieu H du segment $[EF]$ est un point de Γ indépendant de la position du point M sur Γ. **(0,25pt)**

d) Déterminer et représenter les lieux géométriques des points E, F et G lorsque M décrit Γ. **(0,25pt)**

e) Préciser la position de M pour laquelle la droite (EF) est tangente au cercle Γ. Déterminer alors l'affixe du point E. **(0,25pt)**

Exercice 2 (4 points)

1. Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\ U_n=\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx,\ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) En posant $x=\tan t$, où $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, montrer que $U_0=\frac{\pi}{4}$. **(0,75pt)**

b) Montrer que (U_n) est positive et décroissante en déduire qu'elle est convergente. **(0,75pt)**

c) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+1}$ en déduire U_1 et U_2. **(0,5pt)**

d) Donner un encadrement de U_n qui permet de calculer la limite de U_n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **(0,5pt)**

2. Soit (V_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} V_0=\int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\ V_n=\int_0^1 (2n+1)x^{2x}\ln(1+x^2)dx,\ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) En utilisant une intégration par parties démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$ on a :

$$V_n = \ln 2 - 2U_{n+1}.$$ **(0,5pt)**

b) En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$. **(0,5pt)**

c) Déduire de ce qui précède les variations de (V_n) et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$. **(0,5pt)**

<u>Exercice 3</u> (4 points)

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(0,75pt)**

2. Soit f_k la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_k(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} - kx$ où k est un paramètre réel, $k \in [0;1]$ et soit (C_k) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

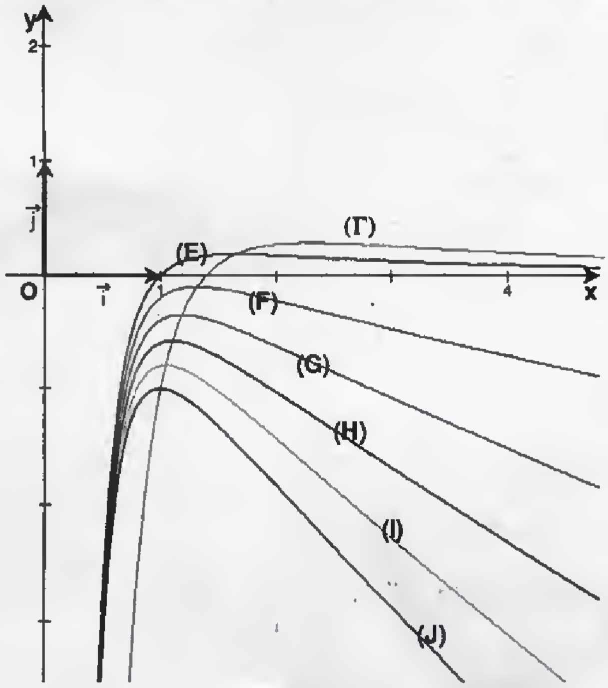
a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f_k(x)$. En déduire les équations des asymptotes éventuelles à (C_k). **(0,75pt)**

b) Montrer que l'équation : $1 - kx^3 - 2\ln x = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+^*$, une unique solution α_k et que $1 \leq \alpha_k \leq \sqrt{e}$. **(0,5pt)**

c) Calculer $f_k'(x)$ et dresser le tableau de variation de f_k. **(0,5pt)**

3.a) Etudier la position relative des courbes (C_k) et $(C_{k'})$ où k et k' sont deux réels avec $0 \leq k < k' \leq 1$. **(0,5pt)**

b) Sur la figure ci-dessous on a représenté les courbes (C_k) pour $k \in \{0;\ 0,2;\ 0,4;\ 0,6;\ 0,8;\ 1\}$. Reconnaître celle qui représente (C_0), $(C_{0,2})$ et $(C_{0,8})$. **(0,5pt)**



4. Soit M_k le point de (C_k) en lequel la tangente est horizontale. Les points M_k sont situés sur la courbe (Γ) (voir figure ci-dessus), donner une équation cartésienne de (Γ). **(0,5pt)**

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan orienté on considère un carré $\mathbf{ABCD}$ de sens direct de coté $\mathbf{a}$, $(\mathbf{a}>\mathbf{0})$.

Les points $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont définis respectivement par : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure (on prendra $(\mathbf{AB})$ horizontale) **(0,5pt)**

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation $\mathbf{r}$ telle que $\mathbf{r(A)=B}$ et $\mathbf{r(E)=F}$. **(0,5pt)**

b) Déterminer un angle et le centre de la rotation $\mathbf{r}$. **(0,5pt)**

c) Montrer que $\mathbf{EFGH}$ est un carré et calculer son aire en fonction de $\mathbf{a}$. **(0,5pt)**

3. Soit $\mathbf{s}$ la similitude directe de centre $\mathbf{O}$ qui transforme $\mathbf{A}$ en $\mathbf{E}$.

a) Montrer que $\mathbf{s(B)=F}$ puis déterminer $\mathbf{s(C)}$ et $\mathbf{s(D)}$. **(0,75pt)**

b) Calculer le rapport de $\mathbf{s}$. **(0,25pt)**

c) Soit α une mesure de l'angle de $\mathbf{s}$ déterminer la valeur exacte de $\cos\alpha$. **(0,25pt)**

4. Soient $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ les points définis par :

$\mathbf{I}$ l'intersection des segments $[\mathbf{AG}]$ et $[\mathbf{BH}]$;

$\mathbf{J}$ l'intersection des segments $[\mathbf{BH}]$ et $[\mathbf{CE}]$;

$\mathbf{K}$ l'intersection des segments $[\mathbf{CE}]$ et $[\mathbf{DF}]$;

$\mathbf{L}$ l'intersection des segments $[\mathbf{DF}]$ et $[\mathbf{AG}]$.

a) Montrer que $\mathbf{IJKL}$ est un carré. **(0,25pt)**

b) Montrer que $\mathbf{K=bar\{(D,4);(F,9)\}=bar\{(C,7);(E,6)\}}$. **(0,25pt)**

c) En déduire l'aire du carré $\mathbf{IJKL}$ en fonction de $\mathbf{a}$. **(0,25pt)**

Exercice 5 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral $\mathbf{ABC}$ direct de coté $\mathbf{a}$, $(\mathbf{a}>\mathbf{0})$.
Soient $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ les images respectives de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ par la symétrie de centre $\mathbf{C}$. Soit $\mathbf{I}$ le milieu du segment $[\mathbf{BC}]$.

1. Faire une figure (qui sera complétée au fur et à mesure) illustrant les données précédentes. **(0,75pt)**

2.a) Démontrer qu'il existe une unique similitude directe $\mathbf{s_1}$ de centre $\mathbf{B}$ et qui transforme $\mathbf{D}$ en $\mathbf{A}$. **(0,5pt)**

b) Déterminer l'angle et le rapport de $\mathbf{s_1}$. **(0,5pt)**

c) Soit $\mathbf{M}$ un point de la droite $(\mathbf{DE})$ distinct de $\mathbf{D}$ et de $\mathbf{E}$. Déterminer le lieu géométrique du point $\mathbf{M'}$ image de $\mathbf{M}$ par $\mathbf{s_1}$. Construire $\mathbf{M'}$ à partir d'une position donnée de $\mathbf{M}$ sur $(\mathbf{DE})$ puis démontrer que les points $\mathbf{M'}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{E}$ sont cocycliques quelque soit la position de $\mathbf{M}$ sur $(\mathbf{DE})$. **(0,75pt)**

3. Soit $\mathbf{s_2}$ la similitude directe qui transforme $\mathbf{I}$ en $\mathbf{B}$ et $\mathbf{E}$ en $\mathbf{D}$.

a) Déterminer l'angle et le rapport de $\mathbf{s_2}$. **(0,5pt)**

b) Déterminer le centre de $\mathbf{s_2}$. **(0,5pt)**

4. On pose $\mathbf{f=s_1\circ s_2}$.

a) Montrer que $\mathbf{f}$ est une similitude directe puis donner son angle et son rapport. **(0,25pt)**

b) Montrer que le centre de $\mathbf{f}$ est le point d'intersection du cercle de diamètre $[\mathbf{BE}]$ avec un deuxième cercle Γ que l'on déterminera. Construire ce centre. **(0,25pt)**

Fin.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et des Concours
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

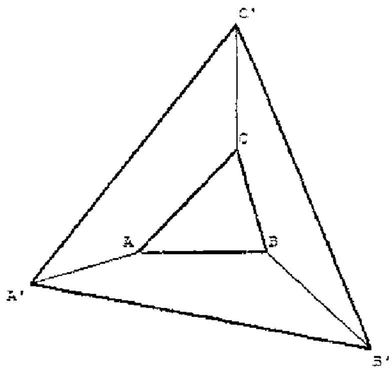
Baccalauréat 2007

Session normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. On considère le triangle direct ABC d'angles aigus et de centre de gravité G. On construit les trois segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ tels que :



$AA' = BC$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, [1]

$BB' = CA$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BB'}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, [2]

$CC' = AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC'}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ [3]

On note a, b, c, a', b' et c' les affixes respectives des points A, B, C, A', B' et C'. On considère la rotation vectorielle φ d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

L'objectif de cet exercice est l'étude de la configuration précédente en utilisant deux méthodes.

A) Dans cette partie on se propose de démontrer, par deux méthodes, que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont de même centre de gravité.

1. Méthode 1 : Utilisation des nombres complexes
   a) Montrer que : $a' = a - ib + ic$. *(0,5 pt)*
   b) Ecrire b' et c' en fonction de a, b et c. *(0,5 pt)*
   c) En déduire que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont de même centre de gravité. *(0,25 pt)*

2. Méthode 2 : Utilisation d'une rotation vectorielle
   a) Vérifier que $\varphi\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right) = \vec{0}$. *(0,5 pt)*
   b) En déduire que $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$. *(0,25 pt)*
   c) En déduire que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont de même centre de gravité. *(0,25 pt)*

B) L'objectif de cette partie est de construire le triangle ABC connaissant le triangle $A'B'C'$.

1. Méthode 1 : Utilisation des nombres complexes
   a) Démontrer que $\frac{c - b'}{c - a'} = i$, en déduire la nature du triangle $A'B'C$. *(0,5 pt)*
   b) En déduire les deux résultats similaires au résultat précédent. *(0,25 pt)*

2. Méthode 2 : Utilisation d'une rotation vectorielle
   a) Démontrer que $\varphi\left(\overrightarrow{CB'}\right) = \overrightarrow{CA'}$, en déduire la nature du triangle $A'B'C$. *(0,5 pt)*
   b) Donner les résultats similaires au résultat précédent. *(0,25 pt)*

3. Construire, en le justifiant, le triangle ABC à partir d'un triangle $A'B'C'$ donné d'angles aigus. *(0,25 pt)*

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le losange direct $\mathbf{ABCD}$ de centre $\mathbf{I}$ tel que $\mathbf{IB} = 2\mathbf{IC} = 2\mathbf{a}$.
On désigne Γ_1 le cercle de centre $\mathbf{C}$ et de rayon $\mathbf{CI} = \mathbf{a}$ et par Γ_2 le cercle de centre $\mathbf{B}$ et de rayon $\mathbf{BI} = 2\mathbf{a}$.

1.a) Faire une figure (On pourra prendre $(\mathbf{BD})$ horizontale). *(0,5 pt)*

b) Placer sur la figure précédente les points $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ tels que : $\overrightarrow{\mathbf{EB}} + 2\overrightarrow{\mathbf{EC}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathbf{FB}} - 2\overrightarrow{\mathbf{FC}} = \vec{0}$. *(0,5 pt)*

2. On considère l'ensemble Γ_3 des points $\mathbf{M}$ du plan tels que : $\dfrac{\mathbf{MB}}{\mathbf{MC}} = 2$.

a) Vérifier que les points $\mathbf{I}$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ appartiennent à Γ_3. *(0,5 pt)*

b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_3. *(0,25 pt)*

3. Montrer qu'il existe une unique rotation $\mathbf{r}$ qui transforme $\mathbf{C}$ en $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ en $\mathbf{I}$. Déterminer l'angle et le centre Ω de cette rotation. Placer Ω sur la figure. *(0,75 pt)*

4.a) Montrer qu'il existe une unique similitude $\mathbf{s}$ qui transforme $\mathbf{C}$ en $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ en $\mathbf{D}$. *(0,25 pt)*

b) Montrer que $\mathbf{s}(\mathbf{I}) = \mathbf{I}$. *(0,25 pt)*

c) Donner les éléments caractéristiques de $\mathbf{s}$. *(0,5 pt)*

d) Montrer que $\mathbf{s}(\Gamma_1) = \Gamma_2$. *(0,25 pt)*

5. On pose $\mathbf{f} = \mathbf{h} \circ \mathbf{r}$, où $\mathbf{h}$ est l'homothétie de centre $\mathbf{B}$ et de rapport 2, et $\mathbf{r}$ la rotation définie en 3).

a) Montrer que $\mathbf{f} = \mathbf{s}$. *(0,25 pt)*

b) Donner la forme réduite de $\mathbf{s}$. *(0,25 pt)*

6. Soit $\mathbf{s'}$ une similitude directe qui transforme Γ_1 en Γ_2.

a) Montrer que toutes les similitudes $\mathbf{s'}$ sont de même rapport $\mathbf{k'}$ que l'on déterminera. *(0,25 pt)*

b) Déterminer le lieu géométrique des centres des similitudes $\mathbf{s'}$. *(0,25 pt)*

c) Dans le cas où $\mathbf{s'}$ est une homothétie, donner les positions possibles du centre et les valeurs du rapport de cette homothétie. *(0,25 pt)*

Problème (11 points)

Partie A

Soit $\mathbf{f}$ la fonction de variable réelle $\mathbf{x}$ définie par : $\mathbf{f(x)} = \mathbf{ln}\left|\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{x-1}}\right|$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R} - \{0;1\}$.

Soit $\mathbf{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ d'unité $\mathbf{2cm}$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\mathbf{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to 1}\mathbf{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\mathbf{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\mathbf{f(x)}$. Interpréter graphiquement ces limites. *(1 pt)*

b) Déterminer $\mathbf{f'(x)}$ où $\mathbf{f'}$ est la fonction dérivée de $\mathbf{f}$. *(0,5 pt)*

c) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. *(0,5 pt)*

2.a) Pour tout $\mathbf{x}$ appartenant à $\mathbb{R} - \{0;1\}$, montrer que $\mathbf{f(x)} + \mathbf{f(1-x)} = 0$. Interpréter ce résultat. *(0,5 pt)*

b) Tracer $\mathbf{C}$ dans le repère $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$. *(0,5 pt)*

3. Pour $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^*$ on définit, sur $\mathbb{R} - \{0;1\}$, la fonction $\mathbf{f_k}$ par : $\mathbf{f_k(x)} = \mathbf{ln}\left|\dfrac{\mathbf{kx}}{\mathbf{x-1}}\right|$.

Soit $\mathbf{C_k}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ d'unité $\mathbf{2cm}$.

a) Montrer que le point $\Omega\left(\dfrac{1}{2}; \ln|k|\right)$ est un centre de symétrie de $\mathbf{C_k}$. *(0,25 pt)*

b) Montrer que $\mathbf{C_k}$ est l'image de $\mathbf{C}$ par une transformation simple que l'on déterminera. *(0,5 pt)*

c) Que peut on dire des courbes $\mathbf{C_k}$ et $\mathbf{C_{-k}}$? *(0,25 pt)*

d) En déduire que si $|k| \neq |k'|$, alors C_k et $C_{k'}$, n'ont pas de points communs. *(0,25 pt)*

e) Dresser, en utilisant 1), le tableau de variation de la fonction f_e, (le cas où $k = e$), et construire sa courbe. *(0,5 pt)*

4. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I =]0;1[$. Ce qui signifie que $h(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

a) Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. *(0,5 pt)*

b) Soit h^{-1} la fonction réciproque de h. Dresser le tableau de variation de h^{-1}. Expliciter $h^{-1}(x)$. *(0,5 pt)*

c) Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution α. Vérifier que $0,5 < \alpha < 1$. *(0,25 pt)*

Partie B

Soit g la fonction de variable réelle x définie par : $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$; $x \in IR$.

1.a) Donner l'expression de $h \circ g(x)$, pour tout réel x ; où h est la fonction définie au A 4). Interpréter. *(0,5 pt)*

b) Déterminer $g'(x)$ où g' est la fonction dérivée de g puis déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in IR,\ g'(x) = a\frac{e^x}{e^x + 1} + b\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)^2.$$ *(1 pt)*

c) Vérifier que : $\forall x \in IR$, $g''(x) = g'(x) - 2g(x)g'(x)$. *(0,5 pt)*

2. Pour tout entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^\alpha g^n(t)dt$ où α est le réel trouvé en A.4.c)

a) Calculer I_1. *(0,5 pt)*

b) Montrer que : $\forall n \in IN^*$, on a $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} - \alpha^n\right)$. *(0,5 pt)*

c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive, que peut on en déduire ? *(0,5 pt)*

3.a) Montrer que : $\forall n \in IN^*$, $\frac{\alpha}{2^n} \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$. *(0,5 pt)*

b) En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n$. *(0,5 pt)*

4. a) Montrer que : $I_n = -\ln(2(1-\alpha)) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$. *(0,25 pt)*

b) En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$. *(0,25 pt)*

Fin.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et des Concours
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2007

Session Complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiqu
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Dans le plan orienté P, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O et de coté a $(a > 0)$. On note E le symétrique de C par rapport à D.

1.a) Construire le carré puis déterminer l'ensemble des points M du plan P dans chacun des cas suivants : *(1,5 pt)*

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = a$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$$

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}).(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{ME}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\right\|$$

b) Quel constat peut on faire à propos de ces quatre ensembles. *(0,25 pt)*

2. Pour tout réel k, on définit l'application f_k du plan P dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MC}$.

a) Pour quelles valeurs de k, l'application f_k est une translation? Déterminer alors son vecteur. *(0,5 pt)*

b) On suppose que $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. Montrer que f_k admet un unique point invariant Ω_k. Reconnaître alors f_k et donner ces éléments caractéristiques. *(0,75 pt)*

c) Déterminer et construire le lieu géométrique des points Ω_k lorsque k décrit $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. *(0,5 pt)*

d) Pour $k = \frac{1}{2}$; déterminer et construire le lieu géométrique du point G centre de gravité du triangle DMM' lorsque M décrit le cercle Γ de diamètre $[CE]$. *(0,5 pt)*

Exercice 2 (6 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O et de coté a $(a > 0)$.
I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1.a) Faire une figure (On pourra prendre (AB) horizontale). *(0,25 pt)*

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en O et I en K. *(0,25 pt)*

c) Déterminer l'angle et le centre de cette rotation. *(0,5 pt)*

2.a) Vérifier que $r = S_{(OJ)} \circ S_{(LI)} = S_{(DA)} \circ S_{(LK)}$. *(0,5 pt)*

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g telle que : $g = S_{(OJ)} \circ S_{(LI)} \circ S_{(LK)}$. *(0,5 pt)*

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme O en I et C en B *(0,25 pt)*

b) Déterminer le rapport et l'angle de s_1. *(0,5 pt)*

c) Vérifier que : $s_1(A) = A$. *(0,25 pt)*

4. Soit s_2 la similitude directe qui transforme A en O et B en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de s_2. *(0,5 pt)*

b) Montrer que le centre T de s_2, appartient au cercle (C_1) de centre C et de rayon CD et au cercle (C_2) de diamètre $[AB]$. Placer T. *(0,5 pt)*

5. On pose $h = s_2 \circ s_1^{-1}$; pour tout point M du plan on pose $s_1(M) = M'$ et $s_2(M) = M''$.

a) En utilisant h, montrer que le milieu F du segment $[M'M'']$ est un point fixe que l'on déterminera. En déduire que le quadrilatère $AM'OM''$ est un parallélogramme. *(0,5 pt)*

b) Montrer que $s_1(O) = L$. *(0,25 pt)*

c) En déduire que les points A, F, T et L sont cocycliques. *(0,25 pt)*

6.a) Déterminer la position des points M' et M'' dans chacun des cas suivants: $M = A$, $M = F$, $M = T$ et $M = L$. *(0,5 pt)*

b) On suppose que M est distinct des points A, L, F et T.

Montrer que $(\overline{MM'}, \overline{MF}) = \frac{-\pi}{4} + (\overline{MA}, \overline{MF})[\pi]$. *(0,25 pt)*

c) En déduire l'ensemble Γ des points M du plan tels que les points M, M' et M'' soient alignés. Tracer Γ. *(0,25 pt)*

Problème (10 points)

Partie A (5 points)

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = x - n \ln x$.

Soit C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1. Dans cette question on suppose que $n = 1$, et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ on a : $f_1(x) = x - \ln x$

a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f_1(x)$. Donner une interprétation graphique. *(0,75 pt)*

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f_1(x)$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} (f_1(x) - x)$. Donner une interprétation graphique. *(0,75 pt)*

c) Dresser le tableau de variation de f_1. *(0,75 pt)*

d) Tracer C_1 dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. *(0.25 pt)*

2. Dans cette question, on suppose que $n \geq 1$.

a) Dresser le tableau de variation de f_n. *(0,5 pt)*

b) Déterminer les points communs à toutes les courbes C_n, puis étudier les positions relatives de C_n et C_{n+1}. *(0,5 pt)*

c) Montrer que les tangentes aux courbes C_n aux points d'abscisses $x_0 = e$ passent par un point commun que l'on déterminera. *(0,25 pt)*

3. On considère les points M_0, M_1 et M_n, de même abscisse x, et appartenant respectivement aux courbes C_0, C_1 et C_n.

a) Vérifier que pour tout $x > 0$ on a : $f_n(x) - f_0(x) = n(f_1(x) - f_0(x))$. *(0,5 pt)*

b) En déduire que : $\overline{M_0M_n} = n\overline{M_0M_1}$. *(0,25 pt)*

c) Tracer C_0 dans le repère précédent et donner une méthode géométrique simple pour la construction de C_n, point par point, à partir de C_0 et C_1. Construire alors la courbe C_2 dans ce repère. *(0,5 pt)*

Partie B (5 points)

Soit g la fonction de variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f_0(x)}{f_1(x)} = \dfrac{x}{x - \ln x}\ ; & x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Soit Γ la courbe de g dans un nouveau repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1.a) Déduire de A.1.c) que le domaine de définition de g est $D_g = [0, +\infty[$. *(0,5 pt)*

b) Montrer que la fonction g est continue sur D_g. *(0,5 pt)*

2.a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. Donner une interprétation graphique. *(0,25 pt)*

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique. *(0,5 pt)*

3.a) Calculer $g'(x)$ pour $x > 0$. *(0,5 pt)*

b) Dresser le tableau de variation de g puis construire sa courbe Γ. *(0,5 pt)*

4. A partir d'un encadrement de $g(x)$ sur l'intervalle $[1; e]$; démontrer que : $\forall x \in [1; e]$ on a $0 \le \dfrac{\ln x}{x} \le \dfrac{1}{e}$. *(0,25 pt)*

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite numérique (U_n) par :

$$U_n = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx \text{ pour } n > 0\ ; \qquad \text{et } U_0 = \int_1^e dx$$

a) Calculer U_0 et U_1. *(0,25 pt)*

b) Montrer que (U_n) est positive et décroissante. Que peut on en conclure? *(0,25 pt)*

c) Montrer que pour tout entier naturel $n > 1$ on a, $0 \le U_n \le \dfrac{e-1}{e^n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. *(0,25 pt)*

6) On pose $I = \int_1^e g(x)dx = \int_1^e \dfrac{x}{x - \ln x} dx$ et pour tout entier naturel n : $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$.

a) Montrer que : $$S_n = \int_1^e \frac{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\ln x}{x}\right)} dx.$$ *(0,25 pt)*

b) Montrer que : $I - S_n = \int_1^e \dfrac{x}{x - \ln x}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{n+1} dx$. *(0,25 pt)*

c) En utilisant B.4), montrer que : $0 \le I - S_n \le \dfrac{1}{e^{n-1}}$. En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = I$. *(0,25 pt)*

d) Montrer que : $S_n \le I \le S_n + \dfrac{1}{e^{n-1}}$. *(0,25 pt)*

e) Pour quelles valeurs de n ; S_n est une valeur approchée de I à 10^{-2} ? *(0,25 pt)*

Fin.

Baccalauréat 2007 Session Complémentaire Epreuve de Mathématiques Séries : C & TMGM 3/3

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Enseignement Fondamental et Secondaire
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Baccalauréat 2006

Session normale

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 (4 points)

Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole (P) de foyer $F(0,2)$ et de directrice la droite (D) d'équation : $y = 4$. On désigne par (Δ) la droite parallèle à (D) et passant par le point F.

1. Soit M un point de (P) d'ordonnée inférieure strictement à 2 et H le projeté orthogonal de M sur (Δ).
 a) Montrer que : $MF - MH = 2$. **(0,5pt)**
 b) En déduire que le cercle de centre M et de rayon MH est tangent au cercle de diamètre $[AB]$ où A et B sont les points d'intersection de (P) avec la droite (Δ). **(0,5pt)**

2.a) Trouver une équation de (P) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ puis tracer (P). **(0,5pt)**
 b) Soit (D_m) une droite variable d'équation $y = mx + 2$ où m est un paramètre réel. La droite (D_m) coupe (P) en S et T. Montrer que, le milieu I de $[ST]$, appartient à une conique fixe (P') dont on donnera une équation dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. **(0,5pt)**

3. Soit l'ellipse (E) d'excentricité $e = \frac{1}{3}$, de foyer $F(0,2)$ et de directrice associée la droite (D).
 a) Justifier que (P) et (E) n'ont aucun point commun. **(0,5pt)**
 b) Trouver une équation de (E) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. **(0, 5pt)**
 c) Déterminer les sommets de (E), son deuxième foyer F' et sa deuxième directrice (D'). **(0,5pt)**
 d) Tracer F', (D') et (E) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. **(0,5pt)**

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O. On désigne par I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$ et $[BC]$.

1. Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui transforme D en A et J en I. Vérifier que $f = S_{(DB)} \circ t_{\overrightarrow{JK}}$ où $t_{\overrightarrow{JK}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{JK}$ et $S_{(DB)}$ est la réflexion d'axe (DB). **(0,5pt)**
2. Caractériser l'antidéplacement f :
 a) En décomposant convenablement la translation $t_{\overrightarrow{JK}}$ **(0,5pt)**
 b) En exploitant l'écriture complexe de f dans le repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ **(0,5pt)**
3. Montrer que : $f(A) = B$ **(0,25pt)**
4. On pose : $g = S_{(AI)} \circ f$. Montrer que g est un déplacement que l'on caractérisera. **(0,5pt)**
5. Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.
 a) Donner le rapport et un angle de S. **(0,5pt)**
 b) Préciser $S[(BC)]$ et $S[(BD)]$, en déduire $S(B)$. **(0,25pt)**
 c) Montrer que : $S(A) = J$. **(0,25pt)**
 d) Soit Ω le centre de S. Montrer que les points Ω, I, B et C sont cocycliques. **(0,25pt)**

6.a) Donner la nature de $S \circ S$ et préciser ses éléments caractéristiques. **(0,5pt)**
 b) En déduire que Ω est le barycentre des deux points $(B, 1)$ et $(J, 4)$ puis construire Ω. **(0,25pt)**

7. Soit E le point du plan défini par : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BA}$ et soit S' la similitude directe de centre B qui transforme C en E. Caractériser $S \circ S'$ et montrer que $\Omega E = 2\Omega D$ et que $(\Omega E) \perp (\Omega D)$. **(0,75pt)**

Problème (11 points)

Partie A

Soit $\mathbf{f}$ la fonction de variable réelle $\mathbf{x}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} & x \geq 0 \\ \dfrac{-\ln(1-x)}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité **2cm**.

1. Etudier la continuité de f en 0. **(0,25pt)**
2. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$. Donner la valeur de la dérivé à droite de 0. **(0,25pt)**
3. Soit $\mathbf{h}$ un réel strictement négatif. On définit sur $]-\infty, 0]$ la fonction $\mathbf{u}$ par :

$$u(x) = \left(\frac{\ln(1-h)+h}{h^2}\right)x^2 - \ln(1-x) - x$$

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel c appartenant à $]h, 0[$ tel que :

$$\frac{\ln(1-h)+h}{h^2} = \frac{1}{2(c-1)}.$$ **(0,5pt)**

b) Prouver que : $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\ln(1-h)+h}{h^2} = -\dfrac{1}{2}$ **(0,25pt)**

c) Prouver que f est dérivable à gauche en 0 et donner la valeur de la dérivé à gauche en 0. **(0,25pt)**

d) f est elle dérivable en 0 ? **(0,25pt)**

4.a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. En déduire le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$. **(0,25pt)**

b) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$. **(0,25pt)**

c) Pour $x \leq 0$, on pose : $v(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Etablir le tableau de variation de la fonction v puis déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x < 0$. **(0,25pt)**

d) Dresser le tableau de variation de f en y précisant les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0,25pt)**

5. Tracer la courbe (C_f) dans le repère précédent $(O; \vec{i}, \vec{j})$. **(0,25pt)**

Partie B

1. Justifier que f possède des primitives sur $[0, +\infty[$. **(0,25pt)**
2. Soit la fonction G définie sur $I = [\pi/4, \pi/2[$ par : $G(x) = \int_0^{\ln(\tan x)} f(t)dt$.

a) Calculer $G(\pi/4)$ et $G'(x)$ pour tout x de I. **(0,5pt)**

b) Prouver que : $\forall x \in I, \quad G(x) = x - \pi/4$. **(0,25pt)**

c) Soit β un réel positif, justifier l'existence d'un unique réel α de I tel que : $\beta = \ln(\tan\alpha)$. **(0,25pt)**

d) On suppose que si β tend vers $+\infty$ alors α tend vers $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer en cm^2, l'aire $A(\beta)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta$ puis calculer $\lim\limits_{\beta \to +\infty} A(\beta)$. **(0,75pt)**

Partie C

Soit $\mathbf{g}$ la restriction de $\mathbf{f}$ sur $[0,+\infty[$.

1.a) Montrer que $\mathbf{g}$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle $\mathbf{J}$ que l'on déterminera. **(0,5pt)**

b) Tracer, dans le repère précédent $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe $(C_{g^{-1}})$ représentative de g^{-1}. **(0,25pt)**

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J. **(0,25pt)**

2. Pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$, on considère les fonctions h_n et k_n définies sur $]-\infty, 0[$ par :

$$h_n(x)=\int_1^{f(x)} t(\ln t)^n dt \qquad \text{et} \qquad k_n(x)=\int_1^{f(x)} t^n(\ln t)dt.$$

a) Calculer $h_1(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} h_1(x)$. **(0,5pt)**

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$$h_{n+1}(x)=\frac{1}{2}[f(x)]^2[\ln(f(x))]^{n+1}-\frac{n+1}{2}h_n(x) \quad \text{et} \quad k_n(x)=\frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}([f(x)]^{n+1}-1).$$ **(1pt)**

c) Montrer, par récurrence sur $\mathbf{n}$, que la fonction h_n admet en $-\infty$ une limite finie non nulle L_n. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\quad L_n=(-1)^n\dfrac{n!}{2^{n+1}}$. **(0,5pt)**

d) Montrer que : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} k_n(x)=\dfrac{1}{(n+1)^2}$. **(0,25pt)**

Partie D

Dans cette partie on se propose de calculer la limite de la suite (S_n) définie ci-dessous.

Pour tout $n\geq 1$, posons $u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$ et $S_n=1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}u_i=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$.

On définit la fonction Φ, dérivable sur $[0,\pi/2]$ et dont la fonction dérivée est continue sur $[0,\pi/2]$ par :

$$\Phi(t)=\frac{\frac{t^2}{\pi}-t}{\sin t} \qquad t\in\,]0,\pi/2] \text{ et } \Phi(0)=-1.$$

1. Sans calculer $\Phi'(t)$, justifier l'existence d'un réel $\mathbf{M}$ tel que : $|\Phi'(t)|\leq M$, $\forall t\in[0,\pi/2]$. **(0,25pt)**

2. Pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$, on pose: $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\sin((2n+1)t)dt$.

a) En intégrant par parties, montrer que : $\quad I_n=\dfrac{-1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(t)\cos((2n+1)t)dt$. **(0,5pt)**

b) Montrer alors que : $|I_n|\leq\dfrac{1}{(2n+1)}(1+\dfrac{\pi}{2}M)$ et en déduire que : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} I_n=0$. **(0,5pt)**

3. Soit $\mathbf{x}$ un réel de $]0,\pi/2]$ et soit $\mathbf{n}$ un entier naturel non nul.

a) Exprimer la somme $\sum\limits_{k=1}^{n}e^{i(2kx)}$, en fonction de $\mathbf{n}$ et $\mathbf{x}$ (où $\mathbf{i}$ est le nombre complexe vérifiant : $i^2=-1$). **(0,5pt)**

b) En déduire que : $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2kx)=\dfrac{\sin((2n+1)t)}{2\sin t}-\dfrac{1}{2}$. **(0,25pt)**

4.a) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{t^2}{\pi}-t)\cos(2kt)dt=\frac{1}{4k^2}.$$ **(0,25pt)**

b) Déduire que $S_n=2I_n+\dfrac{\pi^2}{6}$ et calculer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$. **(0,5pt)**

Fin.

Baccalauréat
2006
Session complémentaire

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Exercice 1 *(5 points)*

Dans tout l'exercice

- Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$;
- a est un nombre réel strictement positif ;
- A est le point de coordonnées $(a;0)$;
- (D) est la droite d'équation $x = a$;
- f est une fonction réelle strictement positive de variable réelle t, définie sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

Pour chaque valeur du paramètre t, on note s_t l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point $M_t = s_t(M)$ d'affixe z_t telle que : $z_t = f(t)(\cos t + i\sin t)z$.

1.a) Quelle est la nature de l'application s_t ? Donner ses éléments caractéristiques. *(0,5pt)*

b) Donner les équations analytiques qui définissent s_t et celles qui définissent s_t^{-1} par rapport à $(O;\vec{u},\vec{v})$ (s_t^{-1} est l'application réciproque de s_t). *(0,5pt)*

2. Dans cette question, on pose : $f(t) = \dfrac{1}{\cos t}$ pour tout $t \in]-\pi/2,\pi/2[$.

a) Montrer que si $M \neq O$ alors $\forall\ t \in]-\pi/2,\pi/2[$, le triangle OMM_t est rectangle en M. *(0, 5pt)*

b) Le point M étant fixe, quel est l'ensemble $\Gamma(M)$ décrit par M_t lorsque t décrit $]-\pi/2,\pi/2[$? *(0, 5pt)*

c) Montrer que l'image de la droite (D) par s_t est une droite (D_t) dont on donnera une équation cartésienne dépendant seulement de a et de $\tan(t)$. *(0,5pt)*

3. Dans cette question, on pose : $f(t) = \cos t$ pour tout $t \in]-\pi/2,\pi/2[$.

a) Montrer que si $M \neq O$ alors $\forall\ t \in]-\pi/2,\pi/2[$ le triangle OMM_t est rectangle en M_t. *(0,25pt)*

b) Le point M étant fixe, quel est l'ensemble $\Gamma'(M)$ décrit par M_t lorsque t décrit $]-\pi/2,\pi/2[$? *(0,25pt)*

4. On suppose toujours que $f(t) = \cos t$ mais avec $t \neq 0$. On pose $A_t = s_t(A)$.

a) Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A_tM_t})$. *(0,5pt)*

b) Soit H_t le point d'intersection des droites (AM) et (A_tM_t). Montrer que les points O, H_t, A et A_t sont cocycliques. *(0,5pt)*

c) Montrer que les points O, H_t, M et M_t sont cocycliques. Quelle est la projection orthogonale de O sur la droite (AM) ? *(0,5pt)*

d) Soit (D_t) l'image de la droite (D) par s_t. Montrer que, lorsque t varie, (D_t) passe par un point fixe. *(0,5pt)*

Exercice 2 *(4 points)*

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante : $(E_n)\qquad (iz)^n = (z+2i)^n$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.

1.a) Déterminer et écrire sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_2), où z_1 est la solution telle que : $\mathrm{Re}(z_1) < 0$. *(0,5pt)*

b) Posons : $u = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}z_1$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $(u)^p + (\bar{u})^p = 2\cos\left(\dfrac{p\pi}{4}\right)$ (où $\bar{u}$ est le conjugué de u.) *(0,5pt)*

c) On considère l'application f définie de l'ensemble des nombres complexe sur lui-même par :

$$f(z) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$$

Montrer que: $f(z) = \dfrac{1}{2}\left[(1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n\right]$. *(0,5pt)*

d) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 0$. *(0,5pt)*

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ les deux points $A(-2i)$ et $M(z)$ où z est un nombre complexe.

a) Montrer que si z est solution de (E_n) alors $OM = AM$. *(0,5pt)*

b) En déduire que toute solution de (E_n) peut s'écrire sous la forme $a-i$ où a est un réel. *(0,5pt)*

3.a) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E_n). *(0,5pt)*

b) Montrer que les solutions de (E_n) peuvent s'écrire sous la forme :

$$z_k = -i + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{n}\right) \text{ où } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \textit{(0,5pt))}$$

Problème *(11 points)*

Partie A

Soit f la fonction numérique définie par: $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1.a) Déterminer l'ensemble D de définition de f. *(0,5pt)*

b) Montrer que f est une fonction impaire. *(0,5pt)*

c) Dresser le tableau de variations de f. *(0,5pt)*

d) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité **4 cm**. *(0,5pt)*

2.a) Montrer que f réalise une bijection de D sur $\mathbb{R}$. *(0,25pt)*

b) Soit g la réciproque de f. Montrer que pour tout réel x, $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. *(0,5pt)*

c) Tracer la courbe représentative (C') de g dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. *(0,5pt)*

3. Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre les deux courbes (C) et (C') et située dans le carré défini par : $-1 \le x \le 1$ et $-1 \le y \le 1$. *(0,25pt)*

Partie B

Pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \ge 0$, on pose : $I_n(x) = \int_0^x [g(t)]^n dt$ et on convient que $[g(t)]^0 = 1$.

1.a) Justifier l'existence de $I_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \ge 0$. *(0,5pt)*

b) Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$. *(0,5pt)*

c) Montrer que $\forall p \ge 1$ et $\forall x \ge 0$, on a : $0 \le I_{2p}(x) \le x(g(x))^{2p}$. *(0,5pt)*

d) Déduire que $\forall x \ge 0$, la suite $(I_{2p}(x))$ est convergente et calculer sa limite. *(0,5pt)*

2.a) Vérifier que : $\forall t \in \mathbb{R}$, on a : $[g(t)]^2 = 1 - g'(t)$ *(0,5pt)*

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \ge 0$, on a : $I_{n+2}(x) = I_n(x) - \frac{1}{n+1}[g(x)]^{n+1}$. *(0,5pt)*

c) Déduire alors que $\forall p \ge 1$ et $\forall x \ge 0$, on a :

$$I_{2p}(x) = x - \left[(g(x)) + \frac{1}{3}(g(x))^3 + \dots + \frac{1}{2p-1}(g(x))^{2p-1}\right] \quad \textit{(0.5pt)}$$

d) En utilisant les questions précédentes, calculer : $\lim\limits_{p\to+\infty}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2p-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1}\right]$ *(0,5pt)*

Partie C

Soit h la fonction numérique définie sur $]-1;1[$ par: $h(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt$.

1.a) Justifier la définition de h sur $]-1;1[$. *(0,5pt)*

b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $\frac{t^2}{1-t^2} = a + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{1+t}$ où a, b et c sont des réels à déterminer. *(0,5pt)*

c) En déduire que : $\forall x \in]-1;1[$, $h(x) = -x + f(x)$ où f est la fonction définie dans la **partie A**. *(0,25pt)* la fonction h et construire sa courbe représentative (C'') dans un nouveau repère orthonormé. *(0,5pt)*

er que : $\forall x > 0$ et $\forall k \in IN^*$, on a : $\ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln k$ *(0,25pt)*

duire que $\forall k \in IN^*$, $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln k$ et que $\forall k \in IN^*$, $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln(n!)$ *(0,5pt)*

duire que $\forall n \in IN^*$ $\ln(n!) \geq (n + \frac{1}{2}) \ln(n + \frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\ln 2$. *(0,25pt)*

$_n)_{n\geq 1}$ la suite définie sur IN^* par : $U_n = \ln(n!) - (n + \frac{1}{2})\ln(n) + n$.

er que : $\forall n \in IN^*$, $U_n - U_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$. *(0,25pt)*

er que $\forall n \in IN^*$, $U_n \geq \frac{1}{2}\ln 2$ *(0,25pt)*

re alors que la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ est convergente. *(0,25pt)*

Fin.

République Islamique de Maur nie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Baccalauréat 2005

Session normale

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. On pose : $P(z)=z^3-(5+7i)z^2+(-6+26i)z+24-24i$ où z est un nombre complexe.
  a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution imaginaire pure. **(0,25pt)**
  b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$. **(0,5pt)**
2. Soient les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.
  a) Placer les points A, B et C. Montrer que les points O, A, B et C sont cocycliques. **(0,5pt)**
  b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O;5),(A;-3),(C;4)\}$. Vérifier que G est le milieu de $[AB]$. **(0,5pt)**
  c) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z telle que le nombre $\frac{z-2}{z-4i}$ soit imaginaire pur. **(0,25pt)**
3. Pour tout point M du plan on pose $\varphi(M)=5MO^2-3MA^2+4MC^2$ et Γ_k l'ensemble des points M tels que $\varphi(M)=k$ où k est un réel.
  a) Discuter, suivant les valeurs de k, la nature de Γ_k. **(0, 5pt)**
  b) Reconnaître et construire Γ_{60}. **(0,5pt)**
4. Soit f l'application qui à tout point $M(x,y)$ d'affixe z associe le point $M'(x',y')$ d'affixe z' tel que : $z'=\frac{3z-\bar{z}}{4}$, ($\bar{z}$ est le conjugué de z) et soit Γ le cercle d'équation $(x-1)^2+(y-2)^2=5$.
  a) Ecrire x' et y' en fonction de x et y. **(0,25pt)**
  b) Donner une équation cartésienne de l'ensemble Γ' image du cercle Γ par l'application f. **(0,25pt)**
  c) Montrer que Γ' est une ellipse dont on déterminera le centre, les sommets et l'excentricité. **(0,25pt)**
5. Représenter Γ et Γ' sur la figure précédente. **(0,25pt)**

Exercice 2 (6 points)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction numérique définie pour tout x de $]0,+\infty[$ par: $f_n(x)=\frac{\ln x}{x^n}$, on désigne par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité **5cm**.

1. Dresser le tableau de variation de f_n. **(0,75pt)**
2. a) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A, dont on déterminera les coordonnées et que ces courbes (C_n) admettent la même tangente en A. **(1pt)**
  b) Etudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}). **(0,5pt)**
  c) Soit M_n le point de (C_n) en lequel la tangente est horizontale. Montrer que tous les points M_n sont situés sur une branche d'une courbe dont on donnera une équation. **(0,5pt)**
3. Tracer (C_3). **(0,75pt)**

4.Dans cette question on pose : $f = f_3$ et pour tout $n \geq 2$: $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k) = \frac{\ln 2}{2^3} + \frac{\ln 3}{3^3} + \ldots + \frac{\ln n}{n^3}$.

a) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$. **(0,5pt)**

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $S_n - \frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x)dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^3}$. **(0,5pt)**

c) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $\int_2^n f(x)dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x)dx + \frac{\ln 2}{8}$. **(0,5pt)**

d) Calculer $\int_2^n f(x)dx$, en déduire que la suite (S_n) est convergente. **(0,5pt)**

e) On pose $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lambda$, montrer que $\frac{\ln(2\sqrt{e})}{8} < \lambda < \frac{\ln(4\sqrt{e})}{8}$. **(0,5pt)**

Problème (10 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct **ABCD** de coté **a**.
Soit **M** un point variable du segment $[AC]$. Soient **E**, **F**, **G** et **H** les projetés orthogonaux respectifs de **M** sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Dans tout le problème, **M** est distinct de **A** et de **C**.
L'objectif de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

Partie A

Dans cette partie, on se propose de démontrer par deux méthodes que lorsque le point **M** varie sur $[AC]$, les droites **(DM)**, **(CE)** et **(AF)** d'une part et les droites **(BM)**, **(CH)** et **(AG)** d'autre part restent concourantes.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre **AB = 8cm** et la droite **(AB)** horizontale) **(0,5pt)**

2. Utilisation d'homothéties

Pour une position donnée du point **M** sur $[AC]$, on désigne par **P** le point d'intersection des droites **(AF)** et **(CE)**. On considère deux homothéties h_1 et h_2 de même centre **P** telles que h_1 transforme **A** en **F** et h_2 transforme **C** en **E**.

a) Déterminer l'image de la droite **(AD)** par h_1 ; **(0,25pt)**

b) Déterminer l'image de la droite **(BC)** par h_2 ; **(0,25pt)**

c) En déduire l'image de la droite **(AD)** par $h_2 \circ h_1$; **(0,25pt)**

d) Déterminer l'image de la droite **(DC)** par $h_1 \circ h_2$; **0,25pt)**

e) En déduire que, quelque soit la position de **M** sur $[AC]$, les droites **(DM)**, **(CE)** et **(AF)** restent concourantes. **(0,25pt)**

3. Utilisation d'une rotation vectorielle

On considère la rotation vectorielle φ d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Prouver que $\varphi(\overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AF}$. En déduire que les droites **(DE)** et **(AF)** sont perpendiculaires. **(0,25pt)**

b) Trouver $\varphi(\overrightarrow{DF})$ et $\varphi(\overrightarrow{DM})$. En déduire que, quelque soit la position de **M** sur $[AC]$, les droites **(DM)**, **(CE)** et **(AF)** sont concourantes. **(0,5pt)**

4. Déduire de ce qui précède, en utilisant une réflexion appropriée, que quelque soit la position de **M** sur $[AC]$, les droites **(BM)**, **(CH)** et **(AG)** restent concourantes. **(0,25pt)**

Partie B

Soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 les cercles de diamètres respectifs $[FM]$, $[ME]$, $[GA]$ et $[CH]$
On se propose dans cette partie, de démontrer que lorsque le point M varie sur $[AC]$, les cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 restent concourants.

1. Pour une position donnée du point M sur $[AC]$, on désigne par Ω le point d'intersection de (DM) et (EF).
   a) Prouver qu'il existe une unique similitude directe s de centre Ω qui transforme M en F. **(0,5pt)**
   b) Déterminer l'angle de s et montrer que $s(E) = M$. **(0,5pt)**
2. Déterminer l'image du carré $AEMH$ par la similitude s. **(0,5pt)**
3. En déduire que lorsque le point M varie sur $[AC]$, les cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 restent concourants. **(0,5pt)**
4. Sur la figure précédente, déduire un ensemble de quatre autres cercles qui possèdent la même propriété. **(0,25pt)**

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier un ensemble de carrés.

1. Sur une nouvelle figure placer les points O_1, O_2, I et J milieux respectifs des segments $[CM]$, $[AM]$, $[BM]$ et $[DM]$. Montrer que le quadrilatère O_1JO_2I est un carré et que son aire est constante quelque soit la position de M sur $[AC]$. **(0,5pt)**
2. Déterminer le lieu géométrique du point J lorsque M varie sur $[AC]$. **(0,5pt)**
3. On considère les deux points S et T tels que le quadrilatère $SGTH$ soit un carré direct.
   a) Montrer que lorsque M varie sur $[AC]$, alors le point S reste fixe puis le placer sur la figure. **(0,5pt)**
   b) Déterminer et représenter le lieu géométrique du point T lorsque M varie sur $[AC]$. **(0,25pt)**
4. On pose $AE = x$ avec $0 < x < a$. Soit $f(x)$ l'aire de la partie délimitée par les deux carrés O_1JO_2I et $SGTH$.
   a) Calculer l'aire du carré $SGTH$ en fonction de x et a. **(0,25pt)**
   b) Ecrire $f(x)$ en fonction de x et a. **(0,25pt)**
   c) Quelle est la position du point M pour laquelle la surface commune $f(x)$ est minimale ? **(0,25pt)**

Partie D

Dans cette partie on considère que le point M est fixé au centre du carré $ABCD$. On se propose d'étudier deux tangentes communes à deux coniques: la parabole $\mathscr{P}$ de sommet H et de directrice (CD) et l'ellipse $\mathscr{E}$ de foyers A et B, et de longueur du grand axe $a\sqrt{2}$.

1.a) Faire une nouvelle figure, déterminer le foyer de $\mathscr{P}$ et montrer que B appartient à $\mathscr{P}$. **(0,5pt)**
   b) Montrer que M est un sommet de l'ellipse $\mathscr{E}$. Construire les autres sommets et justifier la construction. **(0,5pt)**
2. Montrer que la droite (FH) est une tangente commune à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{E}$. **(0,5pt)**
3. Soient (Δ) la droite passant par F et orthogonale à (AF) et (Δ') la droite passant par B et orthogonale à (BD) et soit N le point d'intersection de (Δ) et (Δ').
   a) Montrer que (Δ) est une tangente à $\mathscr{P}$ et déterminer leur point de contact. **(0,5pt)**
   b) Montrer que (Δ) est la tangente à $\mathscr{E}$ en N. **(0,25pt)**
   c) Représenter $\mathscr{E}$ et $\mathscr{P}$ sur la figure. **(0,25pt**

Fin.

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

Baccalauréat 2005

Session Complémentaire

Exercice 1 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue z : $z^2-2z+1-e^{2i\theta}=0$ où θ est un paramètre réel appartenant à $[0,2\pi[$.

1.a) Résoudre l'équation (E) et on note z_1 et z_2 ces deux solutions. **(1pt)**

b) Discuter suivant les valeurs du paramètre θ, le module et un argument de z_1 et de z_2. **(0,5pt)**

2. On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ et soient M_1 et M_2 les deux points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Montrer que lorsque θ décrit $[0,2\pi[$ alors les points M_1 et M_2 décrivent un cercle Γ de centre $A(1,0)$ dont on déterminera le rayon, et que la droite (M_1M_2) passe par un point fixe que l'on déterminera. **(1pt)**

b) Représenter M_1 et M_2 sur Γ, dans le cas où $\theta=\frac{\pi}{3}$. **(0,5pt)**

3. Pour tout entier naturel n tel que $n\geq 2$, on considère l'équation (E_n) d'inconnue complexe z : $(z-1)^n-e^{2i\theta}=0$ où θ est un paramètre réel appartenant à $[0,2\pi[$.

a) Déterminer les nombres (z_k) solutions de l'équation (E_n). **(0,25pt)**

b) Montrer que $z_0+z_1+\cdots+z_{n-1}=n$. **(0,25pt)**

c) Montrer que les points M_k d'affixes z_k appartiennent au cercle Γ. **(0,25pt)**

d) On pose $S_n=M_0M_1+M_1M_2+\cdots+M_{n-1}M_n$. Calculer S_n en fonction de θ et n, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=2\pi$, interpréter cette limite. **(0,25pt)**

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct ABC rectangle et isocèle en A. Les points I, J et K sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Le points D l'image du point K par la réflexion d'axe (AC).

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. **(0,75pt)**

b) Soit la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, déterminer $r(B)$ et $r(J)$. En déduire que (BJ) et (CD) sont perpendiculaires. **(1pt)**

c) Soit la similitude directe s de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$, déterminer $s(B)$ et $s(C)$. En déduire que (BC) et (DJ) sont perpendiculaires. **(1pt)**

d) Déduire de ce qui précède que J est l'orthocentre du triangle BCD. **(0,5pt)**

2. Soit F le point d'intersection des droites (BJ) et (CD). Montrer que les points A, D, F et J sont cocycliques et que les points A, B, C et F le sont aussi. **(0,25pt)**

3. On considère le cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC. Pour tout point M du plan, on pose $s(M)=M'$. Déterminer le lieu géométrique du point M' lorsque M décrit Γ_1. **(0,5pt)**

4. Pour tout point $\mathbf{M}$ du plan distinct de $\mathbf{A}$, on désigne par $\mathbf{N}$ le milieu du segment $[\mathbf{MM'}]$.

a) Calculer $\dfrac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AM}}$ et montrer que l'angle $(\overrightarrow{\mathbf{AM}}, \overrightarrow{\mathbf{AN}})$ à une mesure constante α lorsque $\mathbf{M}$ varie. **(0,25**

b) Vérifier que $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **(0,25pt)**

c) En déduire que le point $\mathbf{N}$ est l'image du point $\mathbf{M}$ par une similitude directe σ que l'on caractérisera **(0,25pt)**

d) Déterminer et construire, sur la figure précédente, le lieu géométrique Γ de $\mathbf{N}$ lorsque $\mathbf{M}$ décrit Γ_1. **(0,25pt)**

Problème (11 points)

Partie A

Pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$ et pour tout réel $\mathbf{x}$ on pose:

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n$$

1.a) Donner une primitive de la fonction S_n sur $\mathbf{IR}$. **(1pt)**

b) Démontrer que pour tout $x \neq -1$ et $n \geq 2$ on a:

$$S_{n-1}(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}; \qquad [1]$$ **(0,5pt)**

2.a)En déduire que :

$$\forall x > -1,\ \forall n \geq 2; \qquad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \qquad [2].$$ **(0,5pt)**

b) Déduire de $[2]$ que:

$$\forall x > 0; \qquad x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \qquad [3],$$ **(0,5pt)**

$$\forall x \in]-1,0[;\ x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 \qquad [4].$$ **(0,5pt)**

c) En utilisant $[3]$ et $[4]$ démontrer que: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$. **(0,5pt)**

Partie B

On considère la fonction numérique $\mathbf{f}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1.a) Montrer que $\mathbf{f}$ est continue au point d'abscisse $x_0 = 0$. **(0,5pt)**

b) Montrer que $\mathbf{f}$ est dérivable en $x_0 = 0$ puis calculer $f'(0)$. (On pourra utiliser **A.2.c)**). **(0,5pt)**

2. Soit la fonction numérique $\mathbf{u}$ définie par : $u(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$. **(1pt)**

a) Etudier les variations de $\mathbf{u}$ et montrer que : $\forall x > -1, \quad u(x) \leq 0$.

b) Vérifier que : $\forall x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2(x+1)}$. **(0,5pt)**

c) Dresser le tableau de variation de f. **(0,5pt)**

Partie C

On considère la fonction numérique g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(\frac{1}{x}) = x\ln(\frac{1+x}{x}), & x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Montrer que g est définie sur $D =]-\infty,-1[\cup [0,+\infty[$. **(0,25pt)**

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g à droite du point d'abscisse $x_0 = 0$. **(0,5pt)**

2.a) Calculer $g'(x)$ puis vérifier que g est croissante sur D. **(0,5pt)**

b) Du tableau de variation de f, déduire celui de g. **(0,5pt)**

c) Construire la courbe (C). **(0,25pt)**

3. On considère la transformation σ du plan dans lui même qui associe à tout point $M(x,y)$ le point $M'(x',y')$ tel que: $\begin{cases} x' = -x-1 \\ y' = y \end{cases}$

On pose $\sigma(C) = (C')$ et soit h la fonction numérique dont la courbe représentative est (C'), dans le repère précèdent.

a) Déterminer l'expression de $h(x)$ et vérifier que $h(x) = g(-x-1)$. **(0,5pt)**

b) Du tableau de variation de g déduire celui de h. **(0,5pt)**

c) Vérifier que σ est la réflexion d'axe Δ d'équation $x = \frac{-1}{2}$. Déduire la construction de (C') à partir de (C) dans le repère précèdent. **(0,5pt)**

4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on pose $U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; $V_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $g(n) \leq 1 \leq h(n)$, en déduire que $U_n \leq e \leq V_n$. **(0,5pt)**

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $1 \leq \frac{e}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{n}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **(0,25pt)**

c) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes. **(0,25pt)**

Fin.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale
Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Honneur – Fraternité – Justice

Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
coefficients: 9 & 6

Baccalauréat 2004

Session normale

Exercice 1 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de centre O et de coté a.
Soient I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et soit H l'intersection des droites (AJ) et (DI).

L'objectif de cet exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre $AB = a = 8cm$ et la droite (AB) horizontale) (0,75pt)

2. **Etude d'une rotation r_1.**
   a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme A en I et J en D. (0,5pt)
   b) Soit R le quart de tour vectoriel direct, montrer que $R(\overrightarrow{AJ}) = \overrightarrow{ID}$, en déduire l'angle de la rotation r_1. (0,5pt)
   c) On se propose, dans cette question de déterminer le centre Ω de la rotation r_1 par trois méthodes :
   i) Méthode 1 : Montrer que les points Ω, A, H et I d'une part et Ω, J, H et D d'autre part sont cocycliques en déduire une construction de Ω. (0,5pt)
   ii) Méthode 2 : Déterminer $r_1(L)$ puis $r_1 o r_1(L)$ et monter que Ω appartient à (IL) en précisant sa position sur (IL). (0,5pt)
   iii) Méthode 3 : Déterminer une droite (Δ) telle que $r_1 = S_{(AC)} o S_{(\Delta)}$, (où S est la réflexion par rapport à l'axe associé) puis déterminer deux réels α et γ tels que Ω soit le barycentre du système $\{(A,\alpha);(C,\gamma)\}$. (0,75pt)

3. **Caractérisation de quelques transformations et étude de leurs actions sur le rectangle $ABJL$.**
   a) Déterminer $r_1(B)$. Déduire des questions précédentes l'image du rectangle $ABJL$ par r_1. (0,5pt)
   b) Soit g l'antidéplacement qui transforme K en J et laisse C invariant. Reconnaître g et préciser l'image du rectangle $ABJL$ par g. (0,5pt)
   c) Soit r_2 la transformation définie par : $r_2 = S_{(JL)} o S_{(AC)}$.
   Déterminer la nature de r_2, donner ses éléments caractéristiques et préciser l'image du rectangle $ABJL$ par r_2. (0,5pt)

Exercice 2: (5 points)

On considère un triangle direct ABC rectangle en A avec $AB = 2AC$ et soient H le milieu du segment $[AB]$, E le symétrique de H par rapport à A. Les points J et K sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et E sur (BC) et I le projeté orthogonal du point A sur (EK).

L'objectif de cet exercice est l'étude de la configuration précédente.

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,75pt)
2. On considère la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   a) Déterminer $r(E)$, en déduire l'image de la droite (EK) par r. (0,5pt)
   b) Montrer que $r(I) = J$. (0,25pt)
   c) Déterminer $r(C)$, en déduire l'image de la droite (BC) par r puis la construire. (0,5pt)
   d) On pose $r(K) = L$, déterminer le point L puis le construire et montrer que $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BK}$. (0,25pt)
3. Soit h l'homothétie de centre B et qui transforme A en E.
   Déterminer le rapport de h et montrer que $h(J) = K$. (0,5pt)

4. On pose $s = h \circ r$ et on se propose de caractériser s.

a) Montrer que s est une similitude directe. Donnera son rapport et son angle. (0,5pt)

b) Soit Ω le centre de s, déterminer $s(I)$ et $s(A)$; montrer que Ω appartient aux deux cercles de diamètre respectif $[AE]$ et $[IK]$; construire Ω. (0,75pt)

5. Soit (P) une parabole de directrice (BC) et qui passe par les deux points A et I

a) Démonter qu'ils existent deux paraboles (P_1) et (P_2) vérifiant la condition précédente, on note F_1 et F_2 leur foyer respectif, où F_1 est le foyer le plus proche de la directrice (BC). Construire les foyers F_1 et F_2 en justifiant cette construction. (0,5pt)

b) Construire, en le justifiant, l'axe focal et le sommet de chacune des paraboles (P_1) et (P_2) puis représenter (P_1) et (P_2) sur la figure. (0,25pt)

c) Déterminer le foyer, le sommet et la directrice de la parabole (P_1') image de (P_1) par la similitude s puis construire (P_1'). (0,25pt)

Problème(10 points)

Partie A

Soit f_n la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n(1+\ln x); & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

où n est un entier naturel tel que $n \geq 1$ et x est une variable réelle.

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n au point $x_0 = 0$, interpréter géométriquement (distinguer le cas particulier où $n = 1$). (1pt)

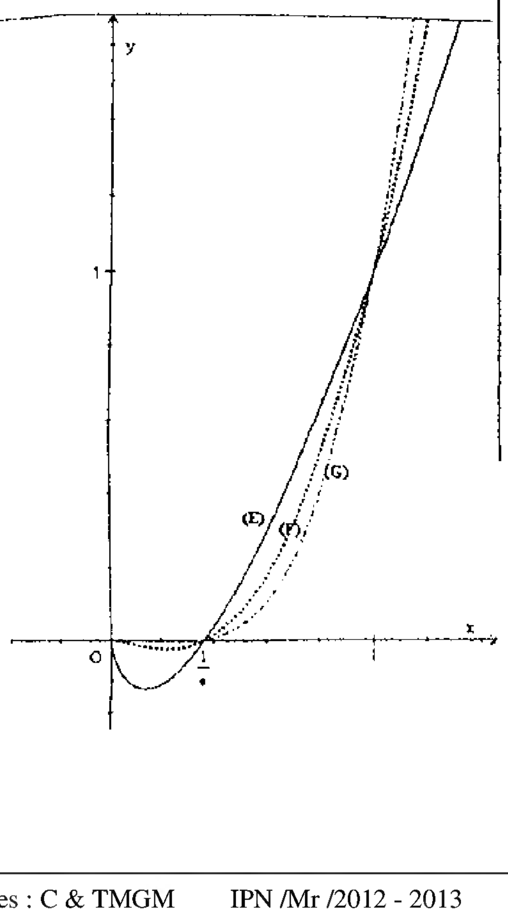
2. Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations. (1pt)

3. Montrer, par le calcul que toutes les courbes (C_n) passent par trois points communs que l'on déterminera. (0,75pt)

4. Etudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}) (faire un tableau). (0,5pt)

5. Les courbes (E), (F) et (G) ci-contre représentent les fonctions f_1, f_2 et f_3.

Associer à chaque courbe sa fonction puis justifier votre réponse (on ne demande pas de reproduire les cette figure). (0,75pt)



Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit le point $M_n(x_n;y_n)$ de la courbe (C_n) d'abscisse $x_n = e^{-(1+\frac{1}{n})}$, où n est un entier aturel non nul.

. Calculer y_n en fonction de n et montrer que tous les points $M_n(x_n;y_n)$ appartiennent à une ›ranche de courbe d'une fonction numérique φ que l'on déterminera. (0,75pt)

. Montrer que la suite (x_n) est croissante et majorée. (0,5pt)

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, en déduire que quand n tend vers $+\infty$, le point M_n tend vers une ıosition donnée que l'on déterminera. (0,5pt)

Soit U_n l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_n), l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x = e^{-1}$ et $x = 1$.

a) En utilisant une intégration par parties, écrire U_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et interpréter graphiquement. (0,75pt)

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive, donner une interprétation graphique. (0,5pt)

Partie C

)n considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = (1+\ln x)e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}; & x \in]0,\frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e},+\infty[\\ g(\frac{1}{e}) = 0 \end{cases}$$

Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}^+} g(x)$ puis étudier la continuité et la dérivabilité de g au point $x_0 = \frac{1}{e}$, donner une interprétation géométrique. (0,75pt)

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ puis interpréter géométriquement. (0,75pt)

3. Calculer $g'(x)$ puis étudier son signe. (0,5pt)

4. Dresser le tableau de variations de g et construire sa courbe Γ dans un nouveau repère. (0,5pt)

.a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, les courbes Γ et (C_n) ont trois points d'intersection d'ont deux sont indépendants de n que l'on déterminera et donner les coordonnées u troisième point en fonction de n. (0,25pt)

›) Reconnaître le troisième point cité en 5.a). Déterminer ses coordonnés et le placer sur Γ dans es deux cas: $n = 1$ et $n = 2$. (0,25pt)

Fin.

République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale

Direction des Examens et de l'Evaluation
Service des Examens

Baccalauréat 2004
Session Complémentaire

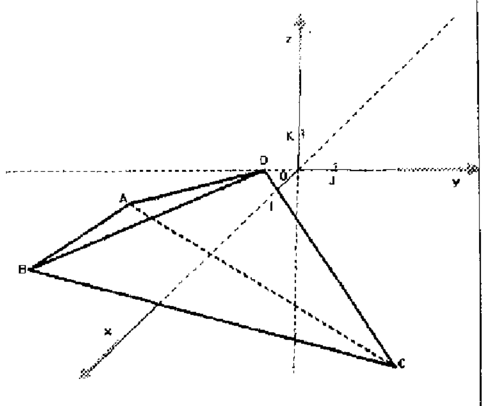
Honneur – Fraternité – Justice
Séries : C & TMGM
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
coefficients: 9 & 6

Exercice 1 : (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthogonal $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$, on donne les points $A(2;-3;1)$, $B(3;-5;0)$, $C(2;5;-4)$, $D(3;2;3)$.

1.a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}$. **(0,75pt)**

b) Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABD). **(0,5pt)**



2. Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

a) Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan (CDH). **(0,5pt)**

b) déterminer une équation cartésienne du plan (CDH) et une représentation paramétrique de la droite (AB). **(0,5pt)**

c) En déduire les coordonnées du point H. **(0,5pt)**

3.a) Calculer les longueurs AB, CD et DH. En déduire le volume V du tétraèdre $ABCD$ (On rappelle que $V=\frac{1}{3}B_1\times h_1$ où B_1 est la base du tétraèdre et h_1 la hauteur correspondante). **(0,75pt)**

b) Calculer la distance du point D au plan ABC. **(0,5pt)**

Exercice 2 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de côté a (où a est un réel strictement positif) et tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit D le barycentre du système $\{(A,-1);(B,-2);(C,2)\}$.

1.a) Construire D (Prendre $a=3cm$ et compléter cette figure au fur et à mesure) **(1pt)**

b) Montrer que les droites (BC) et (AD) sont parallèles. **(0,25pt)**

c) Montrer que le triangle ABD est rectangle en B. **(0,5pt)**

2. Pour tout point M du plan, on pose $f(M)=-MA^2-2MB^2+2MC^2$.

On désigne par (F) l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)=0$.

a) Vérifier que le point A appartient à (F). **(0,25pt)**

b) Exprimer $f(M)$ en fonction des distances MD et a. **(0,5pt)**

c) Déterminer et construire l'ensemble (F). **(0,5pt)**

3. Pour tout point M du plan, on pose $g(M)=2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{DB}+a^2$.

a) Déterminer et construire l'ensemble (G) des points M du plan tels que $g(M)=a^2$. **(0,5pt)**

b) Soit E le point d'intersection autre que A des ensembles (F) et (G), donner, en le justifiant la nature du triangle ADE. **(0,25pt)**

c) Donner, en le justifiant la nature du triangle ACE. **(0,25pt)**

4. Soit s la similitude de centre A et qui transforme B en D.

a) Donner l'angle et le rapport de la similitude s. **(0,5pt)**

b) Déterminer, en le justifiant, l'image du triangle **ABC** par s. **(0,25pt)**

c) Soit s^{-1} la similitude réciproque de la similitude s ; déterminer et construire les images par s^{-1} des ensembles **(F)** et **(G)**. **(0,25pt)**

Problème : (11 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité **2 cm**.

Partie I

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{x-1}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Etablir le tableau de variation de f. **(1pt)**

b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) et préciser la position de (C) et (Δ). **(0,5pt)**

c) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(0,5pt)**

2.a) Déterminer les positions relatives de (C) et de la droite Δ_1 d'équation : $y = x - 3$. **(0,5pt)**

b) Calculer l'aire A de la partie P du plan délimitée par la courbe (C) et les droites $(\Delta_0) : x = 1$ et $(\Delta_1) : y = x - 3$. **(0,5pt)**

Partie II

Dans cette partie, on associe à tout point $M(x, y)$ son affixe $z = x + iy$.

Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = -\frac{1}{2}(1+i)z + 2.$$

1. Déterminer la nature de s et donner ses éléments caractéristiques. **(0,5pt)**
2. Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction de x' et y' celles du point M'. **(0,5pt)**
3. Déterminer les équations des transformées par s des droites $(\Delta_0) : x = 1$ et $(\Delta_1) : y = x - 3$. **(0,5pt)**
4. Soit g la fonction numérique définie sur $]-\infty, 2[$ par $g(x) = 1 - x - \ln(4 - 2x)$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Si M est un point de (C) et $M' = s(M)$ montrer alors que l'abscisse x' de M' est *strictement inférieure à 2 et que M' est un point de la courbe (Γ).* **(0,5pt)**

b) Si M' est sur (Γ) montrer alors qu'il existe un point M de (C) tel que $M' = s(M)$. **(0,5pt)**

c) Déduire de ce qui précède que (Γ) est l'image de (C) par s. **(0,5pt)**

Partie III

1. Dresser le tableau de variation de la fonction g, en précisant ses limites en $-\infty$ et en 2^-. **(1pt)**
2. Soit h la fonction numérique définie sur $]-\infty, 2[$ par :

$$h(x) = f(x) - g(x) = 2x - 1 - e^{x-1} + \ln(4 - 2x).$$

Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$ où h' et h'' sont la dérivée première et la dérivée seconde de h. **(1pt)**

3.a) Déterminer le sens de variation de h' sur $]-\infty, 2[$ puis calculer $h'(1)$. **(0,5pt)**

b) Dresser le tableau de variation de h sur $]-\infty, 2[$ et calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$. **(0,5pt)**

c) En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β sur $]-\infty, 2[$ avec $\alpha < \beta$ et $-0,1 < \alpha < 0$ et $1,6 < \beta < 1,7$. **(0,5pt)**

d) Préciser les positions relatives des courbes (C) et (Γ). **(0,5pt)**

4. Tracer (Γ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(0,5pt)**
5. Soit P' la partie du plan délimitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations respectives $y = -x + 1$ et $x = \frac{1}{2}$. On admet que la partie P est transformée en P' par s, calculer l'aire A' de la partie P'. **(0,5pt)**

FIN

Baccalauréat 2004	Session Complémentaire	Epreuve de mathématiques	Séries : C & TMGM	2/2

بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SERVICE DES EXAMENS

Honneur–Fraternité - Justice

Séries : C & TMGM
Sujet : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficients : 9&6

BACCALAUREAT 2003

Session Normale

Exercice1(4 points)

On considère la fonction $\mathbf{f}$ définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par : $\mathbf{f(x)} = \frac{1}{\ln x}$ et soit g_n la fonction définie pour tout entier naturel $n \geq 2$, par : $g_n(x) = \int_x^{nx} f(t)dt$; $x > 1$ et soit (C_n) la courbe représentative de g_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variations de $\mathbf{f}$. **(1pt)**

2.a) Démontrer que : $\forall t > 1;\ 0 < \ln t < t - 1$ en déduire que $g_2(x) \geq \ln \frac{2x-1}{x-1}$. **(0,5pt)**

b) Démontrer que : $\forall n \geq 2;\ g_n(x) \geq g_2(x)$ en déduire que $\lim\limits_{x \to 1^+} g_n(x) = +\infty$. **(0,5pt)**

3.a) Démontrer que pour tout $x > 1$ on a: $\frac{(n-1)x}{\ln(nx)} \leq g_n(x) \leq \frac{(n-1)x}{\ln(x)}$. **(0,5pt)**

b) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g_n(x)}{x}$. **(0,5pt)**

4.a) Montrer que pour tout $x > 1$ on a : $g_n'(x) = \frac{n\ln(x) - \ln(nx)}{\ln(x)\ln(nx)}$ et dresser le tableau de variations de la fonction g_n. **(0,5pt)**

b) Construire l'allure de la courbe représentative (C_2) de g_2, on donnera un encadrement de l'ordonnée du point Ω_2 en lequel la tangente à (C_2) est parallèle à l'axe des abscisses. **(0,5pt)**

Exercice2(5 points)

On définie la suite numérique (U_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}dx$ et on pose $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} U_p$.

Le but de cet exercice est le calcul des limites suivantes : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} nU_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $W_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

a) Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*;\quad \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$ (1).

(on pourra utiliser le fait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[p; p+1]$). **(0,75pt)**

b) En utilisant la relation (1) démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \ln(n+1) \leq W_n \leq 1 + \ln(n+1)$ (2) en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$. **(1pt)**

2. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ et on pose $T_n = \sum\limits_{p=1}^{n} V_p$.

a) Prouver que $\forall x \in [0;1]$; $\frac{e^{-x}}{2} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ (3). **(0,75pt)**

b) Prouver que : $V_n = \int_0^1 e^{-nx}dx$, en déduire que : $\frac{1}{2}V_{n+1} \le U_n \le \frac{1}{2}V_n$. **(0,5pt)**

c) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$. **(0,5pt)**

3.a) En remarquer que : $\forall p > 0;\quad \frac{e^{-p}}{p} \le e^{-p}$, montrer que : $0 \le \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \le \frac{1}{e-1}$. **(0,75pt)**

b) En utilisant **(2)** montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{T_n}{\ln(n)}$. **(0,5pt)**

c) Que peut –on en déduire pour $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. **(0,25pt)**

Problème(11 points)

On considère un triangle **ABC** de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles **ACQ** , **BAR** et **CBP** rectangle et isocèle respectivement en **A** , **B** et **C** .
Soient **P'**, **Q'** et **R'** les milieux respectifs des segments **[BP]**, **[CQ]** et **[AR]**.

L'objectif de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la configuration précédente.

Partie A

L'objectif de cette partie est de montrer que les triangles **ABC**, **PQR** et **P'Q'R'** sont de même centre de gravité.

On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ et soient **a** , **b** , **c** , **p** , **q** , **r** , **p'** , **q'** et **r'** les affixes respectifs des points **A** , **B** , **C** , **P** , **Q** , **R** , **P'** , **Q'** et **R'**.

1. Faire une construction illustrant les données précédentes. **(1pt)**

2. a) Montrer que $p' = \frac{b - ic}{1 - i}$ puis écrire **q'** en fonction de **a** et **c** ; **r'** en fonction de **a** et **b**. **(1pt)**

b) Calculer **p'+q'+r'** en fonction de **a** , **b** et **c** puis en déduire que les triangles **ABC** et **P'Q'R'** ont le même centre de gravité **G** d'affixe **g** . **(0,5pt)**

3. Exprimer chacun des complexes **p** , **q** et **r** en fonction de **a** , **b** et **c** puis montrer que les triangles **ABC** et **PQR** ont le même centre de gravité **G** . **(0,5pt)**

Partie B

L'objectif de cette partie est de construire le triangle **ABC** à partir du triangle **P'Q'R'** .

1. A l'aide de la configuration de la partie A.

a)Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s_1 de centre **C** transformant **Q** en **A** et déterminer $s_1(B)$. **(0,75pt)**

b) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s_2 de centre **A** transformant **Q'** en **Q** puis déterminer $s_2(R')$. **(0,75pt)**

2.a) Quelle est la nature de la transformation $\sigma = s_1 o s_2$? **(0,25pt)**

b) En utilisant la transformation σ démontrer que : $\begin{cases} P'A = R'Q' \\ (\overrightarrow{R'Q'}, \overrightarrow{P'A}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$ **(0,5pt)**

c) Vérifier le résultat précédent en utilisant les affixes des points appropriés **(voir partie A)**. **(0 ,25pt)**

d) Quelles sont les relations semblables que l'on peut en déduire? **(0,5pt)**

Baccalauréat 2003	Session Normale	Epreuve de Mathématiques	Séries C&TMGM	2/3

3. Etant donné un triangle $\mathbf{P'Q'R'}$ direct, dont les angles sont aigus.

a) Prouver l'unicité du point $\mathbf{A}$ et le construire géométriquement. **(0,5pt)**

b) Construire les points $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ à partir des points $\mathbf{A}$, $\mathbf{P'}$, $\mathbf{Q'}$ et $\mathbf{R'}$ en justifiant les étapes de la construction. **(0 ,25pt)**

c) En déduire l'existence et l'unicité du triangle $\mathbf{ABC}$ solution du problème à partir du triangle $\mathbf{P'Q'R'}$ donné. **(0,25pt)**

Partie C

L'objectif de cette partie est l'étude du cas particulier où le triangle $\mathbf{ABC}$ est équilatéral.

1. Construire les triangles $\mathbf{ABC}$, $\mathbf{PQR}$ et $\mathbf{P'Q'R'}$ dans ce cas particulier. **(0,5pt)**

2. Dans cette question, on se propose de démontrer que les triangles $\mathbf{PQR}$ et $\mathbf{P'Q'R'}$ sont équilatéraux.
Pour cela on considère la rotation $\mathbf{r(G, \frac{2\pi}{3})}$ où $\mathbf{G}$ est le centre de gravité du triangle $\mathbf{ABC}$.

a) Déterminer $\mathbf{r(B)}$ et $\mathbf{r(C)}$ puis démontrer que $\mathbf{r(P') = Q'}$ et $\mathbf{r(Q') = R'}$. **(1pt)**

b) Justifier alors le fait que $\mathbf{r(P) = Q}$ et $\mathbf{r(Q) = R}$. **(0,25pt)**

c) Conclure. **(0,25pt)**

3. Soit $\mathbf{a}$ la longueur du côté du triangle $\mathbf{ABC}$. On considère les similitudes directes σ_1 et σ_2 de centre $\mathbf{G}$ telles que : σ_1 transforme $\mathbf{(B, C, A)}$ en $\mathbf{(P', Q', R')}$ et σ_2 transforme $\mathbf{(B, C, A)}$ en $\mathbf{(P, Q, R)}$.
Dans cette question, on se propose de caractériser les similitudes σ_1 et σ_2 puis de comparer les aires des triangles $\mathbf{ABC}$, $\mathbf{PQR}$ et $\mathbf{P'Q'R'}$.

a) Calculer $\mathbf{GP'}$ en fonction de $\mathbf{a}$ et déterminer le rapport $\mathbf{k_1}$ et l'angle $\mathbf{\theta_1}$ de la similitude directe σ_1. **(0,5pt)**

b) Calculer $\mathbf{GP}$ en fonction de $\mathbf{a}$ et déterminer le rapport $\mathbf{k_2}$ de la similitude directe σ_2 et donner la valeur exacte de $\mathbf{\cos\theta_2}$ où $\mathbf{\theta_2}$ est l'angle de σ_2. **(0,5pt)**

c) Ecrire les aires des triangles $\mathbf{PQR}$ et $\mathbf{P'Q'R'}$ en fonction de celle du triangle $\mathbf{ABC}$. **(0,5pt)**

4. On pose $\mathbf{f = \sigma_1 o r}$, préciser la nature et les éléments caractéristiques de $\mathbf{f}$ et déterminer les images des points $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ par $\mathbf{f}$. Que peut-on remarquer? **(0,5pt)**

FIN.

بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SERVICE DES EXAMENS

Honneur–Fraternité - Justice

Séries :C & TMGM
Sujet :Mathématiques
Durée :4heures
Coefficients :9&6

BACCALAUREAT 2003

Session Complémentaire

Exercice1(5 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation **(E)** d'inconnue **z** telle que :

$$z^2 - (4\cos t)z + 4 + 5\sin^2 t = 0 \quad \text{où } t \in [0; \pi[\text{ est un paramètre réel.}$$

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)**. on notera z_1 et z_2 les solutions de **(E)** avec $\mathrm{Im}(z_1) > 0$ **(1,5pt)**

2. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$; Soient M_1 et M_2 les deux points d'affixes respectives z_1 et z_2.

a) Démontrer que lorsque le paramètre **t** décrit $[0; \pi[$ les points M_1 et M_2 décrivent une ellipse Γ dont on donnera une équation cartésienne. **(0,75pt)**

b) Donner les élément caractéristiques de la courbe Γ puis la construire dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. **(0,75pt)**

c) Placer sur le graphique les points M_1 et M_2 pour $t = \frac{\pi}{6}$. **(0,5pt)**

3. Soit **f** l'application du plan dans lui même qui à tout point $M(x;y)$ d'affixe **z** associe le point $M'(x';y')$ d'affixe **z'** tel que $z' = \frac{5z+\bar{z}}{4}$.

a) Ecrire x' et y' en fonction de x et y. **(0,5pt)**

b) On pose $f(\Gamma) = \Gamma'$, donner une équation cartésienne de la courbe Γ'. vérifier que Γ' est un cercle dont on donnera le centre et le rayon puis le construire dans le repère précédent. **(0,5pt)**

c) En déduire une méthode géométrique qui permet de construire l'ellipse Γ point par point à partir de Γ'. **(0,5pt)**

Exercice2(5 points)

Dans le plan orienté, on considère trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 de même rayon et de centres respectifs **M**, **N** et **P**, ces trois cercles sont concourants en un point **K** et se coupent deux à deux en **A**, **B** et **C** tels que:

- Γ_1 et Γ_2 se coupent en **A** et **K** ;
- Γ_2 et Γ_3 se coupent en **B** et **K** ;
- Γ_3 et Γ_1 se coupent en **C** et **K**.

1. Faire une construction illustrant les données précédentes. **(1pt)**

2. On pose $r_1 = s_{(KB)} o s_{(KA)}$, $r_2 = s_{(KP)} o s_{(KC)}$ et $f = s_{(KB)} o s_{(KA)} o s_{(KC)}$.

a) Déterminer la nature de chacune des transformations r_1 et r_2. **(0,5pt)**

b) Déterminer $r_1(M)$ et $r_2(M)$: que peut on en déduire ? **(0,75pt)**

c) En déduire que **f** est une réflexion dont on donnera l'axe. **(0,5pt)**

3.a) Montrer que $(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}) = (\overrightarrow{KC},\overrightarrow{KP}) \quad [\pi]$ et écrire(sans le démontrer) deux relations semblables. **(0,75pt)**

b) Vérifier que $(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$. **(0,5pt)**

c) En déduire que **K** est l'orthocentre du triangle **ABC**. **(0,5pt)**

4. Soient Γ_4 et Γ_5 les deux cercles circonscrits respectivement aux tringles **ABC** et **MNP**.

Montrer que les cinq cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 et Γ_5 sont de même rayon. **(0,5pt)**

Problème(10 points)

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (2 + \sin(nx))e^{1+nx}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : *Etude et représentation graphique de la fonction f_1*

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = f_1(x) = (2 + \sin x)e^{1+x}$.

1.a) Démontrer que: $\forall x \in \mathbb{R};\quad \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$. **(0,5pt)**

b) En déduire que: $\forall x \in \mathbb{R};\quad f'(x) = (2 + \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}))e^{1+x}$ et que f est strictement croissante. **(0,75pt)**

2.a) Démontrer l'inégalité suivante: $\forall x \in \mathbb{R},\quad e^{1+x} \leq f(x) \leq 3e^{1+x}$ **[1]**. **(0,5pt)**

b) A l'aide de **[1]** calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement. **(1pt)**

3. Dresser le tableau des variations de f et montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera. **(0,75pt)**

4. Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R};\quad f''(x) = 2(1 + \cos x)e^{1+x}$. **(0,5pt)**

5.a) Montrer que la courbe (C_1) est située entre deux courbes Γ_1 et Γ_2 représentatives de deux fonctions que l'on déterminera (Γ_1 au dessus de Γ_2). **(0,5pt)**

b) Déterminer les points de contact de (C_1) avec Γ_1 et Γ_2. Montrer que (C_1) est tangente à Γ_1 et Γ_2 en leurs points de contact **(On dit que deux courbes sont tangentes en un point si elles ont la même tangente en ce point).** **(1pt)**

6. Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes (C_1), Γ_1 et Γ_2 pour $x \in [-\pi; \pi]$. **(0,5pt)**

7. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. **(0,5pt)**

Partie B : *Calcul d'une intégrale*

On pose : $A_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Démontrer que: $A_n = \frac{2}{n}e^{1+n} - \frac{2}{n}e + \int_0^1 \sin(nx)e^{1+nx}dx$. **(1pt)**

2. On pose : $I_n = \int_0^1 \sin(nx)e^{1+nx}dx$ et $J_n = \int_0^1 \cos(nx)e^{1+nx}dx$.

a) En utilisant l'intégration par parties montrer que:

$$I_n = \frac{\sin n}{n}e^{1+n} - J_n \quad \text{et} \quad J_n = \frac{\cos n}{n}e^{1+n} - \frac{e}{n} + I_n.$$ **(0,75pt)**

b) En déduire I_n et J_n en fonction de n. **(0,75pt)**

3.a) Donner l'expression de A_n en fonction de n. **(0,5pt)**

b) Calculer A_1 et comparer ce résultat avec celui de la question A.7). **(0,5pt)**

FIN.

بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE — **Honneur – Fraternité – Justice**

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SERVICE DES EXAMENS

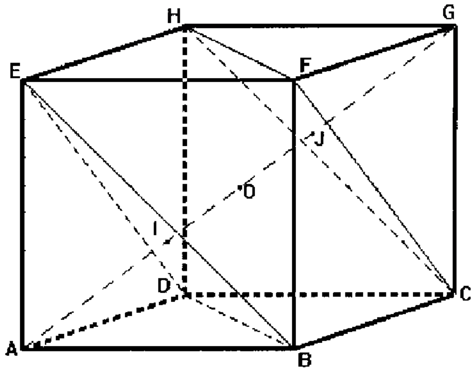
Séries: C & TMGM
Sujet: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

BACCALAUREAT 2002

Session Normale

Exercice1 (4points)

On considère le cube **ABCDEFGH** de centre **O** et d'arête **a** ; $(a > 0)$ (ne pas refaire la figure).



1. Montrer que les triangles **BED** et **CHF** sont équilatéraux. **(1pt)**

2. Soient **I** et **J** les centres de gravités respectifs des triangles **BED** et **CHF**.

a)Prouver que:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} \text{ et } \overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}. \quad \textbf{(0,5pt)}$$

b) En déduire que: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JG}$ et que **O** est le milieu de $[IJ]$. **(0,5pt)**

3. Soit s_1 la réflexion de plan **(BAG)** et soit s_2 la réflexion de plan **(DAG)**; on pose $f = s_1 o s_2$.

a) Montrer que **f** est une rotation puis déterminer **f(G)** et **f(A)**, que peut-on en déduire? **(1pt)**

b) Montrer que la droite **(AG)** est perpendiculaire aux deux plans **(BED)** et **(CHF)**. **(0,25pt)**

c) Montrer que **f** laisse globalement invariant les triangles **BED** et **CHF**. **(0, 5pt)**

d) En déduire l'angle de **f** par rapport à un axe orienté dont-on donnera le sens. **(0,25pt)**

Exercice2 (5points)

On considère un triangle **ABC** direct, rectangle et isocèle en **A** et soit Σ et Γ deux cercles passant par **A** et de centres respectifs **B** et **C**. Soit **G** le deuxième point d'intersection de Σ et Γ et soit **D** le point de Σ diamétralement opposé à **A**.

1. a) Faire une figure illustrant les données précédantes à compléter au fur et à mesure (On prend pour la construction **AB = 4cm**). **(1pt)**

b) Prouver l'existence d'une unique rotation **r** qui transforme **A** en **D** et **C** en **B**, donner ses éléments caractéristiques. **(1pt)**

2. Pour tout point **M** de Γ, distinct de **G** on pose $r(M) = M'$; la droite **(GM)** coupe Σ en **N'** et la droite **(GM')** coupe Γ en **N**.

a) Construire les deux points **R** et **S** tels que les deux quadrilatères **M'GMR** et **N'GNS** soient des carrés, puis déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe **s** qui transforme **M** en **R** et **N** en **S**. **(0,75pt)**

b) Prouver que la droite **(RS)** passe par un point fixe lorsque **M** décrit Γ privé de **G**. **(0,25pt)**

3. Soit **s'** la similitude directe qui transforme **D** en **B** et **B** en **C**; et soit **I** son centre.

a) Déterminer l'angle et le rapport de **s'**. **(1pt)**

b) Démontrer que $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{GB})\ [\pi]$ (1) et $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})\ [\pi]$ (2) **(0.5pt)**

c) Déduire de **(1)** et de **(2)** la position du point **I** centre de **s'** puis déterminer la nature du quadrilatère **ACID**. **(0,25pt)**

4) On pose $f = s o s'$; montrer que **f** est une homothétie et déterminer son rapport et son centre. (0,25pt)

Problème (11points) *N.B: La partie C de ce problème peut être traitée avant la partie B.*

Partie A

On considère la fonction numérique f définie par:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\ln x}; & x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit C_0 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, (Unité **1cm**).

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de **f** au point d'abscisse $x_0 = 0$. **(1pt)**
2. Dresser le tableau de variation de **f**. **(1,5pt)**
3. Démontrer que C_0 admet un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées. **(0,75pt)**
4. Construire C_0 dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(0,75pt)**

Partie B

Soit f_n de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e^n\}$ par: $f_n(x) = \dfrac{e^n}{-n+\ln x}$ où **n** est un entier naturel et soit C_n sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Démontrer que C_n est l'image de C_0 par une homothétie h_n de centre **O** dont on donnera le rapport. **(0,5pt)**
2. Dresser le tableau de variation de f_n.(On pourra le déduire de celui de **f**). **(0,5pt)**
3. Démontrer que la courbe C_{n+1} de f_{n+1} est l'image de C_n par h_1. **(0,5pt)**
4. a) Démontrer que les deux courbes C_n et C_{n+1} se coupent en un point M_n d'abscisse $x_n = e^{n-\frac{1}{e-1}}$. **(0,5pt)**
   b) Démontrer que les points M_n appartiennent à une droite fixe passant par **O**. **(0,25pt)**
   c) Construire, dans un même repère, une allure de C_n et C_{n+1}, en déduire la position relative de ces deux courbes (à résumer dans un tableau). **(0,75pt)**
5. Soit **g** la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$ par: $g(x) = \dfrac{e}{-1+\ln x}$. Comment déduire de C_0 une construction de la courbe Γ représentative de **g** (sans étudier **g**)? Construire C_0 et Γ dans un nouveau repère. **(0,5pt)**

Partie C

Soit **F** la fonction numérique définie par:

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{e^{x-1}} f(t)dt; & x > 1 \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

où **f** est la fonction définie à **la partie A** (le calcul de l'intégrale $F(x)$ n'est pas demandé).

1. Montrer que pour tout $x > 1$ on a: $e^{x-1} \geq x$ puis justifier l'existence de $F(x)$ pour tout $x \geq 1$. **(1pt)**

2.a) Montrer que pour tout $x > 1$ on a: $\dfrac{e^{x-1}-x}{x-1} \leq F(x) \leq \dfrac{e^{x-1}-x}{\ln x}$ **(*)**. **(0,5pt)**

b) En déduire que **F** est continue au point d'abscisse $x_1 = 1$. **(0,5pt)**

3. Soit **G** la restriction de **F** sur $[2;+\infty[$.
   a) Calculer $G'(x)$ et $G''(x)$ puis montrer que $\forall x \geq 2;\ G'(x) > 0$. **(0,5pt)**
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{G(x)}{x}$ (on pourra utiliser l'inégalité **(*)**). **(0,5pt)**
   c) Dresser le tableau de variation de **G** puis construire une allure de sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé. **(0,5pt)**

Fin.

BACCALAUREAT 2002

Session Complémentaire

Exercice1 (4points)

Soit θ un nombre reél tel que $\theta \in [0, 2\pi]$.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation: $z^2-(8\cos\theta)z+16-7\sin^2\theta=0$ et soient z_1 et z_2 ses deux solutions. **(1pt)**
2. On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ unité 1cm .

On note M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 et soit Γ l'ensemble des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit $[0, 2\pi]$.

a) Déterminer une équation cartésienne de Γ. **(0,5pt)**

b) Quelle est la nature de Γ ? Donner ses éléments caractéristiques puis construire cet ensemble dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. **(0,75pt)**

3. Soit le point $A(0;1)$ et soit M un point de Γ. On considère le point G barycentre du système de points pondérés $\{(A,-3),(M,1)\}$.

a) Démontrer que lorsque M décrit Γ alors le point G décrit une ellipse Γ' dont on précisera le centre, les sommets. **(0,75pt)**

b) En déduire une équation cartésienne de Γ' dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ puis la construire. **(0,5pt)**

c) Pour $\theta=\frac{\pi}{3}$, construire les points M_1, M_2, G_1 et G_2 sur la figure précédente. **(0,5pt)**

Exercice2 (5points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral de sens direct. Soit I le milieu du segment [BC] et O le milieu du segment [AC] et soit B' le symétrique de B par rapport à O.

1. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; On pose $f = t\circ r$.

a) Faire une figure illustrant les données précédentes puis placer les points $f(A)=A'$ et $f(B)=C'$. **(0,75pt)**

b) Déterminer la nature du triangle ICO puis préciser $f(C)$ **(0.5pt)**

c) Caractériser l'application f, en déduire la nature du triangle IAA'. **(0.5pt)**

2. Soit s la similitude directe telle que $s(O)=A$ et $S(C)=I$.

Montrer que $s(I)=A'$ puis déterminer l'angle et le rapport de s. **(1pt)**

3. Soit Ω le centre de s.

a) Démontrer que les points Ω, I, C et A sont cocycliques et qu'il en est de même des points Ω, A, O et B'. **(0,75pt)**

b) En déduire la position du point Ω et sa construction. **(0.25pt)**

4. a) Montrer que le quadrilatère ΩOIC est un losange. **(0,5pt)**

b) Donner un programme de construction des images du losange ΩOIC par $s^2=s\circ s$ et par $s^3=s\circ s\circ s$ puis les construire. **(0,5pt)**

c) Quelle est la particularité de l'application s^6 ? **(0,25pt)**

Problème (11points)

I-ETUDE D'UNE FONCTION AUXILIAIRE

On considère la fonction numérique f définie pour tout réel x par: $f(x)=\frac{x}{1+x+x^2}$.

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, (Unité 1cm).

1. Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe C dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. **(2pt)**

Discuter, graphiquement suivants les valeurs du paramètre **m** le nombre et le signe des solutions, dans **IR** de l'équation: $mx^2+(m-1)x+m=0$. **(1pt)**

II-ETUDE DES TANGENTES A UNE COURBE

Soit g la fonction numérique définie par:

$$\begin{cases} g(0)=0 \\ g(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}} \quad , \quad x>0 \end{cases}$$

Et soit Γ sa courbe représentative dans un nouveau repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité 3cm.

1. a) Démontrer que Γ admet une tangente en chacun de ses points d'abscisse $x>0$, préciser sa tangente à l'origine. **(1pt)**
   b) Dresser le tableau de variation de g. **(1pt)**
2. Soit T_a la tangente à Γ au point d'abscisse **a**.
   a) Démontrer que les tangentes T_a et $T_{\frac{1}{a}}$ $(a>0$ et $a\neq 1)$ coupent (Ox) au point d'abscisse $f(a)=\frac{a}{1+a+a^2}$. **(0,5pt)**
   b) Démontrer que toutes les tangentes à Γ coupent le segment [OB] où B est le point de coordonnées $(\frac{1}{3};0)$. (On pourra utiliser I-1.) **(0,5pt)**
   c) Démontrer que de chaque point $A(m;0)$, du segment [OB] privé de O, passent deux tangentes distinctes à Γ. (On pourra utiliser I-2.) **(0,5pt)**
   d) Démontrer que Γ admet un point d'inflexion puis donner une équation de la tangente T à Γ en ce point et préciser le point d'intersection de cette tangente T avec l'axe des abscisses. **(0,75pt)**
3. Soit h la fonction numérique définie par: $h(t)=1-(1+t)e^{-t}$; $t\geq 0$.
   a) Démontrer que pour tout réel $t\geq 0$ on a: $0\leq h'(t)\leq t$ en déduire que: $0\leq h(t)\leq \frac{t^2}{2}$. **(0,5pt)**
   b) Démontrer que: $\forall x>0$, $0\leq x-g(x)\leq \frac{1}{2x}$, donner une interprétation graphique de ce résultat. **(0,5pt)**
4. Construire, dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les tangentes T_0, T_1, T_2, $T_{\frac{1}{2}}$ et la courbe Γ. **(0,75pt)**

III-ETUDE D'UNE SUITE

Soit f_n la fonction numérique définie sur **IR** par: $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x+x^2}$ où **n** est un entier naturel strictement positif et soit $(U_n)_{n\in IN^*}$ la suite numérique définie par: $U_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Démontrer que $(U_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante et que $\forall n\in IN^*$ on a: $0\leq U_n\leq \frac{1}{n+1}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **(0,75pt)**
2. On pose: $\varphi(x)=\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$; $\quad x\in[0;1]$.
   a) En utilisant une intégration par partie démontrer que:
   $$\forall n\in IN^* \quad U_n=\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\varphi(x)dx. \qquad \textbf{(0,5pt)}$$
   b) Démontrer que: $\forall x\in[0;1]$ $\quad \frac{1}{3}\leq\varphi(x)\leq 1$. **(0,25pt)**
3. Démontrer que: $\forall n\geq 1$; $\quad \frac{n+3}{3(n+1)(n+2)}\leq U_n\leq \frac{n+5}{3(n+1)(n+2)}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$. **(0,5pt)**

Fin.

بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SERVICE DES EXAMENS

Honneur – Fraternité – Justice

Séries: C & TMGM
Sujet: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

BACCALAUREAT 2001

Session Normale

Exercice1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout réel $\theta \in]0;\frac{\pi}{2}[$ on définit l'application f_θ du plan complexe dans lui même; qui a tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = (1 - i\cos\theta)z - \cos\theta$.

1. Montrer que f_θ est une similitude directe dont on précisera le rapport, en fonction de θ et le centre. **(1,5pt)**

2. Soit Ω le point d'affixe i et soit α la mesure de l'angle de la similitude f_θ tel que $-\pi < \alpha \le \pi$

   a) Démontrer que si M est un point distinct de Ω, alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle et de sens indirect. **(0,5pt)**

   b) Prouver que si M est un point distinct de Ω, alors $\frac{\Omega M}{\Omega M'} > \frac{1}{\sqrt{2}}$;

   en déduire que : $-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0$. **(0,5pt)**

3. Soit A un point du plan distinct de Ω. Déterminer les ensembles de points suivants quand θ décrit $]0;\frac{\pi}{2}[$:

   a) Γ_1 : l'ensemble des points M tels que $f_\theta(A) = M$ (Γ_1 l'ensemble des images de A). **(0,5pt)**

   b) Γ_2 :l'ensemble des points M tels que $f_\theta(M) = A$ (Γ_2 l'ensemble des antécédents de A).**(0,5pt)**

4. Construire sur la même figure les ensembles Γ_1 et Γ_2 dans le cas particulier $A(1;1)$. **(0,5pt)**

Exercice2 (5points)

Dans le plan orienté, on considère un losange $ABCD$ direct de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et soient les points I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$; soit le point $P \in [OA]$ tel que le triangle PBD soit rectangle en P.

On considère les transformations suivantes:

r_1 : la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$; r_2 : la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

s_1 : la réflexion d'axe (BD) ; s_2 : la réflexion d'axe (BC) et $g = r_1 o s_2$.

1.a) Placer les données précédantes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure.
(Pour une meilleure construction, prendre (AC) horizontale et $AB > 5cm$). **(0,75pt)**

b) Déterminer les images des deux points B et C par : r_1, r_2 et s_1. **(0,75pt)**

2.a) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$. **(0,5pt)**

b) Déterminer la nature de g puis donner sa forme réduite. **(0,5pt)**

3. Soit *(E)* l'ellipse de foyers **B** et **C** et passant par le point **O**, et soit **2a**, $(a > 0)$ la longueur du grand axe de *(E)*.

a) Montrer que $K \in (E)$ et que $CP = 2a$. (0,5pt)

b) En déduire une construction géométrique (à justifier) des deux sommets de l'axe focal de *(E)*; puis de ses deux autres sommets, construire *(E)* sur la figure précédente. (1pt)

4. On pose $r_1(E) = E_1$; $r_2(E) = E_2$; $s_1(E) = E_3$; $g(E) = E_4$.

a) En utilisant les questions précédantes déterminer (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4) ; quelle remarque peut-on tirer concernant ces quatre courbes? (0,5pt)

b) Construire E_i sur la figure précedente; puis les points : $(K_i)_{1\le i\le 4}$ tels que :

$$r_1(K) = K_1 ; r_2(K) = K_2 ; s_1(K) = K_3 ; g(K) = K_4 .$$

Quelle remarque peut-on en tirer? Interpreter. (0,5pt)

Problème (11 points)

On se propose dans ce problème d'étudier une famille de fonctions, et de quelques propriétés de leurs graphes.

Partie A : fonction auxiliaire

Soit g_m le trinôme défini pour tout **x** réel par : $g_m(x) = x^2 + 2x - 2m$ où **m** est un paramètre réel non nul.

1. Discuter suivant les valeurs de **m** le nombre de solutions, dans **IR**, de l'équation $g_m(x) = 0$. (1pt)

2. Dans le cas où l'équation $g_m(x) = 0$, admet deux solutions réelles distinctes x' et x'' telles que $x' < x''$; montrer que si $m < 0$, alors $-2 < x' < x'' < 0$; et que si $m > 0$, alors $x' < -2 < 0 < x''$. (1pt)

NB : Dans la suite du problème, on suppose que $m > 0$,

et on considère le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ***unité 1cm.***

Partie B : Etude d'une famille de fonctions

Soit la fonction numérique f_m définie par: $f_m(x) = x + m\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right|$; où **ln** désigne la fonction logarithme néperien, et soit (C_m) sa courbe representative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f_m puis calculer les limites de f_m à ses bornes. (0,75pt)

b) Etudier, suivant les valeurs du paramètre réel strictement positif **m**, les variations de f_m. (0,75pt)

2. a) Prouver que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe **I** dont on déterminera les coordonnées, et que ce point représente un centre de symétrie de toute courbe (C_m). (0,5pt)

b) Déterminer les asymptotes à (C_m) puis étudier la position relative de (C_m) par rapport à son asymptote oblique (Δ). (0,75pt)

c) Tracer la courbe (C_1) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (les points d'inflexions, et d'intersections avec les axes de coordonnées ne sont pas demandés). (0,25pt)

Partie C : Construction d'une courbe (C_m) à partir de (C_1)

Soit φ_m l'application du plan dans lui même qui à tout point $M(x;y)$ d'affixe z associe le point $M'(x';y')$ d'affixe z' tel que :

$z' = \frac{1}{2}[(1+m)+(1-m)i]z + \frac{1}{2}[(1-m)+(1-m)i]\bar{z}$ où $m \in IR_+^* \setminus \{1\}$ et $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

1. a) Ecrire x' et y' en fonction de x , y et du paramètre m. (0,5pt)

b) Démontrer que l'ensemble des points invariants par φ_m est la droite (Δ) d'équation $y = x$.(0,5pt)

c) Démontrer que si M n'est pas un point de (Δ) alors la droite (MM') est parallèle à une droite fixe (Δ') dont-on donnera un vecteur directeur. (0,25pt)

d) Soit M_0 le projeté de M sur (Δ) parallèlement à (Δ') ;

exprimer $\overrightarrow{M_0M'}$ en fonction de $\overrightarrow{M_0M}$. (0,5pt)

2.a) Démontrer que $\varphi_m(C_1) = (C_m)$; en déduire une construction géometrique simple de (C_m) point par point , à partir de (C_1). (1pt)

b) construire alors (C_2) dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. (0,25pt)

Partie D: Etude de la convergence d'une suite

Soit λ un réel tel que $0< \lambda <1$ et $A(\lambda)$ l'aire du domaine délimité par (C_m); (C_{m+1}) et les droites d'équations respectives $x=\lambda$ et $x=1$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. En utilisant une intégration par partie calculer $A(\lambda)$ puis déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 0} A(\lambda)$. (1pt)

2. On considère la fonction h définie pour tout réel stictement positif par: $h(x) = \ln(1+\frac{2}{x})$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ on considère la suite $(S_n)_{n\in IN^*}$ de terme général: $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n} h(\frac{p}{n})$.

a) Détérminer le sens de variation de h sur $]0;1]$ puis prouver que pour tout entier naturel p vérifiant $1 \leq p \leq n-1$ on a : $\frac{1}{n}h(\frac{p+1}{n}) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x)dx \leq \frac{1}{n}h(\frac{p}{n})$. (1pt)

b) En déduire que: $S_n - \frac{1}{n}h(\frac{1}{n}) \leq A(\frac{1}{n}) \leq S_n$ (0.5pt)

et que: $A(\frac{1}{n}) \leq S_n \leq A(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}h(\frac{1}{n})$. (0.25pt)

c) Déduire de D.1) que: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(\frac{27}{4})$. (0.25pt)

Fin.

بسم الله الرحمن الرحيم

REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE — **Honneur – Fraternité – Justice**

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
SERVICE DES EXAMENS

Séries: C & TMGM
Sujet: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 9 & 6

BACCALAUREAT 2001

Session Complémentaire

NB: Le 1er exercice (Exercice 1) n'est pas commun aux deux séries C et TMGM.

Exercice1 (4points)

(Uniquement pour les candidats de la serie C)

Pour tout nombre complexe $\mathbf{z}$ on pose:

$$P(z) = z^4 - (2+6i)z^3 + (-12+9i)z^2 + (13+9i)z + 2 - 6i$$

1.a) Calculer $P(i)$ et $P(2i)$. **(1pt)**

b) Déterminer les nombres complexes **a** et **b** tels que pour tout nombre complexe z on a:

$$P(z) = (z^2 - 3iz - 2)(z^2 + az + b).$$ **(1pt)**

c) Déterminer les nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 solutions de l'équation : $P(z) = 0$ tels que : $|z_1| < |z_2| < |z_3| < |z_4|$. **(0,5pt)**

2. On écrit chacun des nombres z_1, z_2, z_3 et z_4 sur l'une des quatre faces d'un dé tétraédrique truqué. On lance ce dé et on admet que la probabilité pour que l'une de ces faces soit cachée est proportionnelle au carré du module du nombre complexe z_k inscrit sur cette face,

c'est-à-dire que: $p_k = t|z_k|^2$; $k \in \{1; 2; 3; 4\}$ où $t \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Démontrer que : $p_1 = \dfrac{1}{12}$. **(0,25pt)**

b) Calculer p_2, p_3 et p_4. **(0,75pt)**

c) Soit **X** la variable aléatoire réelle, qui à chaque jet du tétraèdre associe la somme des parties imaginaires des nombres inscrits sur les faces latérales de ce dé.

Vérifier que **X** prend exactement deux valeurs puis déterminer sa loi de probabilité. **(0, 5pt)**

Exercice1 (4points)

(Uniquement pour les candidats de la serie TMGM)

1. Résoudre l'équation différentielle suivante : **(E)** $y'' - 4y' + 5y = 0$. **(1pt)**

2. On considère l'équation différentielle : **(E')** $y'' - 4y' + 5y = (-x+1)e^x$.

a) Déterminer les réels **a** et **b** tels que la fonction **g** définie par : $g(x) = (ax+b)e^x$ soit une solution de (E'). **(1pt)**

b) **h** désignant une solution quelconque de l'équation différentielle (E), montrer que la fonction **f** telle que : $f(x) = g(x) + h(x)$ est une solution de l'équation (E'). **(1pt)**

3. Déterminer, parmi les fonctions **f** définies au **2.b)**, celle dont la courbe représentative dans un repère orthonormé passe par le point $A(0;1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation : $y + x = 0$. **(1pt)**

Exercice2 (5points)

Soit la fonction f_n définie par : $\forall x \in \mathbb{R}; \quad f_n(x) = x^n e^{1-x}$;
où **n** est un entier naturel non nul et **e** est la base du logarithme népérien **ln**.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f_1 (le cas où $n = 1$). **(1pt)**
2. Pour tout entier naturel non nul **n** on pose : $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.
   a) En utilisant une intégration par partie prouver que : $U_1 = e - 2$. **(0,5pt)**
   b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \frac{1}{n+1} \le U_n \le \frac{e}{n+1}$. **(0,5pt)**
   c) Démontrer, en utilisant une intégration par partie, la relation de récurrence suivante :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad U_{n+1} = (n+1)U_n - 1$. **(0,5pt)**
3. Pour tout entier naturel non nul **n** on pose : $V_n = n!e - U_n$.
   a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad V_{n+1} = (n+1)V_n + 1$. **(0,5pt)**
   b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad V_n \in \mathbb{N}$. **(0,5pt)**
   c) Montrer que pour tout entier $n \ge 2$; le nombre $n!e = V_n + U_n$ n'est pas un entier naturel. **(0,5pt)**

4) Soient **p** et **q** deux entiers naturels strictement positifs.
   a) Prouver que pour tout entier naturel $n \ge q$; le nombre $\frac{n!p}{q}$ est un entier naturel. **(0,5pt)**
   b) Prouver, en utilisant une démonstration par l'absurde, que le nombre **e** n'est pas rationnel (Pour cela on peut supposer que $e = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}^*$). **(0,5pt)**

Problème (11points)

Partie A

Dans le plan orienté on considère le triangle direct **ABB'** dont tous les angles sont aigus et on pose $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB'}) = \theta \quad [2\pi]$. On construit à l'éxterieur de ce triangle deux carrés **ABCD** et **AB'C'D'** de centres respectifs **O** et **O'** et soit **P** et **Q** les milieux respectifs de $[BB']$ et $[DD']$.

1. a) Faire une figure illustrant les données précédantes. **(0,5pt)**
   b) Prouver que $B'D = BD'$ et que $(B'D) \perp (BD')$; en déduire la nature du quadrilatère **OPO'Q**. **(1pt)**
2. Soit **I** le point de concours des segments $[B'D]$ et $[BD']$.
   a) Prouver que les points **A** et **I** sont symétriques par rapport à la droite (OO'). **(0,5pt)**
   b)En déduire que : $AQ = IP = \frac{BB'}{2}$ et $AP = IQ = \frac{DD'}{2}$. **(1pt)**
3. Les droites **(AQ)** et **(BB')** se coupent en **H** et les droites **(AP)** et **(DD')** se coupent en **K**.
   a) Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{DD'}$ en déduire que les droites **(AQ)** et **(AP)** sont respectivement des hauteurs dans les triangles **ABB'** et **ADD'**. **(1,5pt)**
   b) Prouver que les six points **O, O', P, Q, H** et **K** sont cocycliques. **(0,5pt)**

Partie B

On suppose, dans la suite du problème, que $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ où $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'}) = \theta\ [2\pi]$.

Soient Γ et Γ' les deux cercles circonscrits respectivement aux carrés **ABCD** et **AB'C'D'**.
On considère la similitude directe **s** de centre **I** et qui transforme **O** en **O'**.

1. a) Faire une nouvelle figure (Pour une meilleure construction, prendre :
$\theta = 50^0$; $AB' = 7cm$; $AB = 5cm$) puis déterminer l'intersection des deux cercles Γ et Γ'. **(0,5pt)**
   b) Construire le point A_1 tel que $s(A) = A_1$, donner une justification de cette construction. **(0,5pt)**
2. Soit **M** un point de Γ distinct de **A** et de **I**, on pose $s(M) = M_1$.
   a) Comparer les deux angles $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{O'I};\overrightarrow{O'M_1})$;puis démontrer que les points **A**, **M** et M_1 sont alignés. **(0,75pt)**
   b) Déduire de ce qui précède une construction simple de M_1 pour un point **M** donné de Γ distinct de **A** et de **I**. **(0,5pt)**
3. Soient les points A_1, B_1, C_1 et D_1 les images respectives des points **A**, **B**, **C** et **D** par s on pose:
$[AB')\cap[A_1B_1] = \{E\}$, $[B'C')\cap[A_1D_1] = \{F\}$, $[C'D')\cap[D_1C_1] = \{G\}$ et $[D'A)\cap[C_1B_1] = \{J\}$.
   a) Construire les points B_1, C_1 et D_1, en déduire une deuxième méthode de construction du point A_1 ; (le point A_1 à été construit au **B.1.b)**. **(0,75pt)**
   b) Montrer que le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ est un carré de centre **O'**. **(0,5pt)**
4. Soit **r** la rotation de centre **O'** et d'angle $\frac{\pi}{2}$.Démontrer que $r(E) = F$ et $r(F) = G$;
en déduire que le quadrilatère **EFGJ** est un carré de centre **O'**. **(0,5pt)**

Partie C

Dans cette partie on conserve la figure précédente (celle de la partie **B**).
On désigne par α l'angle de la similitude **s** définie dans la partie **B** ,

On pose : $\beta = (\overrightarrow{B_1A_1};\overrightarrow{AB'})\ [2\pi]$.

1.a) Prouver que :

$$\alpha = -\theta - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad (1) \ ;$$ **(0,5pt)**

$$\alpha = \theta - \beta + \pi \quad [2\pi] \quad (2).$$ **(0,25pt)**

   b) En déduire que : $\beta = 2\theta - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad (3)$. **(0,25pt)**

2. a) Démontrer que : $(\overrightarrow{O'B_1};\overrightarrow{O'A}) = \beta \quad [2\pi]$. **(0,25pt)**
   b) Pour quelles valeurs de β, l'octogone formé par les sommets des deux carrés **AB'C'D'** et $A_1B_1C_1D_1$ est régulier? **(0,25pt)**
   c) En déduire les valeurs de l'angle $\theta = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'})$ pour lesquelles l'octogone précédent est régulier. **(0,25pt)**
3. Calculer, dans la situation précédente **C.2.c)**, l'aire du carré **EFGJ** en fonction de **AB' = a** longueur du côté du triangle **ABB'**. **(0,25pt)**

Fin

Direction de l'Enseignement Secondaire
Service des Examens

Baccalauréat 2000
Session Normale

Série Mathématique
Sujet : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficient : 9

Exercice 1 (5pts).

On pose, pour tout nombre complexe z :

$$f(z) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 + (6-2i)z + 3 - 2i$$

1°) Montrer que le polynôme $f(z)$ possède une, et une seule, racine réelle z_0 que l'on déterminera. En déduire une factorisation de $f(z)$ sous la forme $(z-z_0)Q(z)$, où $Q(z)$ est un polynôme du 3e degré que l'on précisera.

2°) Vérifier que $Q(i)=0$; en déduire les solutions de l'équation $f(z)=0$.

3°) On note $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. z_1, z_2, z_3 désignant les solutions de l'équation $Q(z)=0$, on appelle M_0, M_1, M_2, M_3 les points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_0, z_1, z_2, z_3. Montrer que (M_1, M_2, M_3) est un triangle équilatéral dont le centre de gravité est M_0 et faire la figure correspondante.

Exercice 2 (5pts)

Soit $\mathcal{E}$ l'espace muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui au point M de coordonnées (x, y, z) fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y', z') tel que

1/3

Soit f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$$

$\boxed{A}$ 1.a) Etudier les variations de la fonction f_0.

b) Construire la courbe $(\mathcal{C}_0)$ de f_0 dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 4cm.
Montrer que $(\mathcal{C}_0)$ admet un centre de symétrie.
Comparer $f_1(x)$ et $f_0(-x)$ et construire $(\mathcal{C}_1)$ dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

2) On pose : $U_n = \int_n^1 f_n(x)dx$

a) Vérifier que : $f_0(x) = \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$, puis vérifier que :
$U_0 + U_1 = 1$.

b) Montrer que $\forall n \geq 2$ $\quad U_n + U_{n-1} = \frac{1-e^{1-n}}{n-1}$.

c) calculer U_1 et U_2.

d) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

- 2/3 -

II] Pour tout entier naturel n, on note par g_n l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g_0(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$g_n(x) = \frac{x^n.\sqrt{1-x}}{1+e^{-x}} + \frac{x^n.\sqrt{1-x} + e^{-(n-1)x}}{1+e^{x}} \quad ; \quad si \quad n \neq 0.$$

1. a°) Etudier la continuité et la dérivabilité de g_n

b°) Vérifier que, pour tout n on a :

$$g_n(x) = f_n(x) + h_n(x) \quad où \quad h_n(x) = x^n.\sqrt{1-x}$$

2. a°) Donner, en distinguant selon la valeur de n, le tableau de variations de h_n.

b°) Tracer les courbes $(\mathcal{A}_0)$, $(\mathcal{A}_1)$ et $(\mathcal{A}_2)$ représentatives de h_0, h_1 et h_2 dans un repère orthonormé.

3. Pour tout n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx \quad et \quad J_n = \int_0^1 h_n(x)\,dx$$

a°) Montrer, en intégrant par partie que, pour tout $n \geq$:

$$J_n = \frac{2n}{2n+3} J_{n-1}$$

b°) En déduire une expression de J_n.

c°) Donner une expression de $(I_n + I_{n-1})$.

d°) Montrer que pour tout n, $J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

e°) Montrer que pour tout $n > 1$; $I_n \leq \frac{3 - e^{1-n}}{n-1}$

– 3/3 –

$2^{ème}$ partie
Corrigés des sujets

Sujet 2012 /Séries : C &TMGM / Session normale

Exercice 1

$f(x) = e^x\ln(e^x + 1)$

1) Justification et interprétation des limites :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x \ln(e^x + 1) = 0 \ln(1) = 0$;

  $\Rightarrow y = 0$ est une (A.H) en $-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x \ln(e^x+1) = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} \ln(e^x + 1) = +\infty \Rightarrow$ (C) admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

2) a) Calcul de la dérivée de f :

$f'(x) = e^x\ln(e^x + 1) + \dfrac{(e^x)^2}{e^x+1} \Rightarrow f'(x) > 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

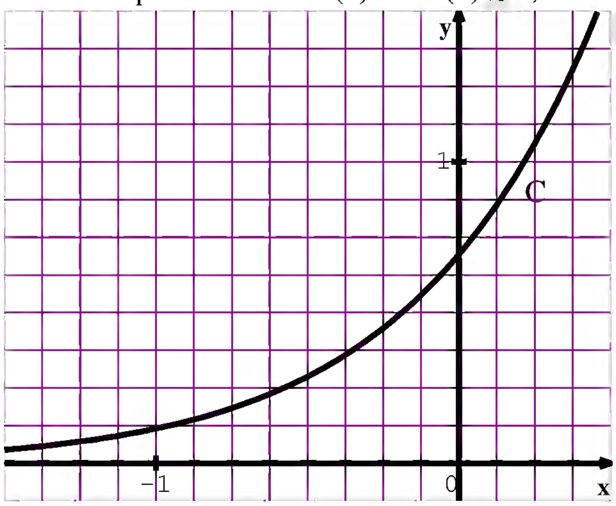
D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f '(x)	+
f (x)	0 $\nearrow$ $+\infty$

b) f est continue et strictement croissante, alors elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $J = \left]0;+\infty\right[$

c) Représentation graphique de (C)

Prenons un point d'aide : $f(0) = \ln(2) \approx 0{,}67$.



3) Calcul de I

- Par la méthode a)

Soient a ; b et c trois nombres réels tels que :

$$f'(x) = f(x) + \frac{ae^x+b}{1} + \frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$f'(x) = f(x) + \frac{(ae^x+b)(1+e^{-x})+ce^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= f(x) + \frac{ae^x+a+b+be^{-x}+ce^{-x}}{\frac{1+e^{-x}}{e^x}}$$

$$= f(x) + \frac{ae^x+a+b+\frac{b+c}{e^x}}{\frac{1+e^{-x}}{e^x}}$$

D'où $f'(x) = f(x) + \dfrac{ae^{2x}+(a+b)e^x+b+c}{1+e^x}$.

Par identification des deux écritures de f'(x) on a :

$$\begin{cases} a=1 & \to 1 \\ a+b=0 & \to 2;\ \text{l'équation 2 donne } b=-1 \\ b+c=0 & \to 3;\ \text{l'équation 3 donne } c=1 \end{cases}$$

Finalement

$f'(x) = f(x) + e^x - 1 + \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, d'où :

$f(x) = f'(x) - e^x + 1 - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ cette écriture nous permet de trouver la primitive F de f :

$F(x) = f(x) - e^x + x + \ln(1 + e^{-x}) + c \Rightarrow$

$$I = \int_0^1 f(x)d(x) = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0)$$

$= e\ln(e + 1) - e + 1 - 1 + \ln(e + 1) - \ln(2) + 1 - \ln(2)$

$I = e\ln(e+1) - e + \ln(e+1) - 2\ln2 + 1$.

- Calcul de I Par la méthode b)

En posant $t = e^x + 1$; on a :

$$\begin{cases} dt = e^x dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{e^x} \\ e^x = t-1 \Rightarrow\ ;\text{si } x=0;\ t=2 \text{ et si } x=1; t=e+1 \end{cases}$$

$$\text{On a} : I = \int_0^1 f(x)d(x) = \int_2^{e+1} (t-1)\ln(t)\frac{dt}{t-1} = \int_2^{e+1} \ln t\,dt$$

$u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \dfrac{1}{t}$

$v'(t) = 1 \Rightarrow v(t) = t \Rightarrow$

$I = \displaystyle\int_2^{e+1} \ln(t)dt$; En utilisant une intégration par parties :

$$I = \int_0^1 v'(t)u(t) = [u(t)\,v(t)]_2^{e+1} - \int_2^{1+e} u'(t)\,v(t)dt$$

$I=[t\ln t - t]_2^{e+1}=(e+1)\ln(e+1)-e-1-(2\ln2-2)$

d'où $I=e\ln(e+1)+\ln(e+1)-e+1-2\ln2$

Exercice 2

1.a) Calcul des composantes de vecteurs :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\-5\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}=1-5+4=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$ (1)

De même :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\-2\end{pmatrix}=2-0-4=0\Rightarrow\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DE}$ (2)

De (1) et (2) $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur normal au plan (ABC)·

b) Comme $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

On a : x –5y -2Z + d = 0 Or A (2 ; 1; 3)∈(ACB) d'où 2 –5 -6 + d = 0 ce qui donne d = 9 et par conséquent l'équation du plan (ACB) devient ;

$x-5y-2Z+9=0$

c) Soit M(x; y ; z) un point de la droite (DE) ; cette appartenance se traduit par l'existance d'un nombre réel λ tel que : $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DE}$; d'où

$\begin{cases}x=5+\lambda\\y=3-5\lambda\\z=-2-2\lambda\end{cases}$

d) Posons M = K ; les coordonnées de ce point vérifient : (5 +λ)-5(3 - 5λ)-2(-2 - 2λ) + 9 = 0 ⇔

$30\lambda+3=0$ d'où $\lambda=\frac{-1}{10}$

Donc les coordonnées de F sont $\left(\frac{49}{10};\frac{35}{10};\frac{-18}{10}\right)$

$\overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{DF}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\frac{49}{10}-6\\\frac{35}{10}+2\\\frac{-18}{10}+4\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\frac{49}{10}-5\\\frac{35}{10}-3\\\frac{-18}{10}+2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\frac{-1}{10}\\\frac{5}{10}\\\frac{2}{10}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{-11}{10}\\\frac{55}{10}\\\frac{22}{10}\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\frac{-1}{10}\\\frac{5}{10}\\\frac{2}{10}\end{pmatrix}\Rightarrow k=11$

2.a) Comme : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow(AC)\perp(AB)$

d'où le triangle ABC est rectangle en A.

$V=\frac{1}{3}\left(\frac{AB\times AC}{2}\right)\times DF=\frac{1}{3}\frac{\sqrt6\times\sqrt5}{2}\times\frac{\sqrt{30}}{10}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{30}{2}\times\frac{1}{10}=0{,}5u.v\cdot$

2)b) $\Gamma_1: 11\overrightarrow{MD}^2-\overrightarrow{ME}^2=30$;

On a : $\overrightarrow{EF}-11\overrightarrow{DF}=0\Rightarrow F=\text{bar}\{(D;11);(E;-1)\}$

Donc $M\in S_1$ où S_1 est la sphère de centre F.

$\Gamma_1: M\in S_1\left(F;\frac{\sqrt{30}}{10}\right)$ passant par D.

Le rayon $r=DF=\frac{\sqrt{30}}{10}$

$\Gamma_2: AD^2-AE^2=-36\Rightarrow A\in\Gamma_2\Rightarrow\Gamma_2$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{DE}$ c'est donc le plan (ABC): $\Gamma_2=(ABC)$.

Exercice 3

$E_\theta: Z^2-(6\cos\theta)Z+4+5\cos^2\theta=0$; $\theta\in[0;2\pi[$.

1.a) Résolution de l'équation

$\Delta'=(3\cos_\theta)^2-(4+5\cos^2\theta)=9\cos^2\theta-4-5\cos^2\theta$

$\Delta'=4\cos^2\theta-4=4(4\cos^2\theta-1)=-4\sin^2{}_\theta=(2i\sin\theta)^2$;

Donc; l'équation admet deux solutions distinctes

$Z_1=3\cos\theta+2i\sin\theta$; $Z_2=3\cos\theta-2i\sin\theta$.

b) Solutions de E_θ suivant les valeurs de θ :

Solutions doubles : ⇔ $\Delta'=0\Rightarrow\theta=0$ ou $\theta=\pi$;

- $\theta=0$; $Z_1=3\cos0=3$; $A_1(3\,;0)$
- $\theta=\pi$; $Z_2=3\cos\pi=-3$; $A_2(-3\,;0)$

Solutions imaginaires pures : ⇔ $\cos\theta=0\Rightarrow$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ ou $\theta=\frac{3\pi}{2}$.

- $\theta=\frac{\pi}{2}$; $Z_1=2i$; $Z_2=-2i$; $B_1(0\,;2)$; $B_2(0\,;-2)$
- $\theta=\frac{3\pi}{2}$; $Z_1=-2i$; $Z_2=2i$; $B_1(0\,;2)$; $B_2(0\,;-2)$

2.a) Soient $M_1(x\,;y)$; $M_2(x_2\,;y_2)$ les images respectives de Z_1 et Z_2.

Nous avons donc :

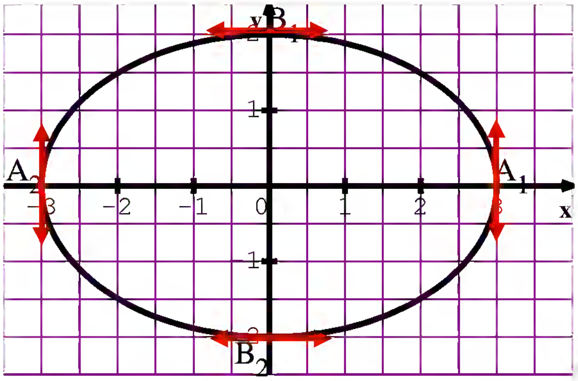
$$\begin{cases} x_1 = 3\cos\theta \\ y_1 = 2\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{3} = \cos\theta \\ \dfrac{y_1}{2} = \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{2}\right)^2 = 1$$

Γ est une ellipse.

b) Γ est une ellipse de centre O d'axe focale (Ox) ; c = $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ de foyers $F(\sqrt{5}\ ;\ 0);F'(-\sqrt{5}\ ;0)$ de directrices respectives $D : x = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$ et $D' = \dfrac{-9}{\sqrt{5}}$.

D'excentricité $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ et de sommets ;

$A_1(3 ; 0)$; $A_2(-3 ; 0)$; $B_1(0 ; 2)$; $B_2(0 ; -2)$.



3) $f : M(Z) \to M'(Z)$

$M' = \text{bar}\ \{(A_1;-4);(B_1;\ 2);(M;3)\}$

a) Expression de Z' :Z' = 3Z -12 +4i; f est donc est une expression complexe de la forme :

Z' = aZ + b ; avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \neq 0$.

Alors f est une homothétie de rapport 3 et de centre ($\Omega(\dfrac{b}{1-a})$) d'où $f = h_{(\Omega(6\,;\,-2)\,3)}$.

b) $\Gamma' = f(\Gamma)$; soient Z = x + iy ; Z' = x' + iy'.

Nous avons : x' + iy' = 3(x + iy) -12 + 4i d'où

$$\begin{cases} x' = 3x - 12 \\ y' = 3y + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'+12}{3} \\ y = \dfrac{y'-4}{3} \end{cases}$$

Or $\dfrac{\left(\dfrac{x'+12}{3}\right)^2}{9} + \dfrac{\left(\dfrac{y'-4}{3}\right)^2}{4} = 1$ d'où

Γ' est caractérisée par l'équation:

$$\frac{(x'+12)^2}{9^2} + \frac{(y'-4)^2}{6^2} = 1$$

- Γ' est une ellipse de centre Ω(-12 ; 4)d'axe focal (Ωx) : y = 4 ;
- $c = \sqrt{81-36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$$\begin{cases} X = x + 12 \to 3\sqrt{5} = x + 12 \Rightarrow x = 3\sqrt{5} - 12 \\ Y = y - 4 \to 0 = y - 4 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Donc : $F(3\sqrt{5} - 12\ ;4);F'(-3\sqrt{5} - 12\ ;4)$;

- $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3\sqrt{5}}{9} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$;
- Les sommets sont :

$A_1(-3 ; 4)$; $A_2(-21 ; 4)$; $B_1(-12 ; 10)$; $B_2(-12 ; -2)$.

Exercice 4

1) f(x)= x – lnx ;

- $D_f =]0 ; +[$
- Limites aux bornes de D_f

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - \ln(x)) = +\infty$

- Dérivée de f : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$
- Tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
f ' (x)		-	0	+	
f (x)	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2.a) Soit $\lambda \in R$; $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)d(x) = \int_\lambda^1 \ln(x)d(x)$

On pose : $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

$\int_\lambda^1 \ln(x)d(x) = [x\ln(x)]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 d(x)$

$= [x\ln(x) - x]_\lambda^1 = 1 - \lambda\ln(\lambda) + \lambda$

b) 0n en déduit que :

$I(\lambda) = \int_\lambda^1 x d(x) - \int_\lambda^1 \ln(x)d(x) = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_\lambda^1 - [x\ln(x) - x]_\lambda^1$

$I(\lambda) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\lambda^2}{2} + 1 + \lambda\ln(\lambda) - \lambda = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\lambda^2}{2} + \lambda\ln(\lambda) - \lambda$;

d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} I(\lambda) = \dfrac{3}{2}$

3 .a) $n \geq 2$; $1 \leq k \leq n$; $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\dfrac{k}{n})$;

$\forall t \in \left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$; $1 \le k \le n$; $\frac{1}{n} \le \frac{k}{n} \le \frac{k+1}{n} \le 1$;

Or $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right] \subset [0 \ ; \ 1]$;

f étant décroissante sur $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$

On peut écrire : pour tout t tel que :

$\frac{k}{n} \le t \le \frac{k+1}{n}$;

Or, on a :

$f(\frac{k+1}{n}) \le f(t) \le f(\frac{k}{n})$

d'où

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k+1}{n})d(t) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)d(t) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(\frac{k}{n})d(t)$$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \le \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)d(t) \le \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$$

b) A partir de la double inégalité précédente on en déduit la somme récurrente suivante :

$$\frac{1}{n}f(\frac{2}{n}) \le \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)d(t) \le \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$$

$$\frac{1}{n}f(\frac{3}{n}) \le \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)d(t) \le \frac{1}{n}f(\frac{2}{n})$$

....

....

....

$$\frac{1}{n}f(1) \le \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(t)d(t) \le \frac{1}{n}f(\frac{n-1}{n})$$

$$S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \le I(\frac{1}{n}) \le S_n - \frac{1}{n}f(1) \quad \Leftrightarrow$$

$$S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \le I(\frac{1}{n}) \le S_n - \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow$$

$$S_n - \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \le I(\frac{1}{n}) \le S_n \rightarrow (1)$$

Enajou tan t $\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$ aux différents membres de cette double inégalité on trouve:

$$S_n \le I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \le S_n + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) \rightarrow (2)$$

de (1) et (2) il en découle que :

$$I(\frac{1}{n}) \le S_n \le I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})$$

c) D'après la double inégalité précédente ; on a

$$\lim_{n\to+\infty} I(\frac{1}{n}) \le \lim_{n\to+\infty} S_n \le \lim_{n\to+\infty}((I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}))$$

Or $\lim_{n\to+\infty} I(\frac{1}{n}) = 0$ (Car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$) et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{n} - \ln\frac{1}{n}) = 0$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} I(\frac{1}{n}) \le \lim_{n\to+\infty} S_n \le \lim_{n\to+\infty}(I(\frac{1}{n}) \Leftrightarrow$

$\frac{3}{2} \le \lim_{n\to+\infty} S_n \le \frac{3}{2}$ D'où $\lim_{n\to+\infty} S = \frac{3}{2}$.

4.a) $\sum_{k=1}^{k=n} \ln(\frac{k}{n}) = \ln(\frac{1}{n}) + \ln(\frac{2}{n}) + ...\ln(\frac{n}{n})$

$= \ln(\frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times .... \times \frac{n}{n}) = \ln(\frac{n!}{n^n})$

$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + ... + n$; c'est la sommme des n premiers termes de la suite arthméthique de 1[er] terme 1 et de raison 1

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(1+n)}{2}.$$

b) $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\left((\frac{k}{n} - \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{k=n} k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\frac{n(1+n)}{2} - \frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n^n})$$

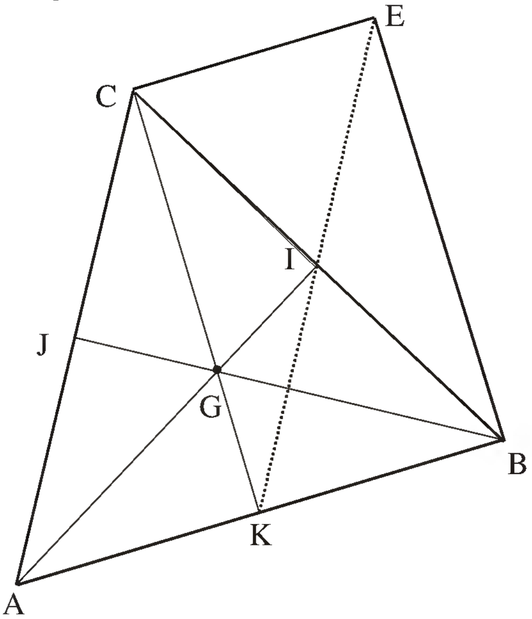
$$= \frac{1}{n^2}\frac{n(1+n)}{2} - \ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{n^2+n}{2n^2} - \ln U_n$$

c) $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n}{2n^2} - \ln U_n\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln U_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = e^{-1}.$$

Exercice 5

1) figure illustrant les données.



2.a) r_1 :$B \to I$; $J \to A$

$BJ = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{3}\frac{a}{2}$; $AI = \sqrt{3}\frac{a}{2}$

$\overrightarrow{BJ} \neq \overrightarrow{AI} \Rightarrow \exists ! r_1$ tel que : $B \to I$; $J \to A$

b) L'angle de r_1 est : $(\overrightarrow{BJ};\ \overrightarrow{IA}) =$ L'angle$(\overrightarrow{GJ};\ \overrightarrow{GA}) = \frac{\pi}{3}$

et de centre le point de rencontre de

médiat$[BJ] \cap$ médiat$[IA] = k \Rightarrow r_1 = r(k ; \frac{\pi}{3})$.

3.a) $t = t_{\overrightarrow{AJ}}; r_2 = t \circ r_1; f = S_{JC} \circ S_{JE} \circ S_{KE}$.

On a :$r_2(J) = t \circ r_1(J) = t(A) = J \Rightarrow r_2(J) = J$

$\Rightarrow r_2 = r(J ; \frac{\pi}{3})$

b) $r_1 = S_{KC} \circ S_{\Delta_1}; r_2 = S_{JC} \circ S_{\Delta 2}$

$\Delta_1 = (KE)$; $\Delta_2 = (JE)$ car JIEC est un parallélogramme $\Rightarrow$

$r_1 = S_{KC} \circ S_{KE}; r_2 = S_{JC} \circ S_{JE}$

$f = S_{JC} \circ S_{JE} \circ S_{KE} = r_2 \circ S_{KE} = t_{\overrightarrow{AJ}} \circ r_1 \circ S_{KE}$

$= t_{\overrightarrow{AJ}} \circ S_{KC} \circ S_{KE} \circ S_{KE} \Rightarrow f = t_{\overrightarrow{AJ}} \circ S_{KC}$

c) $f(B) = t_{\overrightarrow{AJ}}(A) = J$; $f(I) = t_{\overrightarrow{AJ}}(J) = C$

$f(K) = t_{\overrightarrow{AJ}}(K) = I;$

Donc $f(BIK) = (JCI)$

f est une antidéplacement

med$[IC] \neq$ med$[KJ]$; d'où f est une symétrie glissée.

- $p = [I * K]$; $R = I * C$;
  $f = t_{\overrightarrow{PR}} \circ S_{(PR)}$

4.a) $E \to I$; $C \to G$; $E \neq C$ et $I \neq G$

D'où il existe une unique similitude directe S telle que : S(E) = I et S(C) = G.

b) quelques éléments caractéristiques :

Angle de S : $(\overrightarrow{EC} ; \overrightarrow{IG}) = (\overrightarrow{IJ} ; \overrightarrow{IG}) = \frac{\pi}{6}(2\pi)$

Rapport de S : $\frac{IG}{EC} = \frac{\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) Soit Ω le centre de cette similitude, donc on a

5.a) : $M \in \mathscr{C}_{([BC])}$; $S(M) = M'$

$M \in \mathscr{C}_{([BC])}$; $S(M) = M' \Leftrightarrow \Gamma' = \mathscr{C}_{([BG])}$

$\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega E} ; \overrightarrow{\Omega I}) = \frac{\pi}{6}(2\pi) \text{ et} \\ (\overrightarrow{BE} ; \overrightarrow{BI}) = \frac{\pi}{6}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \Omega \in \mathscr{C}_{(BEI)}$. De même on a

$\begin{cases} (\overrightarrow{\Omega C} ; \overrightarrow{\Omega G}) = \frac{\pi}{6}(2\pi) \text{ et} \\ (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BG}) = \frac{\pi}{6}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \Omega \in \mathscr{C}_{(BCG)} \Rightarrow$

Donc $\Omega \in \mathscr{C}_{(BEI)} \cap \mathscr{C}_{(BCG)}$;

$BE = AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a;\ BI = \frac{a}{2}$; $= \frac{BI}{BE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\begin{cases} (\overrightarrow{BE} ; \overrightarrow{BI}) = \frac{\pi}{6} \\ BI = \frac{\sqrt{3}}{3}BE \end{cases} \Rightarrow S = S_{(B ; \frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\pi}{6})}$

b)$K \neq B; (\overrightarrow{KM}; \overrightarrow{KM'}) = (\overrightarrow{KM}; \overrightarrow{KB}) + (\overrightarrow{KB} ; \overrightarrow{KM'})(\pi$

$= (\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{GB}; \overrightarrow{GM'})(\pi)$

$= (\overrightarrow{GM'} ; \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{GB}; \overrightarrow{GM'})(\pi)$

$= 0\ (\pi)$

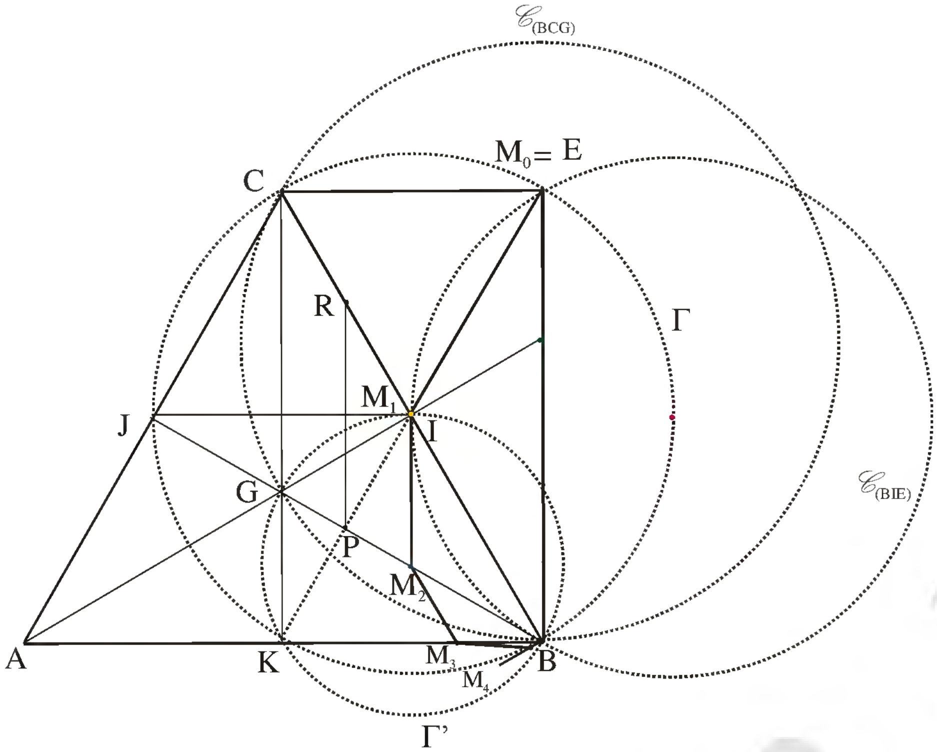
d'où $K \in (MM')$.

c) La droite (KM) recoupe Γ' en M'.

6) $n \geq 2$; $S^2 = S \circ S$ et $S^n = S \circ S^{n-1}$

M_n : $M_0 = E$; $M_1 = S(M_0)$;$M_n = S^n(M_0)$.

a) Figure illustrant les données et donnant le positionnement des points demandés



b) $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_nM_{n+1}$

$$S_n = M_0M_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}M_0M_1 + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n M_0M_n = EI\left(\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n = \dfrac{\frac{a}{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow$ la longueur de la ligne brisée $M_0M_1 + \cdots + M_nM_{n+1}$

s'approche de $\dfrac{\frac{a}{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$; $S_n = \dfrac{a}{2}\dfrac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

d) $1960\frac{\pi}{6} = 326\pi + \frac{4\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}\ (2\pi) \Rightarrow M_{1960} \in (BM_4)$.

- $2012 = 335 \times 6 + 2 \Rightarrow M_{2012} \in (BG)$.

Sujet 2012 /Séries : C& TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

1 .a) $P(-2i) = +8i +16- 8i - 8i - 12 - 4 +8i = 0$;
Soit $P(Z) = (Z+2i)(Z^2 + aZ+ b)$ tels que a et b de $\mathbb{R}$. Le tableau suivant donne ces nombres :

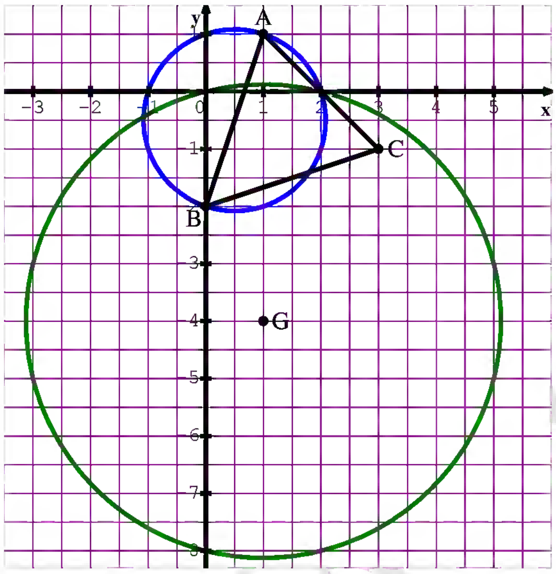
-2i	1	-4 + 2i	4 - 6i	-4 + 8i
		-2i	8i	-8i +4
	1	-4	4 + 2i	0

Donc a = -4 ; b = 4 + 2i
b) $P(Z) = (Z+2i)(Z^2 - 4Z+ 4+2i)$
$P(Z) = (Z+2i)(Z^2 - 4Z+ 4+2i)= 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} Z = -2i \\ Z^2 - 4Z + 4 + 2i = 0 \end{cases}$$

$\Delta = 16 - 16 -8i = -8i = (2 - 2i)^2 \Rightarrow$
$Z = 3 - i$; $Z' = 1 + i$
Donc les solutions de l'équation sont
$\{ -2i \; ; \; 3-i \; ; \; 1+i \}$

2.a) $Z_A = 1 + i$; $Z_B = -2i$; $Z_C = 3 - i$



b) G barycentre du système $\{(O\,;3)\;;\;(A\,;-4)\;;\;(B\,;1)\;;\;(C\,;2)\}$

$$Z_G = \frac{3Z_O - 4Z_A + Z_B + 2Z_C}{2}$$

$$= \frac{0 - 4 - 4i - 2i + 6 - 2i}{2} = 1 - 4i$$

- Vérification :

$$\frac{5Z_O - 5Z_B + 2Z_G}{2} = \frac{0 + 10i + 2 - 8i}{2}$$

$$= 1 + i = Z_A \cdot$$

Alors ; A est le barycentre du système donné.

c) $M \in \Gamma \Leftrightarrow Z = 1+i$ ou $\arg\left(\dfrac{Z-(1+i)}{Z-(2i)}\right) = \dfrac{\pi}{2}(\pi)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M = A \\ \text{ou} \\ \left(\overrightarrow{MB}\;;\;\overrightarrow{MA}\right) = \dfrac{\pi}{2}(\pi) \end{cases}$$

Donc Γ est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

3.a) $\varphi(M) = 3MO^2 - 4MA^2 + MB^2 + 2MC^2$

$M \in \Gamma_k \Leftrightarrow 2MG^2 + \varphi(G) = k \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{k - \varphi(G)}{2}$

Or $\varphi(G) = 3GO^2 - 4GA^2 + GB^2 + GC^2$
$= 51 - 100 + 5 + 26 = -18$

$M \in \Gamma_k \Leftrightarrow MG^2 = \dfrac{k+18}{2}$

- Si $k < -18 \Rightarrow \Gamma_k = \Phi$
- Si $k = -18 \Rightarrow \Gamma_k = \{G\}$
- Si $k > -18 \Rightarrow \Gamma_k = \mathscr{C}_{\left(G;\sqrt{\frac{k+18}{2}}\right)}$

b) $\Gamma_{16} = \mathscr{C}_{\left(G;\sqrt{\frac{34}{2}}\right)}$

$\varphi(O) = -4AO^2 - OB^2 + 2OC^2 = -8 + 4 + 20 = 16$

d'où $O \in \Gamma_{16} \Rightarrow \Gamma_{16} = \mathscr{C}_{(G\;;\;OG)}$

Exercice 2

$f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$; $D_f =]0\;;\;+\infty[\setminus\{1\}$.

1.a) Etude de limites et interprétation :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ est AV}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow x = 1 \text{ est AV}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ est AV}$$

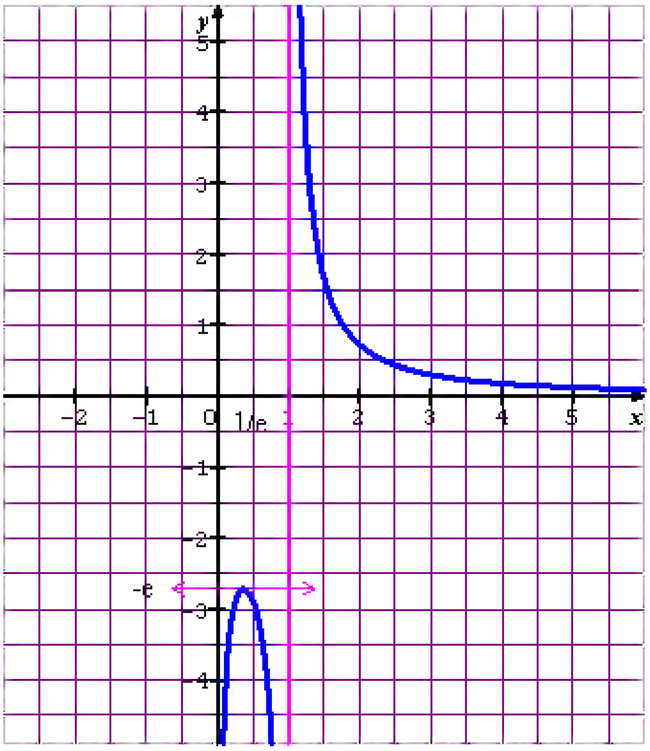
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x\ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ est AH}$$

b) $f'(x) = \dfrac{-(\ln x + 1)}{x^2\ln^2 x}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.

- Tableau de variations

x	0 e^{-1}	1 +∞
f'(x)	+ 0 -	-
f (x)	-∞ ↗ $-e$ ↘ -∞	+∞ ↘ 0

c) Représentation graphique



2 .a) $n \geq 2$; f est décroissante sur [n ; n + 1] ; pour tout t tel que : $n \leq t \leq n+1$ on a :

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \Rightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n)$$

d'où $\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \frac{1}{n\ln n}$

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(n+1))$

$= f(n+1) - \left[\ln(\ln(t))\right]_n^{n+1}$

$= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)dt$

2.a) $f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)dt \leq 0$ d'où (U_n) est décroissante.

c) $n \geq 2$ de 2.a) on a : $\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \Rightarrow$

$- f(n) \leq - \int_n^{n+1} f(t)dt \Rightarrow f(n+1) - f(n) \leq f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)dt \Leftrightarrow$

$f(n+1) - f(n) \leq U_{n+1} - U_n$.

Donc on a en sommant membre à membre :

$U_3 - U_2 \geq f(3) - f(2)$

$U_4 - U_3 \geq f(4) - f(3)$

……………………..

……………………..

……………………..

$U_n - U_{n-1} \geq f(n) - f(n-1)$

$U_n - U_2 \geq f(n) - f(2)$

$U_n \geq f(n) - f(2) + U_2$

$U_n \geq \frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2} - \ln\ln 2$

$U_n \geq \frac{1}{n\ln n} - \ln\ln 2 \Rightarrow U_n \geq -\ln\ln 2$

d) (U_n) est décroissante et minorée donc elle converge.

$-\ln\ln 2 \leq U_n \leq U_2 \Leftrightarrow$

$-\ln\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2\ln 2} - \ln\ln 2$

Exercice 3

$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x}$

1.a) Etude de limites et interprétation

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{e^x} = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 - 3x + \frac{1}{x}}{e^x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3e^{-x} - 3x^2e^{-x} + e^{-x}) = 0 \Rightarrow$

$y = 0$ est AH.

La courbe de f admet une branche parabolique de direction (Oy).

$f'(x) = \frac{(6x^2 - 6x)e^x - e^x(2x^3 - 3x^2 + 1)}{e^{2x}}$

b) $f'(x) = e^{-x}(-2x^3 + 9x^2 - 6x - 1)$

$f'(x) = 0$; il est claire que x = 1 est solution de l'équation ; pour déterminer les autres solutions on fait recours au tableau suivant :

$f'(1) = 0$

	-2	9	-6	-1
1		-2	7	1
	-2	7	1	0

Dona on a : $f'(x) = e^{-x}(x-1)(-2x^2 + 7x + 1)$

$f'(x) = e^{-x}(x-1)(-2x^2 + 7x + 1)$

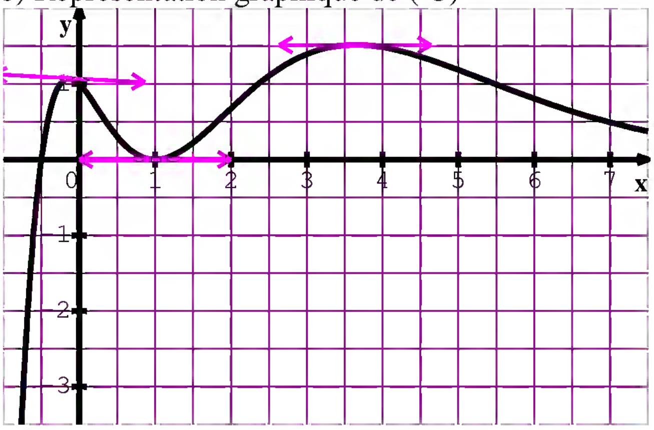
$-2x^2 + 7x + 1 = 0$

$\Delta = 49 + 8 = 57$

$x_1 = \frac{7 - \sqrt{57}}{4}$; $x_1 = \frac{7 + \sqrt{57}}{4}$

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
x - 1		-		-	0	+		+	
$-2x^2+7x+1$		-	0	+		+	0	-	
f '(x)		+	0	-	0	+	0	-	
f (x)	$-\infty$	↗	$f(x_1)$	↘	0	↗	$f(x_2)$		0

b) Représentation graphique de (C)



3 .a) $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

L'existence de I_n est justifiée par la continuité de la fonction $x \mapsto x^n e^x$ sur l'intervalle [0 ; 1].

b) $x^n e^x \geq 0$; $\forall\, x \in [0\,;\,1] \Rightarrow \int_0^1 x^n e^x dx \geq 0$;

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n e^x (x-1)dx \leq 0 \Rightarrow (I_n)$ est décroissante.

I_n) décroissante et minorée par 0 don elle est convergente.

c) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$;

$e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^n}{e} \leq x^n e^x \leq x^n$ en intégrant on a

$\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

4. a) $I_0 = \int_0^1 e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_0^1 = 1 - e^{-1}$

b) Soient : $u'(x) = x^n \Rightarrow u(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$v(x) = e^{-x} \Rightarrow v'(x) = -e^{-x} \Rightarrow$

$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}e^{-x}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}I_{n+1} = \frac{1}{n+1}e^{-1} + \frac{1}{n+1}I_{n+1}$

$(n+1)I_n = \frac{1}{e} + I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1)I_n$

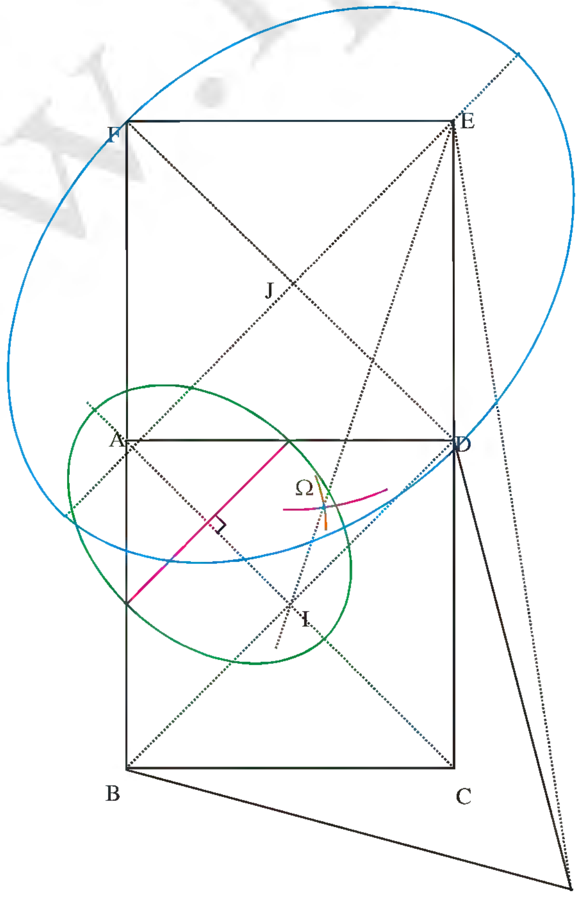
c) A =

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2x^3e^{-x}dx - 3\int_0^1 x^2e^{-x}dx + \int_0^1 e^{-x}dx$

A $= 2I_3 - 3I_2 + I_0$

Exercice 4

a) Figure illustrant les données et représentation demandée



b) DF = DB car $S_{(AD)}$ conserve les distances
DB = GB car (DBG) est équilatéral $\Rightarrow$ DF = GB d'autre part $\overrightarrow{DF} \neq \overrightarrow{GB}$ alors ; il existe r_1 tel que $r_1(D) = G$ et $r_1(F) = B$ d'angle $(\overrightarrow{DF} ; \overrightarrow{GB}) = (\overrightarrow{GC} ; \overrightarrow{GB}) = \frac{\pi}{6}$.

Centre de r_1 est Ω_1 = media(DG) $\cap$ media(FB).

c) $r_2 : G \to E \ ; B \to A$ a pour angle

$\theta = (\overrightarrow{GB} ; \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{GB} ; \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{BG} ; \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{3}$

et de centre Ω_2 = media(GE) $\cap$ media(AB).

d) $r = r_2 \circ r_1$; r (D) = ; $r_2(r_1(D)) = r_2(D) = E$;

$r(F) = r_2(r_1(F)) = r_2(B) = A$;

r a pour angle $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$;

On a : $r_{(J;\frac{\pi}{2})}(D) = E$ donc $r_{(J;\frac{\pi}{2})} = r$ d'où le centre de r est J .

2 .a) $h = h_{(B;\frac{1}{2})}$; $S = h \circ r$ est la composée d'une homothétie et d'une rotation c'est une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

b) S : $\Omega \to \Omega$;

$h \circ r(E) = h(F) = A$

$h \circ r(A) = h(D) = I$

d'où $\Omega \in \mathscr{C}_{[AE]} \cap \mathscr{C}_{[AI]}$ autre que A.

c) $\left(\overrightarrow{\Omega I} ; \overrightarrow{\Omega E}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega I} ; \overrightarrow{\Omega A}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A} ; \overrightarrow{\Omega E}\right)$

$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$.

$\Omega \in (IE)$ D'autre part $\frac{\Omega A}{\Omega E} = \frac{1}{2} = \frac{\Omega I}{\Omega A}$;

$\frac{\Omega I}{\Omega E} = \frac{1}{4} \Rightarrow \Omega E = 4\Omega I \Rightarrow \Omega = \text{bar}\ \{(E ; 1) ; (I ; 4)\}$

2$^{\text{ème}}$ Méthode

$S \circ S(E) = I \Rightarrow \overrightarrow{\Omega I} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega E}$; car $S \circ S = h_{(\Omega ; -\frac{1}{4})}$

$\overrightarrow{\Omega E} + 4\overrightarrow{\Omega I} = \vec{0}$ d'où $\Omega = \text{bar}\left\{(E;1);(I;4)\right\}$

3) $\Gamma = \left\{M / MA + ME = 2a\right\}$

a) Γ est une ellipse de foyers A et E avec $AE = a\sqrt{2}$ sachant que : $a\sqrt{2} < 2a$.

O na : DA + DE = a + a = 2a d'où D$\in\Gamma$.

b) Les sommets sont D ; F. S. S' tel que :

JS = a = JS' ; {S ; S'} = $\mathscr{C}_{[J ; a]} \cap$ (AE)

$\left\{S ; S'\right\} = C_{[J; a]} \cap (AE)$.

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{JE}{AD}$.

c) Γ' est l'ellipse de foyers S(A) = I et S(E) = A.

et d'excentricité $e' = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}JE}{\frac{1}{2}AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Voir figure prcédente).

Sujet 2011 /Séries : C &TMGM / Session normale

Exercice 1

1) $P(Z) = Z^3 - (1+2\cos\theta)Z^2 + 1+2\cos\theta)Z - 1$;

Après calcul ; $P(1) = 0$;

Soit $P(Z) = (Z-1)(Z^2 - aZ + b)$ tels que a et b des nombres complexes à déterminer.

Il suffit d'établir le tableau suivant qui donne facilement ces nombres :

	1	$-1-2\cos\theta$	$1+2\cos\theta$	-1
1		1	$-2\cos\theta$	$+1$
	1	$-2\cos\theta$	1	0

Donc $a = -2\cos\theta$; $b = 1$

$P(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z-1)(Z^2 - 2\cos\theta Z + 1) = 0$;

$Z_0 = 1$ ou $Z^2 - 2\cos\theta Z + 1 = 0$; On a

$\Delta = (-2\cos\theta)^2 - 4(1) = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1)$

$4(-\sin^2\theta) = (2i\sin\theta)^2$ d'où

$$Z_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta \ ;$$

$$Z_2 = \frac{2\cos\theta - 2i\sin\theta}{2} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

2) Soient $M_1(x_1 ; y_1)$; $M_2(x_2 ; y_2)$ les affixes de Z_1 et Z_2 respectivement.

Alors $M_1(x_1; y_1) : \begin{cases} x_1 = \cos\theta \\ y_1 = \sin\theta \end{cases} ; \Leftrightarrow x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} = 1 \Leftrightarrow$

$M_1 \in \mathscr{C}_{(O;1)}$. De même $M_2 \in \mathscr{C}_{(O;1)}$.

3.a) G bar $\{(M_0 ; 1) ; (M_1 ; 1) ; (M_2 ; -3)\}$; d'où

$$Z_G = \frac{1Z_0 + 1Z_1 - 3Z_2}{-1} = \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta - 3\cos\theta + 3i\sin}{-1}$$

$$= -1 + 2\cos\theta - 4i\sin\theta \Rightarrow Z_G(-1 + 2\cos\theta \ ; -4\sin\theta)$$

Donc : $Z_G(-1 + 2\cos\theta \ ; -4\sin\theta) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = -4\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x+1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{4}y \end{cases} \text{ d'où}$$

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}y\right)^2 = 1.$$

Il résulte que le lieu géométrique Γdu point G est une ellipse d'équation :

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}y\right)^2 = 1, \text{ dans le repère } (O; \vec{u} \ ; \vec{v}).$$

b) Le centre de cette ellipse est $\Omega(-1 ; 0)$ d'où l'équation de l'ellipse dans le nouveau repère est :

$(\Omega; \vec{u} \ ; \vec{v})$; est $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{16} = 1$

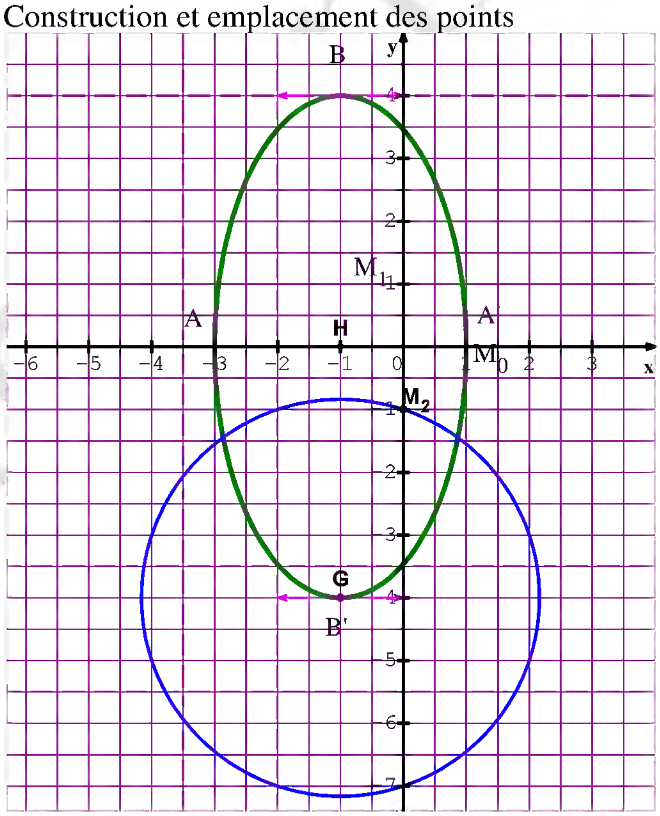
Dans le repère $(O \ ; \vec{u} \ ; \vec{v})$ on donne les éléments caractéristiques suivants :

- Sommets: $A(1 ; 0)$; $A'(-1 ; 0)$; $B(-1 ; 4)$; $B'(-1 ; -4)$.

  $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

- Excentricité : $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- Construction et emplacement des points



4.a) Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$; On a : $M_0(1; 0)$; $M_1(0; 1)$; $M_2(0; -1)$;

$G(-1 \ ; -4)$; on constate que G est un somet de Γ.

b) Γ' est l'ensemble des points M tels que :

$MM_0^{\ 2} + MM_1^{\ 2} - 3MM_2^{\ 2} = 6$

On remarque que : $M_2 \in \Gamma'$ d'où Γ' est le cercle de centre G passant par M_2.

Exercice 2

1.a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x - x\ln x) = 0 = f(0)$.

D'où la continuité de f en 0.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(1 - \ln x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(1 - \ln x) = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0 et la courbe de f admet une demi-tangente verticale à droite de 0.

b) Dérivée et sens de variations de f :

$f'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$;

$f'(x) \leq 0$; $\forall\, x \in [1\,;+\infty[$ et $f'(x) \geq 0$; si $x \in]0\,;1]$

- Limites aux bornes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x(1-\ln x) = -\infty.$

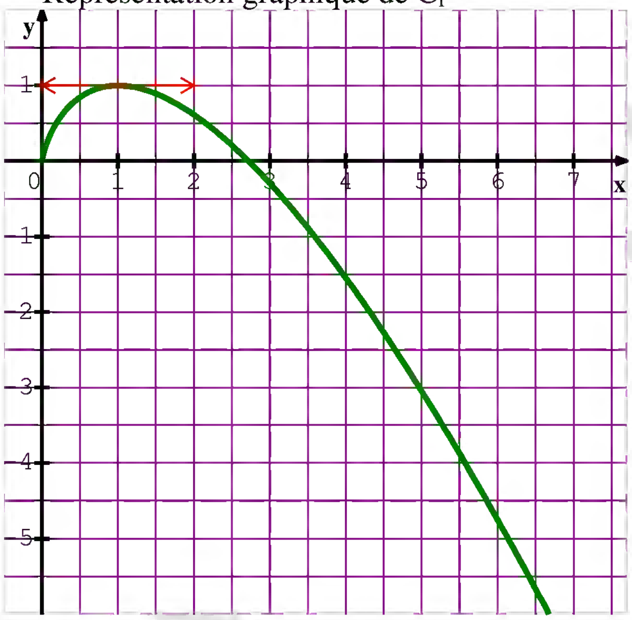
- Tableau de variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f (x)	0 ↗	1	↘ $-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x(1-\ln x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \ln x = -\infty$

Donc C_f admet une branche parabolique de direction (Oy).

- Intersection de C_f avec (Ox) ;
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e$.
- Représentation graphique de C_f



2.a) Pour tout $n > 1$: $\begin{cases} f_n(x) = x^n(1-\ln x) \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^n(1-\ln x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} x^{n-1} - x^{n-1}\ln x = 0 \Rightarrow$$

f_n est dérivable en 0 et C_{fn} admet une demi- tangente horizontale en 0.

- Limites aux bornes

$\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^n - x^n \ln x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n(1-\ln x) = -\infty$

- Dérivée et sens de variations

$f_n'(x) = nx^{n-1}(1 - \ln x) - \dfrac{1}{x}x^n = x^{n-1}(n - \ln nx - 1)$

Soit $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = e^{\frac{n-1}{n}}$

x	0	$e^{\frac{n-1}{n}}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f (x)	0 ↗	$\dfrac{e^{n-1}}{n}$	↘ $-\infty$

3.a) On pose : $f_{n+1}(x) = f_n(x) \Leftrightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^n(1 - \ln x)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = e$.

D'où toute les courbes (C_n) passent par les trois points : (0 ; 0) ; (1 ; 1) et (e ; 0).

b) Position relative de (C_{n+1}) et (C_n).

D'après la 3.a) on a le tableau suivant qui donne la position cherchée

x	0	1	e	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	-	0 +	0	-
C_n par rapport à C_{n+1}	C_n / C_{n+1}	C_{n+1} / C_n		C_n / C_{n+1}

4.a) U_n est l'aire du domaine limité par (C_n) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \dfrac{1}{e}$; $x = 1$

b) Comme $f_n(x) > 0$ sur $[0\,;\dfrac{1}{e}] \Rightarrow (U_n) \geq 0$; de plus $U_{n+1} - U_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f_{n+1}(x)dx - \int_{\frac{1}{e}}^{1} f_n(x)dx$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{1} (f_{n+1}(x) - f_n(x))dx < 0$$

d'après 3.b) d'où (U_n) est décroissante.

c) On a : $U_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} x^n(1-\ln x)dx$; on pose :

$$\begin{cases} u(x) = 1 - \ln x \Rightarrow u'(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x^n \quad \Rightarrow v(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$U_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} \times (1-\ln x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} -\frac{x^n dx}{n+1} \Rightarrow$$

$$U_n = \frac{1}{n+1}\left[1 - \frac{2}{e^{n+1}}\right] + \frac{1}{(n+1)^2}\left[1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right] \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \cdot$$

Exercice 3

1.a) Calcul de limites

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = -1 \Rightarrow y=-1 \text{ est (AH) ;}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}(1-e^{2x})}{e^{x}(1-e^{-2x})} = 1 \Rightarrow y=1 \text{ est (AH) ;}$$

b) $\forall x \in Df$; $-x \in Df$; $f(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = -f(x) \Rightarrow$

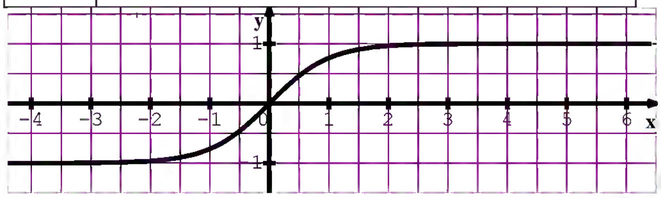
f est impaire.

- Dérivée et sens de variation

$$f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \Rightarrow f'(x)>0$$

Tableau de variations

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f'(x)	+
f (x)	-1 $\nearrow$ 1



d) Calcul d'aire A

$$A = \int_0^{\ln 3} f(x)dx = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx \text{ .ua}$$

$$= \left[\ln(e^x+e^{-x})\right]_0^{\ln 3} = \ln(3+\frac{1}{3}) - \ln 2 = \ln\frac{5}{3}.$$

2.a) $U_1 = \int_0^{\ln 3} f(t)dt = A = \ln\frac{5}{3}.$

b) On a : $t\in[0 ; \ln 3] \Leftrightarrow 0 \le t \le \ln 3$, en plus f est croissante sur [0 ; ln3] ; alors $f(0) \le f(t) \le f(\ln 3)$ d'où $0 \le f(t) \le \frac{4}{5} \Rightarrow 0 \le (f(t))^n \le (\frac{4}{5})^n$

Donc $\int_0^{\ln 3} 0dt \le \int_0^{\ln 3} f^n(t)dt \le \int_0^{\ln 3} (\frac{4}{5})^n(t)dt$; d'où

$0 \le U_n \le (\frac{4}{5})^n \ln 3$; donc $\lim_{x\to+\infty} U_n = 0$.

c) $1 - f'(x) = 1 - \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^x+e^{-x})^2-4}{(e^x+e^{-x})^2} \Rightarrow$

$$1 - f'(x) = \frac{e^{2x}+2e^{-2x}-4}{(e^x+e^{-x})^2} = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2 = (f(x))^2$$

$$U_{n+2}-U_n = \int_0^{\ln 3}(f(t)^{n+2}-f(t)^n)dt = \int_0^{\ln 3}(f(t)^n(f^2(t)-1)dt \Rightarrow$$

$$U_{n+2}-U_n = -\int_0^{\ln 3} f'(t)(f^n(t)]dt = \frac{-1}{n+1}\left[f^{n+1}(t)\right]_0^{\ln 3}$$

$$U_{n+2}-U_n = -\int_0^{\ln 3} f'(t)(f^n(t)]dt = \frac{-1}{n+1}\left[f^{n+1}(t)\right]_0^{\ln 3}$$

$$= \frac{-1}{n+1}(\frac{4}{5})^{n+1}.$$

d) On a : $U_{n+2}-U_n = \frac{-1}{n+1}(\frac{4}{5})^{n+1}$; d'où :

$U_{2n} - U_{2n-2} = \frac{-1}{2n-1}(\frac{4}{5})^{2n-1}$

$U_{2n-2} - U_{2n-4} = \frac{-1}{2n-3}(\frac{4}{5})^{2n-3}$

....

....

....

$U_4 - U_2 = \frac{-1}{3}(\frac{4}{5})^3$

$U_2 - U_0 = \frac{-1}{1}(\frac{4}{5})$

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

$U_{2n} - U_0 = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1)}(\frac{4}{5})^{2p-1} \Rightarrow$

$U_{2n} = \ln 3 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1)}(\frac{4}{5})^{2p-1}$ (car $U_0 = \ln 3$); puis on a :

$U_{2n+1} - U_{2n-1} = \frac{-1}{2n}(\frac{4}{5})^{2n}$;

$U_{2n+1} - U_{2n-1} = \frac{-1}{2n}(\frac{4}{5})^{2n}$

....

....

....

$U_3 - U_1 = \frac{-1}{2}(\frac{4}{5})^2$

$U_{2n+1} - U_{2n-1} = \frac{-1}{2n}(\frac{4}{5})^{2n}$

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

$U_{2n+1} = \ln\frac{5}{3} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}(\frac{4}{5})^{2p}.$

e) On a : $S_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3 + ... + \frac{1}{2n}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}$;

Or $S_1 = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p-1}$ de même $S_2 = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p}\left(\frac{4}{5}\right)^{2p}$.

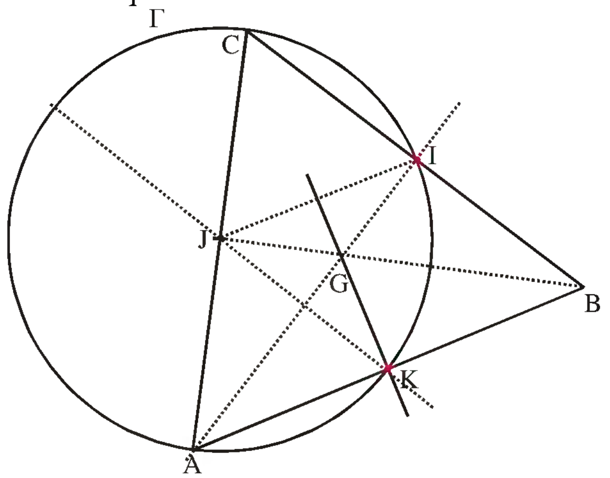
Donc ; $S_n = S_1 + S_2 = \ln 3 - U_{2n} + \ln\frac{5}{3} - U_{2n+1} \Rightarrow$

$S_n = \ln 5 - U_{2n} - U_{2n} - U_{2n+1} \Rightarrow$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 5$; car $\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} U_{2n+1} = 0$

Exercice 4

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



b) On a : $\begin{cases} AJ = IB = \frac{a}{2} \Rightarrow \\ \overrightarrow{AJ} \neq \overrightarrow{IB} \end{cases}$

il existe une unique rotation $r_1 : \begin{matrix} I \to A \\ B \to J \end{matrix}$

c) L' angle de la rotation r_1 est déterminé par :

$$\alpha = (\overrightarrow{IB} ; \overrightarrow{AJ}) = (\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{CA}) + \pi$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

Le centre est Ω, déterminé par :

{médiatrice [IA]$\cap$ médiatrice [BJ] }= {K}.

2.a) r_2 (C) = J ; r_2(J) = K ; (voir construction).

b) r_2(JC) = (JK).

3.a) On a : $h : \begin{matrix} A \to I \\ B \to J \\ C \to K \end{matrix} \Rightarrow h(ABC) = IJK$

b) S est la composée d'une homothétie et d'une rotation, alors S est une similitude directe de rapport $|-\frac{1}{2}|$ et d'angle $2\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$.

c) S(A) = r_1(h(A)) = r_1(I)= A ; d'où A est invariant par S, donc A est le centre de S.

d) On en dédéduit facilement la forme réduite de S qui est : S = h'o r' = r'o h' telle que :

$h' = h_{(A;\frac{1}{2})}$ et $r' = r_{(A;\frac{-\pi}{3})}$.

4.a) Caractérisation de S^3 :

- $\alpha_S^3 = 3(-\frac{\pi}{3}) = -\pi \Rightarrow S^3 = h_{(A;-\frac{1}{8})}$

C'est – à – dire que S^3 est l'homothétie de centre A et de arpport - $\frac{1}{8}$.

b) En posant p = 10^{2011} ; on veut démontrer que S^{p-1} est une homothétie de rapport négatif.

Méthode 1 :

p = 10^{2011} est un multiple impair de 10.

P – 1 est un multiple impair de 9 et par suite c'est un multiple de 3 d'où p - 1 = $3(2k+1)$; $k \in \mathbb{Z}$.

Donc ; $\alpha_S^{p-1} = 3(2k+1) \times (-\frac{\pi}{3})[2\pi]$.

Méthode 2 :

$P - 1 = 10^{2011} - 1 \Leftrightarrow$

$\frac{p-1}{10-1} = \frac{10^{2011}-1}{10-1} = 1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{201} \Leftrightarrow$

$10^{2011} - 1 = 9(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{201}) \Leftrightarrow$

$p - 1 = 3 \times 3(2k+1)$

$(p-1)(-\frac{\pi}{3}) = 3(2k+1)(-\pi)$

$= -6k\pi - 3\pi = -\pi[2\pi]$.

Donc S^{p-1} est une homothétie de rapport négatif.

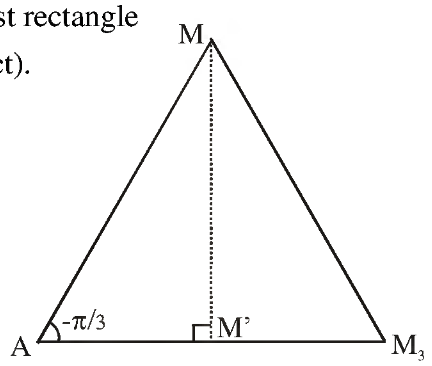
5.a) On a : $\begin{cases} r_1(M) = M_1 \\ r_2(M) = M_1 \\ S(M) = M' \end{cases}$; De plus

$r_1(I) = A$ $\quad$ $r_2(I) = I$

$r_1(K) = K$ Puis $r_2(K) = B$

$r_1(A) = S_k(J)$ $\quad$ $r_2(A) = S_k(J)$

b) Soit AMM_3 un triangle équilatéral indirect (car $\alpha_S = -\frac{\pi}{3}$). Comme ($R_S = \frac{1}{2}$), alors M' est le pied de la hauteur issue de M , donc AMM' est rectangle en M' (indirect).



c) On a : M ; M_1 et M_2 sont alignés d'où

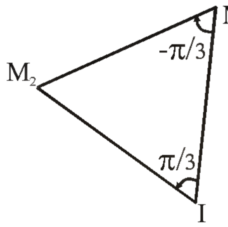
$(\overrightarrow{MM_1}\ ;\ \overrightarrow{MM_2}) = (\overrightarrow{MM_1}\ ;\ \overrightarrow{MK}) + (\overrightarrow{MK}\ ;\ \overrightarrow{MI}) + (\overrightarrow{MI}\ ;\ \overrightarrow{MM_2})$

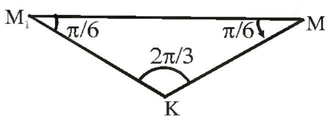
$= \frac{\pi}{6} + (\overrightarrow{MK}\ ;\ \overrightarrow{MI}) - \frac{\pi}{3}$

$= (\overrightarrow{MK}\ ;\ \overrightarrow{MI}) - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{MM_1}\ ;\ \overrightarrow{MM_2}) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MK}\ ;\ \overrightarrow{MI}) = \frac{\pi}{6}[\pi]$

Or $(\overrightarrow{CK}\ ;\ \overrightarrow{CI}) = (\overrightarrow{AK}\ ;\ \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6}$; d'où Γ est le cercle de diamètre [AC] privé de I et K.





6 .a) $M \in \Gamma \Leftrightarrow M$; M_1 et M_2 sont alignés ;

$(M_1M_2) = (MM_2)$; $(\overrightarrow{MM_2}\ ;\ \overrightarrow{MI}) = \frac{\pi}{3}$;

car $r_{(I\ ;\ \frac{\pi}{3})}(M) = M_2$ (1) ; et

$(\overrightarrow{MI}\ ;\ \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{CI}\ ;\ \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}$ (2) cocyclicité de MAIC. Donc de (1) et (2)

$(\overrightarrow{MM_2}\ ;\ \overrightarrow{MI}) + (\overrightarrow{MI}\ ;\ \overrightarrow{MA}) = 0$

d'où $(\overrightarrow{MM_2}\ ;\ \overrightarrow{MA}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{M_1M_2}\ ;\ \overrightarrow{MA}) = 0$

$\Rightarrow A \in (MM_2)$

b) On a : $S_{(A;\frac{-\pi}{3};\frac{1}{2})} : M \mapsto M' \Rightarrow (\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{6}$ (1);

Or, $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CK}) = \frac{\pi}{6}$ (cocyclisité) (2)

De (1) et (2) on trouve :

$(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MK}) = 0[\pi] \Rightarrow$

$(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MK}) = 0[\pi] \Rightarrow K \in [MM']$.

c) $(\overrightarrow{M_1M_2}\ ;\ \overrightarrow{MM'}) = (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MK}) = (\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CK}) = \frac{\pi}{6}[\pi]$.

Sujet 2011 /Séries : C &TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

$P(Z) = Z^3 -(6 - 2i)Z^2 +(10-8i)Z - 4 + 8i$

1.a) $P(2) = 8 -(6 -2i)4 +(10 -8i)2 - 4 + 8i$

$= 8 -24 +20 - 4 + 8i - 16i + 8i = 0$

b) A l'aide du tableau suivant on détermine les coefficients demandés :

2	1	-6 + 2i	10 -8i	-4 +8i
		2	-8 + 4i	+4 -8i
	1	-4+2i	2 - 4i	0

D'où $a= - 4 + 2i$; $b = 2 -4i \Rightarrow$

$P(Z) = (Z- 2) (Z^2 +(- 4 + 2i)Z + (2 -4i)$.

$P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 2$ ou $Z^2 +(- 4 + 2i)Z + (2 -4i = 0$;

$\Delta = (- 4 + 2i)^2-4(2 -4i)= 16 -16i -4 -8 +16i = 4\Rightarrow$

$Z_2 = \dfrac{4-2i-2}{2} = 1-i$; $Z_3 = \dfrac{4-2i+2}{2} = 3-i$

D'où les solutions de l'équation sont :

$\{2 ; 1 -i ; 3 -i\}$.

2) On a : $|Z_A| =| 1 - i| = \sqrt{2}$; $Z_B = 2$.

$|Z_C| = | 3 - i| = \sqrt{10}$.

D'autre part : $BA = \sqrt{2}$; $BC = \sqrt{2}$; $AC = 2$.

En plus $BA^2 + BC^2 = AC^2$.

Donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

- On a : $OB = 2$; $AC = 2$ (1)
- $\overrightarrow{AC} /\!/ \overrightarrow{OB}$ (2)

De (1) et (2) On en déduit que OABC est un parallélogramme.

3) $S : M(Z) \mapsto M'(Z')$ / $Z' = \dfrac{1+i}{2}Z - i$

a) Comme cette expression est de la forme :

$Z' = aZ + b$ où $a \neq 0$; alors S est une similitude directe du plan.

b) Eléments caractéristiques de S :

- Rapport : $R_S = \left|\dfrac{1+i}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- Angle de S : $\arg a = \arg\dfrac{1+i}{2} = \dfrac{\pi}{4}$
- Centre de S : affixe ω / $\omega = \dfrac{-b}{1-a} = \dfrac{-i}{1-\dfrac{1+i}{2}}$

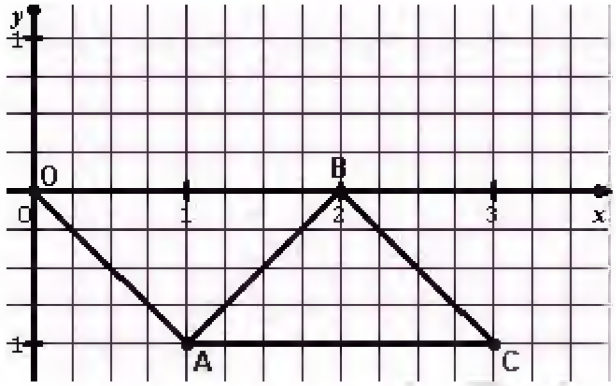
$= 1 - i = Z_A$

Donc le centre de S est le point A(1 ; -1).

c) D'après l'expression de S on a :

$\dfrac{1+i}{2}Z_C - i = \dfrac{1+i}{2}(3-i) - i = \dfrac{4+2i}{2} - \dfrac{2i}{2} = 2 = Z_B$

Donc S (C) = B.



Exercice 2

1) $g(x) = -x^3 -x^2 -2x +2$.

a) $D_g = \mathbb{R}$

g est continue et dérivable sur D_f .

- Limites aux bornes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

- Dérivée et sens de variation

$g'(x) = -3x^2 -2x -2$; On pose :

$\Delta = (-2)^2 -4(-3)(-2) = 4 -24 = -20 < 0$;

$\Delta < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

- Tableau de variations

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
g '(x)	-
g (x)	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

b) D'après le tableau de variation g est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

c) Comme g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donc l'équation g(x)= 0 admet une seule solution (α).

On a : $g(0,6) > 0$ et $g(0,7) < 0$ d'où

$0,6 < \alpha < 0,7$.

2) $f(x) = \dfrac{2xe^{-x}}{x^2+2}$

a) $f'(x) = \dfrac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$

b) Etude de f

- Limites aux bornes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x}\left(\dfrac{-2}{1+\dfrac{2}{x^2}}\right) = -\infty$;

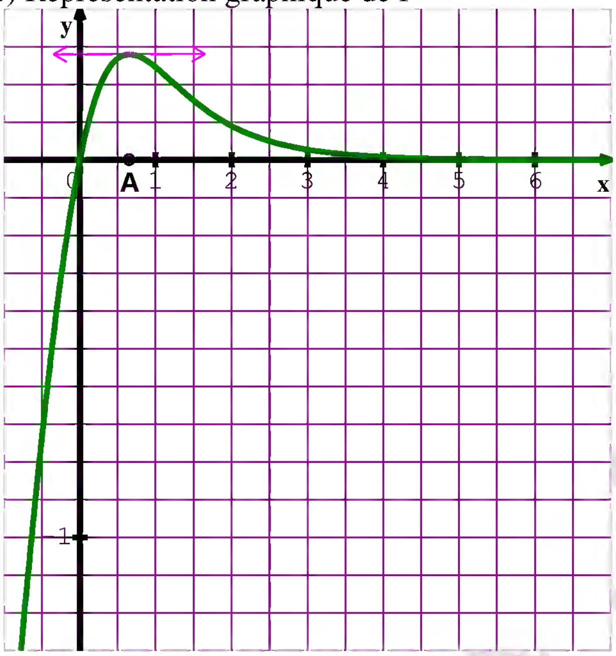
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{2xe^{-x}}{x^2+2} = 0\cdot$

• Dérivée et sens de variations
Dérivée déjà calculée elle a même signe que g.
• Tableau de variations

x	0		α		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	
f (x)	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+2}=+\infty$ d'où f admet une branche parabolique de direction (Oy') en $-\infty$.

c) Représentation graphique de f



3) $U_n=\int_n^{n+1}f(t)dt$; pour tout n / n ≥ 1.

a) On a : $n\leq t\leq n+1 \Rightarrow 0\leq \frac{t}{t^2+1}\leq 1\Rightarrow$

$0\leq \frac{te^{-t}}{t^2+1}\leq e^{-t} \Rightarrow 0\leq \int_n^{n+1}\frac{te^{-t}}{t^2+1}dt\leq \int_n^{n+1}e^{-t}dt \Rightarrow$

$0\leq U_n\leq \left[-e^{-t}\right]_n^{n+1} \Rightarrow 0\leq U_n\leq -e^{-(n+1)}+e^{-n}$

d'où $0\leq U_n\leq (1-\frac{1}{e})e^{-n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}U_n=0$; d'après le TH des gendarmes.

b) On a : $0\leq U_n\leq (1-\frac{1}{e})e^{-n}$.

Soit $0\leq U_n\leq 10^{-5}\Rightarrow (1-\frac{1}{e})e^{-n}\leq 10^{-5}\Rightarrow$

$e^{-n}\leq \frac{10^{-5}}{(1-\frac{1}{e})} \Rightarrow -n\leq \ln\frac{10^{-5}}{(1-\frac{1}{e})} \Rightarrow$

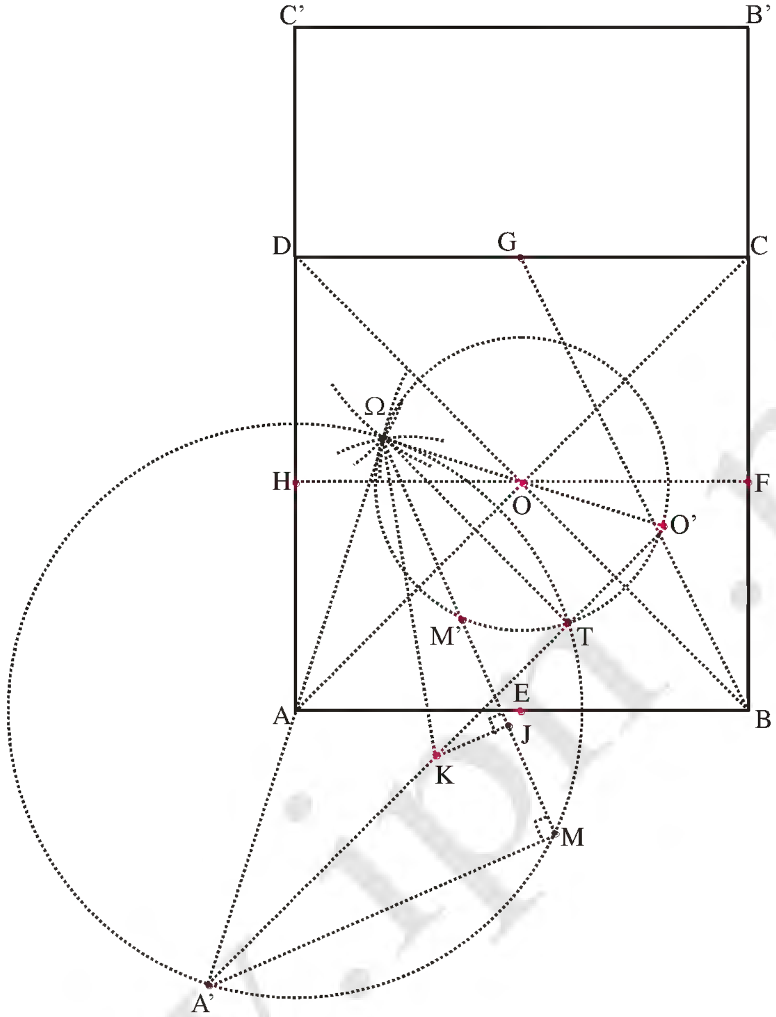
$n\geq -\ln\frac{1}{(1-\frac{1}{e})10^5} \Rightarrow n\geq \ln(1-\frac{1}{e})\times 10^5 \Rightarrow$

$n\geq \ln(1-\frac{1}{e})+\ln 10^5 \Rightarrow n\geq 12$

Donc $n_0=12\cdot$

Exercice 3

1) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions.



2.a) On a : $\begin{cases} DH = HO \\ (\overrightarrow{DH}\ ;\ \overrightarrow{HO}) = \frac{\pi}{2}(\neq 0(2\pi) \end{cases} \Rightarrow$

Il existe une unique rotation r telle que : r(D) = H et r(H) = O'

b) Comme le triangle DHO est rectangle en H d'où le cercle circonscrit à ce triangle a pour centre Ω milieu de [DO].

Ce point Ω est le centre de la rotation r.

L'angle de r est : $(\overrightarrow{DH}\ ;\ \overrightarrow{HO}) = \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$.

c) On a : A = bar{(H ; 2) ; (D ; -1)}⇒
r(A) = bar{(r(H) ; 2) ; (r(D) ; -1)}⇒
r(A) = bar{(O ; 2) ; (H ; -1)}= F

Donc l'image du carré direct DABC par r est le carré HFC'B'.

3) S = r o h ; où h a pour rapport $\frac{1}{2}$ et de centre D.

a) Par définition S est une similitude directe.

Rapport de S : $R_S = \frac{1}{2}$

Angle de S est celui de r : $\alpha_S = \frac{\pi}{2}$

Donc $S = S_{(\Omega\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2})}$ \ Ω le centre de S à déterminer.

b) On a :$(A\ ;\ B\ ;\ C\ ;\ D) \xmapsto{r \circ h} (O\ ;\ G\ ;\ D\ ;\ H)\cdot$

4.a) $\begin{cases} S(\Omega) = \Omega \\ S(A) = O \end{cases} \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A}\ ;\ \overrightarrow{\Omega O}\ ) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \Rightarrow$

$\Omega \in \mathscr{C}_{[AO]}$.

De même : $\Omega \in \mathscr{C}_{[BG]}\ ;\Omega \in \mathscr{C}_{[CD]}\ ;\ \Omega \in \mathscr{C}_{[DH]}$.

b) $S(\ \Gamma_{(A\ ;\ O\Omega}\ ) = \mathscr{C}_{[S(A)\ ;\ S(A)\ S(\Omega)]} = \mathscr{C}_{[O\ ;\ O\ \Omega]} = \Gamma'$.

On a : (AO) est une médiatrice de [ΩT].

D'autre part la symétrie axiale autour de (AO) nous permet d'écrire :

$\begin{cases} S_{(AO)}(\Omega) = T \\ S_{(AO)}(A) = A \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A}\ ;\ \overrightarrow{\Omega O}) = \frac{\pi}{2} = (\overrightarrow{TA}\ ;\ \overrightarrow{TO})\cdot \\ S_{(AO)}(O) = O \end{cases}$

D'où les points Ω ; A ; O et T sont cocycliques.

c) Ona : $2(\overrightarrow{TM}\ ;\ \overrightarrow{TM'}) = 2(\overrightarrow{TM}\ ;\ \overrightarrow{T\Omega}) + 2(\overrightarrow{T\Omega}\ ;\ \overrightarrow{TM'})\ \ (2\pi)$

$2(\overrightarrow{TM}\ ;\ \overrightarrow{TM'}) = (\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{A\Omega}) + (\overrightarrow{O\Omega}\ ;\ \overrightarrow{OM'})\ (2\pi)$

Or $\begin{cases} S(\Omega) = \Omega \\ S(M) = M' \Rightarrow (\overrightarrow{O\Omega}\ ;\ \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{A\Omega}\ ;\ \overrightarrow{AM})\ (2\pi) \\ S(A) = O \end{cases}$

Donc $2(\overrightarrow{TM}\ ;\ \overrightarrow{TM'}) = 0(2\pi)$, d'où l'alignement des points T ; M et M'.

d) Comme : A'= bar{(A ; 2) ; (Ω ; -1)}⇒
S(A') = bar{(S(A) ; 2) ; (S(Ω) ; -1)}⇒
S(A') = bar {(O ; 2) ; (Ω ; -1)}= O'.

D'où les triangles ΩA'M et ΩO'M' sont semblables.

Donc il existe une similitude S_M de centre Ω telle que : S_M(A') = M ; S_M(O') = M' ce qui nous permet d'écrire : S_M([A'*O']) = [M*M'] = J

Soit S' la similitude de centre Ω qui transforme A' en K.

On a : S'(M) = S'(S_M(A'))
= S_M (S'(A')) = S_M (K)= J.

$\begin{cases} S'(\Omega) = \Omega \\ S'(A') = K \\ S'(M) = J \end{cases}$; Comme ΩA'M est rectangle en A'

alors ; ΩKJ est rectangle en K.

Lorsque M décrit Γ privée de Ω et T ; J décrit le cercle de diamètre ΩJ privée de T et Ω.

Exercice 4

1) f(x) = xln(x+1)

a) Calcul de limites

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -1$ est une (A.V)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\ ;\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\ \ \Rightarrow$ (C)

admet une branche parabolique de direction (Oy).

b) f'(x) = ln(x+1) + $\frac{x}{1+x}$

- Si x∈]-1 ; 0] ⇒ f'(x) ≤ 0 ⇒ f est décroissante sur cet intervalle.
- Si x∈[0 ; +∞[⇒ f'(x) ≥ 0 ⇒ f est croissante sur cet intervalle.

2) Tableau de variations

x	-1		0		+∞
f '(x)		-	0	+	
f (x)	+∞	↘	0	↗	+∞

a) On pose $\frac{x^2}{1+x} = ax + b + \frac{c}{1+x} \Leftrightarrow$

$\frac{x^2}{1+x} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{1+x} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{1+x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

b) $A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\ln(x+1)dx$; On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x+1}dx$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1+\frac{1}{x+1})dx$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{\ln(x+1)}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4}\text{ua.}$$

3.a) $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$;

Comme $x^n\ln(x+1)$ est continue sur $[0 ; 1]$ d'où l'existence de cette intégrale ce qui prouve la définition de la suite (U_n).

b) $U_1 = \int_0^1 x\ln(x+1)dx = \frac{1}{4}$ c'est l'aire A déjà calculée en b).

- $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)(x-1)dx$; Comme $x^n\ln(x+1) \geq 0$ pour tout x de $[0 ; 1]$; $(x-1) \leq 0$ dans le même intervalle d'où $U_{n+1} - U_n \leq 0$ donc (U_n) est décroissante.
- D'autre part (U_n) est minorée par 0 car elle est positive donc elle est convergente.

d) $\forall n \geq 1;\ 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Rightarrow$

$$0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2 \quad \Rightarrow$$

$$0 \leq x^n \ln(x+1) \leq x^n \ln 2 \Rightarrow$$

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2 \Rightarrow$$

$$0 \leq U_n \leq \ln 2\left[\frac{x^n+1}{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0\cdot$$

4) $V_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$; $n \geq 1$

a) On a : $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$; On pose

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$U_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx \Rightarrow$$

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}V_n\cdot$$

b) $\forall n \geq 1;\ 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{2} \leq \frac{x^{n+1}}{x+1} \leq x^{n+1} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx \leq \int_0^1 x^{n+1}dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2(n+2)} \leq V_n \leq \frac{1}{(n+2)} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n = 0\cdot$$

c) On a : $V_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$; $n \geq 1$. Nous savons que:

$$\sum_{i=0}^{n} (-x)^i = 1 - x + (-x)^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + (-1)^n(x)^n \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}(-x)^i = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1-(-1)^{n+1}(x)^{n+1}}{1+x} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-x)^i - \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^n(x)^{n+1}}{1+x} \Leftrightarrow (-1)^n \times \left[1 - x + (-x)^2 + \cdots\cdots + (-x)^n - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{(x)^{n+1}}{1+x} \Rightarrow$$

$$V_n = (-1)^n\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} - \ln(1+x)\right]_0^1 \Rightarrow$$

$$V_n = (-1)^n\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln(2)\right].$$

d) On a $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln(2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)\cdot$

Sujet 2010 /Séries : C & TMGM / Session normale

Exercice 1

$f(x) = e^x - x - 1$

1.a) Etude de f

- $D_f = \mathbb{R}$;
- Limites aux bornes de D_f

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Dérivée de f et sens de variations

  $f'(x) = e^x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$; $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.
- Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f ' (x)	+	0	+
f (x)	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

b) D'après le tableau de variations de f on a pour tout x : $f(x) \geq 0$ d'où $e^x \geq x + 1$.

2.a) $\forall x > -1$: $x + 1 \leq e^x \Rightarrow \ln(x + 1) \leq x$

b) $x < 1 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow \ln(1 - x) \leq -x$

3) $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$; on pose $x = \frac{1}{k}$ d'où

$\frac{1}{k} \geq \ln(1 + \frac{1}{k}) \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \ln(\frac{k+1}{k}) \Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{k=n} \ln(\frac{k+1}{k}) \Rightarrow S_n \geq \ln(1 + n)$

b) $\lim_{n\to+\infty} \ln(n + 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

4.a) $U_n = S_n - \ln(n)$

$U_n - U_{n-1} = S_n - \ln(n) - S_{n-1} + \ln(n-1)$

$$= \frac{1}{n} + \ln(\frac{n-1}{n}) = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$$

D'aprés 3) on a : $\ln(1 - \frac{1}{n}) \leq -\frac{1}{n} \Rightarrow \ln(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} \leq 0$

D'où : $U_n - U_{n-1} \leq 0$ c'est a - dire que (U_n) est décroissarte.

b) On a : $S_n > \ln(n+1) > \ln(n)$

Soit $S_n - \ln(n+1) > 0$ c'est-àdire $U_n > 0$.

On a donc (U_n) minorée et décroissante d'où sa convergence vers un réel γ.

Comme $U_n < U_2 < U_1 \Rightarrow U_n < 1$ et $U_n > 0$; d'où $0 < U_n < 1$ ce qui prouve que : $0 < \gamma < 1$.

Exercice 2

1.a) $P(i) = i^3 - (6\cos\theta + i)i^2 + (4 + 5\cos^2\theta + 6i\cos\theta)I - (4 + 5\cos^2\theta)i$

$= -i + 6\cos\theta + i + 4i + 5\cos^2\theta\, i - 6\cos\theta - 4i - 5\cos^2\theta i = 0$

A l'aide du tableau suivant on peut déterminer les coefficients réels a et b tels que :

$P(Z) = (Z - i)(Z^2 + aZ + b)$.

i	1	$-6\cos\theta$ -i	$4+5\cos^2\theta+6i\cos\theta$	$-4i-5\cos^2\theta i$
		i	$(-6\cos\theta)i$	$4i+5\cos^2\theta i$
	1	$-6\cos\theta$	$4+5\cos^2\theta$	0

D'o ù $P(Z) = (Z - i)(Z^2 - (6\cos\theta)Z + (4 + 5\cos^2\theta))$

b) $P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z^2 - (6\cos\theta)Z + (4 + 5\cos^2\theta) = 0$;

$\Delta = (-(6\cos\theta)^2 - 4(4 + 5\cos^2\theta)$

$= 36\cos\theta^2 - 16 - 20\cos\theta^2 = 16\cos\theta^2 - 16$

$= 16(\cos\theta^2 - 1) = -16\sin^2\theta = (i4\sin\theta)^2$

$Z_1 = \frac{6\cos\theta + i4\sin\theta}{2} = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$;

$Z_2 = \frac{6\cos\theta - i4\sin\theta}{2} = 3\cos\theta - 2i\sin\theta$;

2.a) $M_0(i)$; $M_1(Z_1)$ $M_2(Z_2)$;

$Z_G = \frac{i + Z_1 + Z_2}{3} = \frac{i + 6\cos\theta}{3} = 2\cos\theta + \frac{i}{3}$

b) $Z_G(2\cos\theta\ ; \frac{1}{3})$. Soit $Z(x ; y)$; sachantque :

$-2 \leq x \leq 2$; $y = \frac{1}{3}$, G décrit donc le segment $[CD]$ de la droite d'équation $y = \frac{1}{3}$; avec $C(-2\ ;\ 1/3)$ et $D(2\ ;\ 1/3)$.

3.a) On a : $M_1(3\cos\theta\ ; 2\sin\theta)$; Soit $M_1(x\ ;\ y)$;

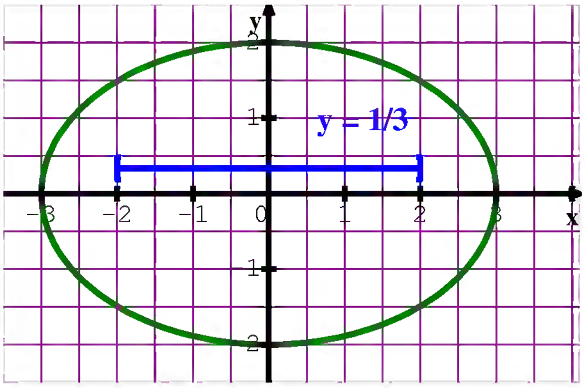
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \cos\theta \\ \frac{y}{2} = \sin\theta \end{cases} \text{ d'où } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 ;$$

c'est l'équation d'une ellipse.

b) Les éléments caractéristiques de Γ' :

- Centre : O (0 ; 0)
- Sommets : A(3 ; 0) ; A(-3 ; 0) ; B(0 ; 2) ;B'(0 ; -2)
- Excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ car $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$;

c) Construction de Γ et Γ'



Exercice 3

1.a) Etude de u

- $D_u =]0\,;+\infty[$
- Limites aux bornes de D_u

  $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty$
- Dérivée de u et sens de variation

  $u'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow u'(x) = > 0$; $\forall x \in D_u$.
- Tableau de variations

x	0	+∞
u' (x)	+	
u (x)	-∞ ↗	+∞

b) f est continue et strictement croissante de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection du 1er intervalle sur le deuxième.

c) D'après le T.V il existe un réel unique α solution de l'équation u(x) = 0. D'autre part on a u(1) =-1 ; u(1) < 0 ; u(2)= ln2 ; u(2) > 0 d'où $1\le\alpha\le 2$.

d) On en déduit le signe de u(x) comme suit :

x	0		α		+∞
u (x)		-	0	+	

2) $\begin{cases} f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2\ln x & ;x>0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2\ln x) = 0 = f(0)$

d'où f est continue à droite de 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-\frac{3}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x) = 1 \Rightarrow$

$f'_d(0) = 1 \Rightarrow$ f est dérivable à droite de 0.

Donc C_f admet une demi-tangente de coefficient directeur égale à 1 à droite de 0.

c) Pour tout x > 0 ; $f'(x) = -2x + 1 - x\ln x$

$= x(-2 + \frac{1}{x} - \ln x)$

- Signe de f'(x)

$\frac{1}{x} < \alpha \Rightarrow x > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow f'(x) < 0$;

$\frac{1}{x} > \alpha \Rightarrow x < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow f'(x) > 0$;

- Direction asymptotique

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x))}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}(-\frac{3}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x) = -\infty$

Le graphique de f admet une branche parabolique de direction (Oy') en +∞.

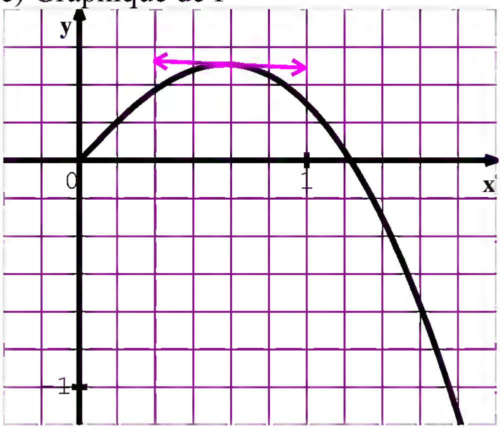
d) Tableau de variations de f

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		β	+∞
f' (x)		+	0	-		
f (x)	0	↗	$f(\frac{1}{\alpha})$	↘	0	-∞

f est continue et strictement décroissante de $]\frac{1}{\alpha}; +\infty[$ sur $]-\infty; f(\frac{1}{\alpha})[$ donc elle réalise une bijection entre ces deux intervalles et par conséquent l'équation f(x) = 0 admet une unique solution β tel que $\beta > \frac{1}{\alpha}$. D'autre part on a :

$f(1) = \frac{1}{4} > 0; f(2) = -1 - 2\ln 2 < 0$;Donc $1 \le \beta \le 2$.

e) Graphique de f



3.a) $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\beta} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\beta}(-\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2\ln x)$

$= -\frac{1}{4}\left[x^3\right]_{\frac{1}{n}}^{\beta} + \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{\frac{1}{n}}^{\beta} - \frac{1}{2}J_n$

$= -\frac{1}{4}\left[\beta^3 - \frac{1}{n^3}\right] + \frac{1}{4}\left[\beta^2 - \frac{1}{n^2}\right] - \frac{1}{2}J$

Sachant que : $J_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\beta} (x^2 \ln x)dx$

$$= \frac{1}{3}\left[x^3 \ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{\beta} - \frac{1}{9}\left[x^3\right]_{\frac{1}{n}}^{\beta}$$

$$J_n = \frac{1}{3}\left[\beta^3 \ln\beta - \frac{1}{n^3}\ln\frac{1}{n}\right] - \frac{1}{9}\left[\beta^3 - \frac{1}{n^3}\right] \Rightarrow$$

$$J_n = \beta^3\left(\frac{1}{3}\ln\beta - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{1}{n} + \frac{1}{9}\right) \Rightarrow$$

$$I_n = -\frac{1}{4}\left(\beta^3 - \frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta^2 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{6}\left(\beta^3\ln\beta - \frac{1}{n^3}\ln\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{18}\left(\beta^3 - \frac{1}{n^3}\right)$$

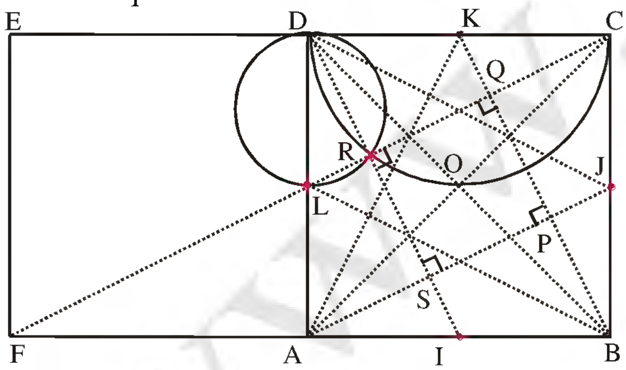
$$I_n = \beta^3\left(-\frac{1}{6}\ln\beta + \frac{1}{18}\right) + \frac{1}{n^3}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\ln\frac{1}{n} - \frac{1}{18}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta^2 - \frac{1}{n^2}\right).$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \beta^3\left(-\frac{1}{6}\ln\beta + \frac{1}{18}\right) + \frac{1}{2}\beta^2$.

Lorsque $n \to +\infty$ $\frac{1}{n} \to 0$ d'où $I_n \to \int_0^{\beta} f(x)dx$ c'est à-dire l'aire limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = 0 et x= β.

Exercice 4

1.a) Fgure illustrant les données et répondant à certaines questions :



2.a) $\begin{cases} DC = EF = a \\ \overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{FE} \end{cases} \Rightarrow \exists r! : \begin{cases} D \to F \\ C \to E \end{cases}$

Donc, $f = S_1$ car $S_1 : \begin{cases} D \to L \\ C \to D \end{cases}$

- L'angle de r est α_r tel que : $(\overrightarrow{DC} \; ; \; \overrightarrow{FE}) = (\overrightarrow{FA} \; ; \; \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi}{2}$
- Centre de r = med[DF] $\cap$ med[CE] ;

Soit $\{A\} = (AE) \cap (AD)$; d'où $r = r_{(A;\frac{\pi}{2})}$

b) $r = S_{AD} \circ S_{AC} = S_{\Delta_1} \circ S_{AC}$; $\Delta_1 = (AD)$;

$r = S_{AB} \circ S_{AE} = S_{AB} \circ S_{\Delta_2}$; $\Delta_2 = (AE)$.

c) $\sigma = S_{AB} \circ S_{AD} \circ S_{AC} = S_{AB} \circ r$

$= S_{AB} \circ S_{AB} \circ S_{AE} = S_{AE}$.

σ est une réflexion d'axe (AE).

3.a) Comme D ≠ C et L ≠ D ; ∃ !S tel que :

$S_1 \begin{cases} D \to L \\ C \to D \end{cases}$ d'angle $\alpha_{S1} = (\overrightarrow{DC} \; ; \; \overrightarrow{LD})$ où

$(\overrightarrow{DC} \; ; \; \overrightarrow{LD}) = (\overrightarrow{DC} \; ; \; \overrightarrow{DL}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$

Donc : $\alpha_{S1} = \frac{\pi}{2}$.

Rapport de S_1 : $R_{S1} = \frac{LD}{DC} = \frac{1}{2}$.

b) S_1: $\begin{cases} D \to L \\ C \to D \\ R \to R \end{cases} \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{RD} \; ; \; \overrightarrow{RL}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R \in \mathscr{C}_{[DL]}$ et

$(\overrightarrow{RC} \; ; \; \overrightarrow{RD}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R \in \mathscr{C}_{[CD]}$

Alors, R est l'intersection autre que D de $\mathscr{C}_{[DL]}$ et $\mathscr{C}_{[CD]}$.D'autre part

$(\overrightarrow{RC} \; ; \; \overrightarrow{RD}) + (\overrightarrow{RD} \; ; \; \overrightarrow{RL}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow R \in (CL)$

Puisque $S_1(R)$= R et $S_1(CL)$ = (ID) on a R∈(DI).

d'où $\{A\}$ = (CL)∩(DI) ; Sachant que (CL)est perpendiculaire à (DI).

$r(O;\frac{\pi}{2}) : \begin{cases} C \to D \\ L \to I \end{cases}$

c) $h = h_{(C;\frac{1}{2})}$; $f = h \circ r$

f est une similitude directe, elle vérifie :

f(D)=h(r(D) = h(F)= L

f(C)=h(r(C) = h(E)= D

Donc, $f = S_1$ car: $\begin{cases} D \to L \\ C \to D \end{cases}$

d) $S_1 = h_1 \circ r_1 = r_1 \circ h_1$; avec $h_1 = h(R \; ; \; \frac{1}{2})$

et $r_1 = r(R \; ; \; \frac{1}{2})$

4.a) $S_2 : \begin{cases} F \to B \\ B \to C \end{cases}$; l'angle de S_2 est $(\overrightarrow{FB} ; \overrightarrow{BC})$

$= (\overrightarrow{BF} ; \overrightarrow{BC}) + \pi = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$

Le rapport de S_2 : R_{S_2} est égal à $\frac{BC}{FB} = \frac{1}{2}$;

donc $S_2 = S(\frac{\pi}{2} ; \frac{1}{2})$

b) Maintenant on a : $S_2 : S = S(Q : \frac{\pi}{2} ; \frac{1}{2}) \Rightarrow$

$\begin{cases} (\overrightarrow{QF};\overrightarrow{QB}) = \frac{\pi}{2} \\ (\overrightarrow{QB};\overrightarrow{QC}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow (\overrightarrow{QF};\overrightarrow{QB}) + (\overrightarrow{QB};\overrightarrow{QC}) = \pi \Rightarrow$

$Q \in (CL)$.

D'autre part : $S_2(FC) = S_2(CL) = (BK) \Rightarrow$

$\Rightarrow Q \in (CL) \cap (BK)$.

5.a) Soit H le barycentre du système donné :

$H = \text{bar}\ \{(A ; -1) ; (B ; 2) ; (C ; 1) ; (D ; 3)\}$

$= \text{bar}\ \{(B ; -1) ; (C ; 1) ; (D ; -1) ; (B ; 2) ; (C ; 1) ; (D ; 3)\}$

$= \text{bar}\ (B ; 1) ; (C ; 2) ; (D ; 2)\} = \text{bar}\ (K ; 4) ; (B ; 1)\ \}$

D'où $H \in (KB)$. D'autre part on a :

$H = \text{bar}\ \{(A ; -1) ; (B ; 2) ; (C ; 1) ; (D ; 3)\}$

$= \text{bar}\ \{(A ; 2) ; (C ; 2) ; (D ; -2) ; (A ; -1) ; (C ; 1) ; (D ; 3)\}$

$= \text{bar}\ (A ; 1) ; (D ; 1) ; (C ; 3)\} = \text{bar}\ (L ; 2) ; (C ; 3)\}$

D'où $H \in (LC)$. Donc le point H coincide avec le point Q intersection de (KB) et (LC).

b) Etant donné que :

- P intersection de (AJ) et (BK)
- R intersection de (DI) et (CL)
- S intersection de (AJ) et (DI)

Par analogie avec la question a) on peut écrire :

- P barycentre du système
  $\{(D ; -1) ; (A ; 2) ; (B ; 1) ; C(3 ; 3)\}$
- R barycentre du système
  $\{(B ; -1) ; (C ; 2) ; (D ; 1) ; (A ; 3)\}$
- S barycentre du système
  $\{(C ; -1) ; (D ; 2) ; (A ; 1) ; (B ; 3)\}$

c) PQRS étant un rectangle il suffit de calculer deux côtés consécutifs.

On a : D'après le barycentre et le Théorème du milieu on peut écrire :

$\overrightarrow{KQ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{KB}$; $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BK}$; $\Rightarrow$

$QP = 2KQ = \frac{2}{5}KB$; Or $KB = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;

D'où : $RS = SP = PQ = QR = \frac{2}{5} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

Donc PQRS est un carré.

- $S_{PQRS} = (\frac{a\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{5a^2}{25} = \frac{1}{5}a^2 = \frac{1}{5}S_{ABCD}$.

6.a) S_O la famille des similitudes définies par :

$S_O : \begin{cases} A \to P \\ B \to Q \\ C \to R \\ D \to S \end{cases}$ Le rapport de cette famille est :

$\frac{\text{Côté PQRS}}{\text{Côté ABCD}} = \frac{a}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $g : \begin{cases} A \to S \\ B \to P \end{cases}$; avec $\theta = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{SP}) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AJ})$

$\sin\theta = \frac{BJ}{AJ} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\theta = \frac{AB}{AJ} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

c) Soit σ l'une des similitudes S_O transformant ABCD en PQRS.

Soit $\sigma(A) = P$:

On peut rencontrer l'un des cas suivants :

- $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OS}) + \frac{\pi}{2} = \theta + \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$
- $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OQ}) = (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OS}) + \pi = \theta + \pi\ (2\pi)$
- $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OS}) + \frac{3\pi}{2} = \theta + \frac{3\pi}{2}\ (2\pi)$

En plus du cas initial évidement

- $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OS}) = \theta\ (2\pi)$.

Sujet 2010 /Séries : C & TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

1.a) La fonction $x \mapsto x^n e^x$ est continue donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors, $\forall\ t \in \mathbb{R}$

$G_n(t) = \int_0^t x^n e^x dx$ existe.

$G_0(t) = \int_0^t e^x dx = \left[e^x\right]_0^t = e^t - 1$;

$G_1(t) = \int_0^t xe^x dx$; On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow$$

$G_1(t) = \left[xe^x\right]_0^t - \int_0^t e^x dx = te^t - e^t + 1$

b) si $t \geq 0$; $0 \leq x \leq t \Rightarrow e^0 \leq e^x \leq e^t \Rightarrow x \leq xe^x \leq xe^t$

d'où $\int_0^t x dx \leq \int_0^t xe^x dx \leq \int_0^t xe^t dx$; donc

$$\frac{t^2}{2} \leq G_1(t) \leq \frac{t^2}{2} e^t$$

c) si $t \leq 0$; On a $G_1(t) = \int_0^t xe^t dx = -\int_t^0 xe^t dx$

Comme : $t \leq x \leq 0 \Rightarrow e^t \leq e^x \leq 1 \Rightarrow x\,e^t \geq xe^x \geq x$

$\Rightarrow \int_t^0 xe^t dx \geq -\int_t^0 xe^x dx \geq \int_t^0 x dx$ d'où

$$-\frac{t^2}{2} e^t \leq -G_1(t) \leq -\frac{t^2}{2}$$

c) si $t \geq 0$; $\frac{1}{2} \frac{t}{(e^t - 1)} \leq \frac{te^t - e^t - 1}{t(e^t - 1)} \leq \frac{1}{2} \frac{te^t}{(e^t - 1)}$

Or, $\lim_{t \to 0^+} \frac{t}{(e^t - 1)} = 1$; d'où $\lim_{t \to 0^+} \frac{te^t - e^t - 1}{t(e^t - 1)} = \frac{1}{2}$.

- si $t \leq 0$; on a $(e^t - 1) < 0$ et par conséquent

$$\frac{1}{2} \frac{te^t}{(e^t - 1)} \leq \frac{te^t - e^t - 1}{t(e^t - 1)} \leq \frac{1}{2} \frac{t}{(e^t - 1)} \text{ d'où}$$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{te^t - e^t - 1}{t(e^t - 1)} = \frac{1}{2} .$$

2) $I_n = G_n(1) = \int_0^1 x^n e^x dx$; On pose :

$$\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = e^x \\ v(x) = nx^{n-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$G_n(t) = \left[e^x x^n\right]_0^t - n\int_0^t x^{n-1} e^x dx$ d'où

$G_n(t) = t^n e^t - nG_{n-1}(t)$.

D'après le résultat précédent on a :

$G_n(1) = e - nI_{n-1}$

b) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq x^{n-1} \Rightarrow 0 \leq x^n e^n \leq x^{n-1} e^n$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^x dx \leq \int_0^1 x^{n-1} e^x dx \Rightarrow$

$0 \leq I_n \leq I_{n-1}$

Donc (I_n) est décroissante minorée par 0 d'où sa convergence.

c) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e \Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq e\, x^n \Rightarrow$

$$\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \leq \lim_{n \to \infty} I_n \leq \lim_{n \to \infty} \frac{e}{n+1} \text{ d'où}$$

$0 \leq \lim_{n \to \infty} I_n \leq 0$ donc $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$

selon le théorème des gendarmes.

Exercice 2

1.a) Calcul de $P(1 + i)$:

$P(1 + i) = (1+ i)^3 - (4 + 6i)(1+ i)^2 + (-6+16i)(1+ i) + 12 - 4i$

$= 2i - 2 - (4 + 6i)2i + (-6 + 16i)(1+i) + 12 - 4i$

$= 2i - 2 - 6i + 12 - 6 - 6i + 16i - 16 + 12 - 4i$

$= -12i + 16i - 4i + 10 - 22 + 12 = 0.$

Le tableau suivant donne a et b:

	1	-4 - 6i	-6 + 16i	12- 4i
1+i	⊠	1+i	-3-5i-3i+5	-4 +8i-4i-8
	1	-3-5i	-4 + 8i	0

Alors : $P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - (3+5i)Z - 4 + 8i)$.

$P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z_0 = 1 + i \Rightarrow$ ou $Z^2 - (3+5i)Z - 4 + 8i = 0$.

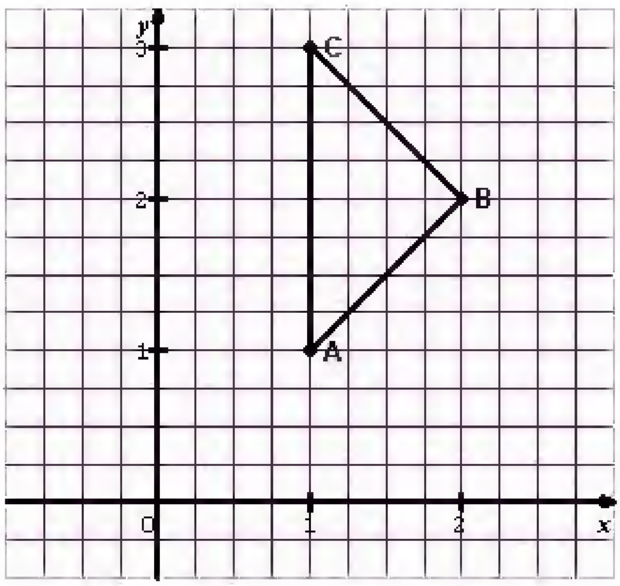
D'où : $\Delta = (3+5i)^2 - 4(-4 + 8i) = 9 - 30i - 25 + 16 - 32i$;

$\Delta = -2i = (1-i)^2$.

Donc : $Z_1 = \frac{3 + 5i + 1 - i}{2} = 2 + 2i$;

$Z_2 = \frac{3 + 5i - 1 + i}{2} = 1 + 3i$

2.a) Figure donnant l'emplacement des points et nature du triangle.



ABC est rectangle et isocèle en B car :
$BC^2 + BA^2 = AC^2$; $BC = BA = \sqrt{2}$; $AC = 2$.

b) On a : A; B et C sont differents deux à deux ; puis $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = -\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où l'existence d'une unique similitude S telle que : $S = S_{(A;-\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2})}$.

c) Comme $S = S_{(A;-\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2})}$ On a :

$$Z' - Z_A = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (Z - Z_A) \Rightarrow$$

$$Z' = 1 + i + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(Z - 1 - i) \Rightarrow$$

$Z' = \dfrac{1-i}{2} Z + i$ et c'est la forme complexe de S.

3.a) $f : M \mapsto M / Z' = \dfrac{1-i}{2} Z + i$; Alors

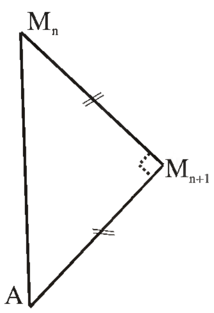
$f = S_{(A;-\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2})}$.

b) On a : $f : M_n \mapsto M_{n+1}$ d'où $(A; M_n; M_{n+1})$ est rectangle isocèle en M_{n+1} car

$(\overrightarrow{AM_n}\ ;\ \overrightarrow{AM_{n+1}}) = -\dfrac{\pi}{4}$

et $\dfrac{AM_{n+1}}{AM_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(Voir figure ci-contre).



c) On ona: $\dfrac{M_1M_2}{M_0M_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;onpose :

$M_0M_1 = U_0$; $M_1M_2 = U_1$;.......; $M_nM_{n+1} = U_n$.

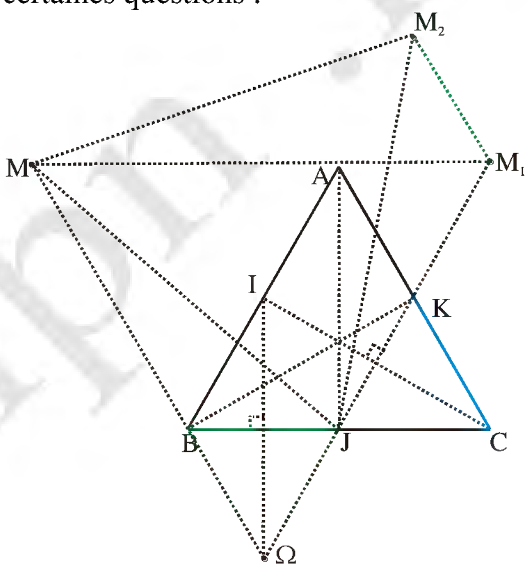
Alors : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n = U_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \Rightarrow$

$$S_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right). \text{ D'où } \lim_{t\to 0^-} S_n = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

et c'est la limite de la ligne brisée demandée.

Exercice 3

1) Figure illustarnt les données et repondant à certaines questions :



2.a) Comme : $CJ = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}BA = BI$

et $(\overrightarrow{IB}\ ;\ \overrightarrow{CJ}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{\pi}{3}$

Alors il existe une unique rotation r_1 telle que :

$r_1 : \begin{array}{l} I \mapsto C \\ B \mapsto J \end{array}$

b) cette rotation a pour angle $-\dfrac{\pi}{3}$ et de centre Ω qui est le point de concours des médiatrices de [IC] et [BJ].

3.a) On a : $r_2 = t \circ r_1$ c'est une rotation par définition d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ et de centre à déterminer.

- $r_2(I) = t \circ r_1(I) = t(C) = K$
- $r_2(B) = t \circ r_1(B) = t(J) = I$

Or, la rotation $r_{(J\,;\,-\frac{\pi}{3})}$ est celle qui transforme I en K et B en I ; alors $r_2 = r_{(J\,;\,-\frac{\pi}{3})}$.

b) $S_\Delta \circ r_2 = S_{(AJ)} \Leftrightarrow r_2 = S_\Delta \circ S_{(AJ)} \Leftrightarrow J = \Delta \cap (AJ)$ et $(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \Delta) = -\dfrac{\pi}{6}$; alors $\Delta = (JK)$ d'où $r_2 = S_{(JK)} \circ S_{(AJ)}$.

4.a) On a : $S_1 : \begin{matrix} A \mapsto A \\ B \mapsto K \end{matrix} \Rightarrow \theta_{S_1} = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AK}) = \dfrac{\pi}{3}$ et

$$k_{S_1} = \frac{AK}{AB} = \frac{1}{2}$$

De même

$S_2 : \begin{matrix} C \mapsto C \\ K \mapsto B \end{matrix} \Rightarrow \theta_{S_2} = (\overrightarrow{CK}\ ;\ \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{3}$ et

$$k_{S_2} = \frac{CB}{CK} = 2.$$

b) On a : $f = S_2 \circ S_1 = S_{(?\,;\,\frac{2\pi}{3}\,;\,1)}$; d'où f est une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et comme f(B) = B alors $f = r_{(B\,;\,\frac{2\pi}{3})}$.

5.a) On peut écrire : $(\overrightarrow{M\Omega}\,;\,\overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{M\Omega}\,;\,\overrightarrow{MM_1}) + (\overrightarrow{MM_1}\,;\,\overrightarrow{MM_2}) + (\overrightarrow{MM_2}\,;\,\overrightarrow{MJ})$

Or, $r_1(M) = M_1 \Rightarrow (\overrightarrow{M\Omega}\,;\,\overrightarrow{MM_1}) = \dfrac{\pi}{3}$ et

$r_2(M) = M_2 \Rightarrow (\overrightarrow{MM_2}\,;\,\overrightarrow{MJ}) = -\dfrac{\pi}{3}$; alors

$(\overrightarrow{M\Omega}\,;\,\overrightarrow{MJ}) = (\overrightarrow{MM_1}\,;\,\overrightarrow{MM_2})\,(2\pi)$.

b) M; M_1 et M_2 sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega}\,;\,\overrightarrow{MJ}) = 0(\pi)$;

$(\overrightarrow{M\Omega}\,;\,\overrightarrow{MJ}) = 0(\pi) \Leftrightarrow M \in (\Omega J)\backslash\{\Omega\,;\,J\}$.

c) On a : $r_2 = t \circ r_1 \Leftrightarrow t = r_2 \circ r_1^{-1}$ d'où

$r_2 \circ r_1^{-1}(M_1) = r_2(M) = M_2 \Leftrightarrow t(M_1) = M_2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{CK} \Leftrightarrow M_1M_2 = CK$ donc la distance M_1M_2 est constante et la droite (M_1M_2) a un sens fixe qui est celui de (CK).

Exercice 4

I. 1) $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$; $x > -1$

Comme $2x^2 + 3x + 2 > 0$ (car $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$). et $x + 1 > 0$; alors $g(x) > 0$.

2) A l'ide du tableau suivant on trouve les coefficients cherchés :

	2	3	2
-1		-2	-1
	2	1	1

Donc $g(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$

3) $G(x) = x^2 + x + \ln(x+1) + 1$.

II. 1.a) On a : $f(x) = x^2 + x + 1 + \ln(x+1) = G(x)$.

Calcul de limites :

- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1 - 1 + 1 + (-\infty) = -\infty$;

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

  $= \infty + 1 + 0 + 0 = +\infty \cdot$

Alors C_f admet une (A.V) d'équation x= -1 et une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

b) $f'(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{x+1} = g(x) > 0$ d'où le tableau de variations suivant :

x	-1	$+\infty$
f '(x)	+	
f (x)	$-\infty$	$+\infty$

2.a) f est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de I = $]-1;+\infty[$ vers J = $]-\infty\,;+\infty[$.

b) Comme $0 \in$ J,alors il existe d'une manière unique $\alpha > -1$ tel que : $f(\alpha) = 0$; Or $f(-0{,}52) < 0$ et $f(-0{,}51) > 0$ d'où $-0{,}52 < \alpha < -0{,}51$.

3.a) $\forall x \geq 0$; $x + 1 \geq 1 \Rightarrow \ln(x+1) \geq 0 \Rightarrow$

$x + 1 + \ln(x+1) \geq x + 1 \Rightarrow f(x) \geq x + 1$.

Autrement dit C_f est au dessus de Δ d'équation $y = x + 1$.

b) Comme $C \cap C' = A(x\,;\,y)$ et vérifie

$f(x) = f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ et $f^{-1}(y) = x$ donc

$y = x$ c'est-à-dire $x^2 + x + 1 + \ln(x+1) = x \Leftrightarrow$

$x^2 + 1 + \ln(x+1) = 0$. On pose :

$h(x) = x^2 + 1 + \ln(x+1)$;

$h'(x) = 2x + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x^2 + 2x + 1}{x+1}$;

Etudions le signe de h'(x) :

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ d'où le signe de h'(x) est celui de x+ 1 car le numérateur est strictement positif.

x	-1	β	+∞
h '(x)		+	
h (x)	-∞	↗ 0	+∞

D'après le T.V il existe un unique β vérifiant h(β) = 0. A l'aide du calcul direct on trouve que : h(-0,8) > 0 ; h(-0,81) < 0 d'où : -0,81 < β < -0,8.

c) $(f^{-1})'(\beta) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\beta))} = \dfrac{1}{\dfrac{2\beta^2+3\beta+2}{\beta+1}} = \dfrac{\beta+1}{2\beta^2+3\beta+2}$

4.a) Les points M(x ; y) pour lesquels la tangente est parallèle à D d'équation D : y = 2x est celle dont le coeficeint directeur est égal à (f'(x) = 2).

$$f'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} = 2 \Leftrightarrow 2x - 1 + \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

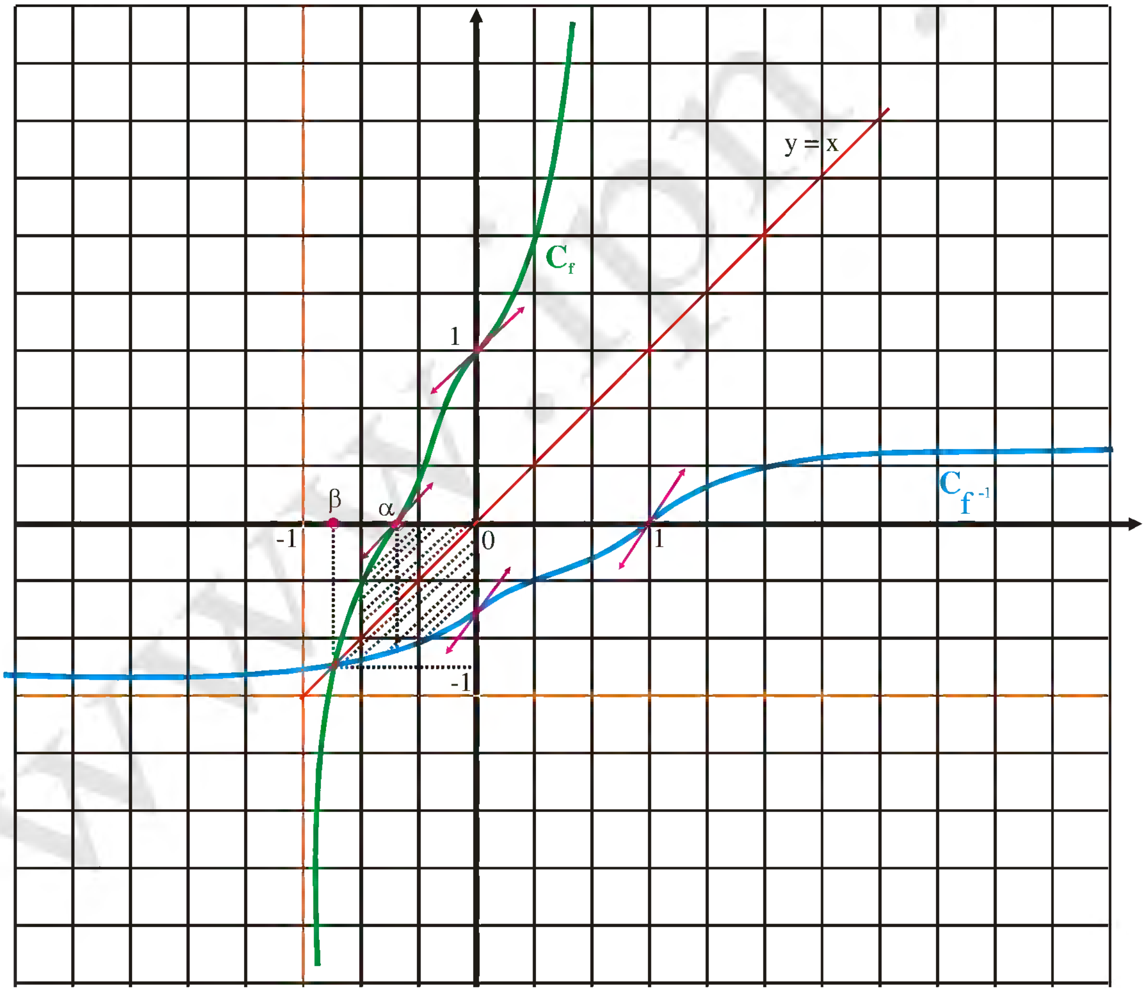
$$\frac{2x^2+x}{x+1} = \frac{x(2x+1)}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

Donc les points cherchés sont I(0 ; 2) ;

$\left(-\dfrac{1}{2} \; ; f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$

b) Comme f est strictement croissante sur]-1; +∞[l'équation f(x) = k n'a qu'une seule solution selon les valeurs de k.

c) Représentation graphique de C et C'



5.a) Calcul de l'aire A :

Comme C et C' sont symétriques par rapport à la 1^{ere} bissectrice (y = x), on peut écrire :

$A = \beta^2 - 2\int_\beta^\alpha (-f(x)dx$

$A = \beta^2 + \int_\beta^\alpha 2x^2 + 2x + 2 + \ln(x+1)dx$

$A = \beta^2 + \int_\beta^\alpha 2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)dx + \int_\beta^\alpha 2xdx$

$A = \beta^2 + \left[x^2\right]_\beta^\alpha + \int_\beta^\alpha 2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)dx$

$A = \beta^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \int_\beta^\alpha 2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)dx$

$A = \alpha^2 + \int_\beta^\alpha 2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)dx$

5.a) On a : $A = \alpha^2 + \int_\beta^\alpha 2x^2 + 2 + 2\ln(x+1)dx$

$A = \alpha^2 + \left[\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_\beta^\alpha + 2\int_\beta^\alpha \ln(x+1)dx$

$A = \alpha^2 + \frac{2\alpha^3}{3} + 2\alpha - \frac{2\beta^3}{3} - 2\beta + 2\int_\beta^\alpha \ln(x+1)dx$

On pose :

$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \\ v(x) = x \end{cases}$

$\int_\beta^\alpha \ln(x+1)dx = \left[x\ln(x+1) + 2x\right]_\beta^\alpha - 2\int_\beta^\alpha \frac{x}{x+1}dx$

$\int_\beta^\alpha \ln(x+1)dx = \alpha\ln(\alpha+1) - \beta\ln(\beta+1) - (\int_\beta^\alpha (1 - \frac{1}{x+1})dx$

$\int_\beta^\alpha \ln(x+1)dx = \alpha\ln(\alpha+1) - \beta\ln(\beta+1) - \left[x - \ln(x+1)\right]_\beta^\alpha$

$= \alpha\ln(\alpha+1) - \beta\ln(\beta+1) - (\alpha - \ln(\alpha+1) - \beta + \ln(\beta+1))$

$= \alpha\ln(\alpha+1) - \beta\ln(\beta+1) - \alpha + \beta + \ln(\frac{\alpha+1}{\beta+1})$

Donc $A = \alpha^2 + \frac{2\alpha^3}{3} + 2\alpha - 2\beta - \frac{2\beta^3}{3} + \alpha\ln(\alpha+1) - \beta\ln(\beta+1) + \ln(\frac{\alpha+1}{\beta+1})$.

Sujet 2009 /Séries : C& TMGM / Session Normale

Exercice 1

1.a) $E_{\frac{\pi}{2}}$: $Z^2 - 2(1+i)Z + 2i = 0$;

$\Delta = 4(1+i)^2 - 4(2i) = 4(2i) - 4(2i) = 0 \Rightarrow$

$Z = \dfrac{2(1+i)}{2} = 1 + i$.

E_π: $Z^2 - 2Z = 0 \Leftrightarrow Z(Z-2) = 0 \Leftrightarrow Z = 0$ ou $Z = 2$.

b) $\Delta = 4(1 + i\sin\theta)^2 - 4(2i\sin\theta)$

$= 4(1 + 2i\sin\theta - \sin^2\theta) - 8i\sin\theta$

$= 4 + 8i\sin\theta - 4\sin^2\theta - 8i\sin\theta$

$= 4(1 - \sin^2\theta) = 4\cos^2\theta \Rightarrow$

$Z' = \dfrac{2(1 + i\sin\theta) + 2\cos\theta}{2} = 1 + i\sin\theta + \cos\theta$;

$Z'' = \dfrac{2(1 + i\sin\theta) - 2\cos\theta}{2} = 1 + i\sin\theta - \cos\theta \cdot$

2.a) $Z' - 1 = i\sin\theta + \cos\theta = e^{i\theta}$ et

$Z'' - 1 = i\sin\theta - \cos\theta = -e^{-i\theta} = e^{i(\pi - \theta)}$;

Donc: $|Z'-1| = 1$ et $|Z''-1| = 1$; puis

$\arg(Z'-1) = \theta$ et $\arg(Z''-1) = \pi - \theta$; D'où

$AM' = 1$; $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM'}) = \theta\ /\ \theta \in [0\ ;\ 2\pi[$ et

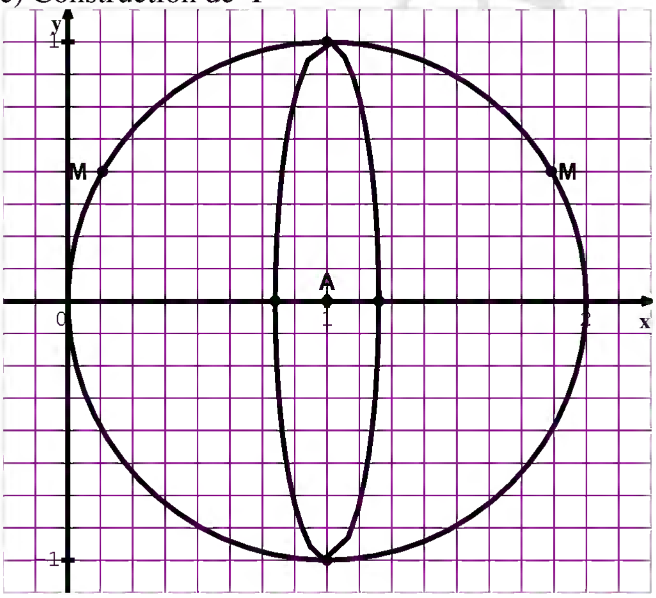
$AM'' = 1$; $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM''}) = \pi - \theta\ /\pi - \theta \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

Donc le lieu géométrique des points M' et M'' est le cercle de centre A(1) et de rayon 1.

b) $Z_{\overrightarrow{M'M''}} = 1 + i\sin\theta - \cos\theta - 1 - i\sin\theta - \cos\theta = -2\cos\theta \in \mathbb{R}$

Donc la direction de (MM') est la direction fixe de l'axe réel.

c) Construction de Γ



3.a) $Z_G = \dfrac{3Z' + 2Z''}{5} = \dfrac{3 + 3i\sin\theta + 3\cos\theta + 2 + 2i\sin\theta - 2\cos\theta}{5}$

$= 1 + i\sin\theta + \dfrac{1}{5}\cos\theta$

b) G(x ; y) ; On a : $x = 1 + \dfrac{1}{5}\cos\theta$ et $y = \sin\theta$

Donc Γ' : $(5(x-1)^2) + y^2 = 1$; d'où

Γ' est une ellipse.

c) Les éléments caractéristiques demandés :

- Centre : A(1 ; 0).
- Sommets : $(\frac{6}{5}; 0)$; $(\frac{4}{5}; 0)$ (1; 1) ; (1; -1).

Exercice 2

1.a) $f'(x) = 2x\ln(x+1) + x^2\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

$= 2x\ln(x+1) + \dfrac{x^2}{x+1}$.

Or
- $x > -1$; $x + 1 > 0$; $\dfrac{x^2}{x+1} \geq 0$
- $-1 < x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow$
  $\ln(x+1) \leq 0$ et $2x\ln(x+1) \geq 0$
- $0 \leq x \Leftrightarrow 1 \leq x + 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) \geq 0$
  et $2x\ln(x+1) \geq 0$

Donc $\forall\ x \in]-1\ ;\ +\infty[$ $f'(x) \geq 0$.

D'où f est strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

b) T : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$;

T : $y = 0$ et on a $f(x) - y = f(x)$.

x	-1		0		$+\infty$
x^2		+	0	+	
ln(x+1)		-	0	+	
f(x) - y		-	0	+	
P. relative		T/ C_f	●	C_f / T	

2.a) Comme f est continue et strictement croissante, alors f réalise une bijection de $]-1\ ;\ +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ d'où f admet une fonction réciproque g.

b) $f(x) = x \Leftrightarrow x^2\ln(x+1) = x \Leftrightarrow x(x\ln(x+1) - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\varphi(x) = 0$ ou : $\varphi(x) = x\ln(x+1) - 1$;

$\varphi'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$; $x + 1 > 0$.

Tableau de variations de φ

x	-1		α		0		β		+∞
x		-			0			+	
ln(x+1)		-			0			+	
φ'(x)		-			0			+	
φ(x)	+∞	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	+∞

Le tableau de variation de φ montre que l'équation φ(x) = 0 admet deux solutions α et β telle que : α ∈]-1 ; 0] (α strictement négative).On a : φ(-0,8) > 0 et φ(-0,7) < 0 d'où -0,8 < α < -0,7.

c) Calcul de limites :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln(x+1))=+\infty\Rightarrow$

  C admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty\Rightarrow x=-1$ est asymtôte verticale.

En plus C et C' sont symétrique par rapport à la droite y = x.

3.a) A l'aide du tableau suivant on détermine les réel a ; b et c.

	1	0	0	0
-1		-1	1	-1
	1	-1	1	-1

Donc∀ x∈]-1;+∞[on a : $\dfrac{x^3}{x+1}=x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}$

D'où a = 1 ; b = -1 ; c= 1 et d= -1.

b) $A=2\int_\alpha^0 x^2\ln(x+1)dx-\int_\alpha^0 2xdx$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x+1)\right]_\alpha^0-\frac{2}{3}\int_\alpha^0\frac{x^3}{x+1}dx-\left[x^2\right]_\alpha^0$$

$$=\frac{2}{3}\alpha^3\ln(\alpha+1)-\frac{2}{3}\int_\alpha^0(x2-x+1-\frac{1}{x+1})dx+\alpha^2$$

$$=\frac{2}{3}\alpha^3\ln(\alpha+1)-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)\right]_\alpha^0+\alpha^2$$

$$=\frac{2}{3}\alpha^3\ln(\alpha+1)+\frac{2}{9}\alpha^3-\frac{1}{3}\alpha^2+\frac{\alpha}{3}-\frac{2}{3}\ln(\alpha+1)+\alpha^2$$

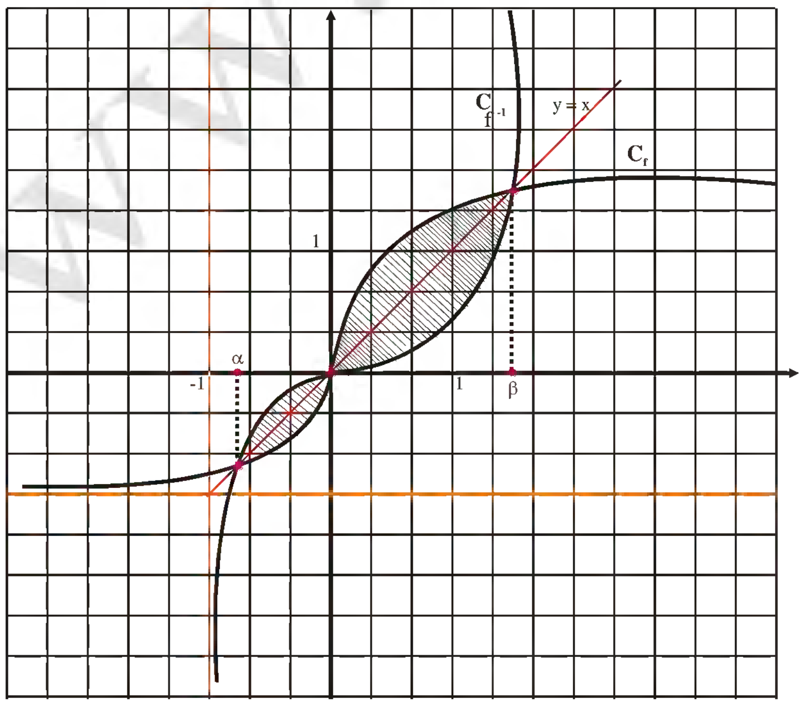
$$=\frac{2}{9}\alpha^3+\frac{2}{3}\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha+(\frac{2\alpha^3-2}{3})\ln(\alpha+1)$$

Or $f(\alpha)=\alpha\Leftrightarrow\alpha^2\ln(\alpha+1)=\alpha\Leftrightarrow\ln(\alpha+1)=\dfrac{1}{\alpha}$

$$\text{D'où } A=(\frac{2}{9}\alpha^3+\frac{2}{3}\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha+(\frac{2\alpha^3-2}{3})\frac{1}{\alpha})4cm^2$$

$$\text{Donc } A=(\frac{2}{9}\alpha^3+\frac{4}{3}\alpha^2+\frac{1}{3}\alpha-\frac{2}{3\alpha})4cm^2 .$$

Construction de C et C'



Exercice 3

$f_1(x) = xe^{-x}$; $D_f = \mathbb{R}$

• Limite aux bornes de D_f

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ est(A.H)

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow C_1$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

• Dérivée et sens de variation

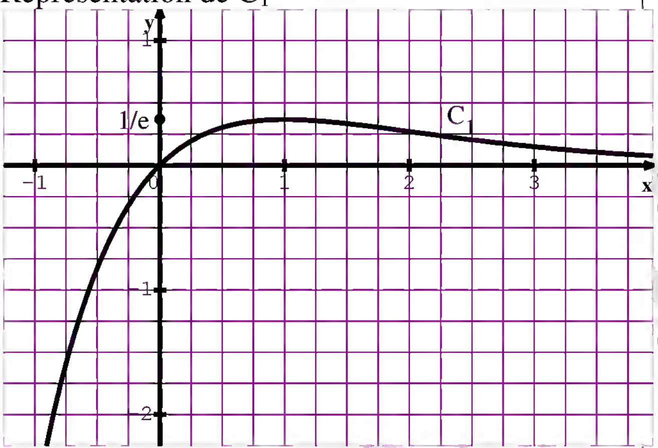
$f'_1(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$f'_1(x) \geq 0 \ \forall x \leq 1$; $f'_1(x) \leq 0 \ \forall x \geq 1$.

• Tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		+	0	-	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	e^{-1}	↘	0

• Representation de C_1



b) Calcul d'aire

$A = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 xe^{-x}dx$; On pose

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \Rightarrow$

$\int_0^1 f_1(x)dx = -\left[xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx \Rightarrow$

$= -\left[xe^{-x}\right]_0^1 - \left[e^{-x}\right]_0^1 = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^1 \Rightarrow$

$\int_0^1 f_1(x)dx = (-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}) + (0 + 1) = 1 - \frac{2}{e}$.

$f_n(x)$ est indépendante de n $\Leftrightarrow$ x^n est indépendante de n $\Leftrightarrow$ x = 0 ou x = 1.

D'où les points cherchés ont pour coordonnées :(0 ; 0) ; (1 ; 1/e).

b) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x^{n+1} - x^n)e^{-x} = x^n(x-1)e^{-x}$

On distingue deux cas :

• n pair :

x	-1		0		1		$+\infty$
x^n		+	0	+	⋮	+	
x - 1		-	⋮	-	0	+	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		-	⋮	-	⋮	+	
P. relatibve		C_n / C_{n+1}	●	C_n / C_{n+1}	●	C_{n+1} / C_n	

• n impair :

x	-1		0		1		$+\infty$
x^n		-	0	+	⋮	+	
x - 1		-	⋮		0	+	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		+	⋮	-	⋮	+	
P. relatibve		C_{n+1} / C_n	●	C_n / C_{n+1}	●	C_{n+1} / C_n	

3.a) On a : $I_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = 1 - \frac{2}{e}$;

b) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx$; On pose :

$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \Rightarrow$

b)

$I_{n+1} = \left[-e^{-x}x^{n+1}\right]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}dx = -e^{-1} + (n+1)I_n$.

On a : $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow$

$0 \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n \Rightarrow$

$0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x}dx \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow$

$0 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)} \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$; D'après le théorème des Gendarmes.

4.a) on a : $I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n \Rightarrow$

$e I_{n+1} = -1 + e(n+1)I_n \Rightarrow e I_{n+1} - e(n+1)I_n = -1 \Rightarrow$

$e\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{e(n+1)I_n}{(n+1)!} = \frac{-1}{(n+1)!} \Rightarrow$

$J_{n+1} - \frac{eI_n}{n!} = \frac{-1}{(n+1)!} \Rightarrow J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{(n+1)!}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$J_{n+1} - J_n = \frac{-1}{(n+1)!}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) On a d'après la relation précédente :

$J_2 - J_1 = \frac{-1}{2!}$

$J_3 - J_2 = \frac{-1}{3!}$

.... = ...

.... = ...

.... = ...

$J_n - J_{n-1} = \frac{-1}{n!}$

En sommant membre à membre et après simplification:

$$J_n - J_1 = -(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n!}) \Rightarrow$$

$$J_n = J_1 - (\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n!}); \text{ Or}$$

$$J_1 = \frac{e}{1!}I_1 = e(1-2e^{-1}) = e-2 = e-(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!})$$

Donc on en déduit que :

$$J_n = e-(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n!}).$$

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{e}{n!}I_n) = 0\times 0 = 0$; Or

$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n!} = e - J_n \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n!}) = e.$$

Exercice 4

1.a) Comme : $\left|\begin{array}{l} AC = BD \\ \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}\end{array}\right. \Rightarrow \exists!$ rotation r_1 qui

$\left|\begin{array}{l} A \mapsto B \\ C \mapsto D\end{array}\right.$ l'angle de r_1 est $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}$.

On a : $(\overrightarrow{PA} ; \overrightarrow{PB}) = (\overrightarrow{PC} ; \overrightarrow{PD}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P \in \Gamma_1$ et Γ_3.

b) Comme r_2 : $\left|\begin{array}{l} A \mapsto D \\ C \mapsto B\end{array}\right. \Rightarrow$ l'angle de r_2 est :

$(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{BD}) - \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.

Donc $(\overrightarrow{QA} ; \overrightarrow{QD}) = (\overrightarrow{QC} ; \overrightarrow{QB}) \Rightarrow$
$Q \in \Gamma_1 \cap \Gamma_4$.

c) Par conservation du milieu :

$\left|\begin{array}{l} r_1(M) = N \Rightarrow PMN \text{ est isocèle rectangle en } P \\ r_2(M) = N \Rightarrow QMN \text{ est isocèle rectangle en } Q\end{array}\right. \Rightarrow$

PMQN est un carré.

2.a) Comme PAP_1B et PCP_1D sont des carrés directs donc : $(\overrightarrow{PA} ; \overrightarrow{PP_1}) = (\overrightarrow{PC} ; \overrightarrow{PP_2}) = \frac{\pi}{4}$ et

$\frac{PP_1}{PA} = \frac{PC}{PP_2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$;Or $A \neq C$ et $P_1 \neq P_2 \Rightarrow$

Il existe une similitude unique S_1 qui : $\left|\begin{array}{l} A \mapsto P_1 \\ C \mapsto P_2\end{array}\right.$.

Le centre de S_1 est P ; son rapport est $\sqrt{2}$ et son angle est $\frac{\pi}{4}$.

b) Comme: $(\overrightarrow{PM} ; \overrightarrow{PQ}) = \frac{\pi}{4}$ et $\frac{PQ}{PM} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$S_1(M) = Q$; Or M est milieu de [AC] donc par conservation de milieu Q est le milieu de$[P_1P_2]$.
Puis ona $H \in \Gamma_1 \cap \Gamma_3$ d'où :

$(\overrightarrow{HP_1} ; \overrightarrow{HP_2}) = (\overrightarrow{HP_1} ; \overrightarrow{HP}) + (\overrightarrow{HP} ; \overrightarrow{HP_2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$\Rightarrow$ les points P_1 ; P_2 ; Q et H sont alignés.

3.a) Comme QBQ_1C et QDQ_2A sont des carrés directs alors :

$$\left|\begin{array}{l} (\overrightarrow{QQ_1};\overrightarrow{QC}) = (\overrightarrow{QQ_2};\overrightarrow{QA}) = (\overrightarrow{QP} ; \overrightarrow{QM}) = \frac{\pi}{4} \\ \frac{QC}{QQ_1} = \frac{QC}{QQ_2} = \frac{QM}{QP} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right. \Rightarrow$$

S_2 : $\left|\begin{array}{l} Q_1 \mapsto C \\ Q_2 \mapsto A \\ P \mapsto M\end{array}\right.$

b) Or S_2^{-1} conserve le milieu d'où P est le milieu de $[Q_1Q_2]$; en plus $H \in \Gamma_2 \cap \Gamma_4$ d'où :
les points Q ; Q_2 ; P et H sont alignés.

4.a) σ est une similitude directe car elle est la composée de deux similitudes directes.
Ses éléments caractéristiques sont :

- L'angle : $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;
- Le rapport : $(\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$;
- Le centre : Le point N car σ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$: $\sigma(P) = S_1 \circ S_2(P) = S_1(M) = Q$.

b) Comme: $\sigma(Q_1) = S_1 \circ S_2(Q_1) = S_1(C) = P_2$ et $\sigma(Q_2) = S_1 \circ S_2(Q_2) = S_1(A) = P_1 \Rightarrow P_1P_2 = Q_1Q_2$. Puis on a :

$(\overrightarrow{Q_1Q_2} ; \overrightarrow{P_2P_1}) = \frac{\pi}{2} = (\overrightarrow{Q_1Q_2} ; \overrightarrow{P_1P_2}) + \pi = -(\overrightarrow{P_1P_2};\overrightarrow{Q_1Q_2}) + \pi$

d'où $(\overrightarrow{P_1P_2} ; \overrightarrow{Q_1Q_2}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

5.a) r est une rotation d'angle $(\overrightarrow{P_1P_2} ; \overrightarrow{Q_1Q_2}) = \frac{\pi}{2}$;

Or par conservation du milieu on a r(Q) = P d'où le centre de r est M.

b) Comme $r(P_2) = Q_2$ donc $(\overrightarrow{MP_2}\ ;\ \overrightarrow{MQ_2}) = \frac{\pi}{2}$;

Or $(\overrightarrow{HP_2}\ ;\overrightarrow{HQ_2}) = (\overrightarrow{HQ}\ ;\ \overrightarrow{HQ_2}) = (\overrightarrow{AQ}\ ;\overrightarrow{AQ_2}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$(\overrightarrow{MP_2}\ ;\ \overrightarrow{MQ_2}) = (\overrightarrow{HP_2}\ ;\overrightarrow{HQ_2}) \Rightarrow$ Les points M ; H ; P_2 et Q_2 sont cocycliques.

c) De même que les points : M ; H ; P_1 ; Q_1 ; et N ; H ; P_1 ; Q_2 et N_1 ; H ; P_2 ; Q_1.

d) D'après le théorème des médianes appliqué aux triangles P_2AC et Q_2AC on trouve :

$P_2A^2 + P_2C^2 = 2P_2M^2 + \frac{AC^2}{2}$ et

$Q_2A^2 + Q_2C^2 = 2Q_2M^2 + \frac{AC^2}{2}$ Or ; $P_2M = Q_2M$

d'où $P_2A^2 + P_2C^2 = Q_2A^2 + Q_2C^2$.

e) Relations semblables :

- $P_1A^2 + P_1C^2 = Q_1A^2 + Q_1C^2$;
- $P_1B^2 + P_1D^2 = Q_2B^2 + Q_2D^2$;
- $P_2B^2 + P_2D^2 = Q_1B^2 + Q_1D^2$.

Sujet 2009 /Séries : C& TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

1) a): $f_{\frac{\sqrt{3}}{2}} : Z \mapsto Z' \ / \ Z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})Z + 1 - \sqrt{3}i$

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow f_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$

et de centre le point d'affixe de : $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})}$.

Comme : $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})} = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$

Donc le centre est le point d'affixe de (2).

a): $f_{\frac{-1}{2}i} : Z \mapsto Z' \ / \ Z' = Z \Rightarrow f_{\frac{-1}{2}i}$ est l'identité du plan.

c) $f_{1+\frac{1}{2}i} : Z \mapsto Z' \ / \ Z' = iZ + 2 - 2i$.

On a : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $\frac{2 - 2i}{1 - i} = 2 \Rightarrow f_{1+\frac{1}{2}i}$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe 2.

d) $f_{2i} : Z \mapsto Z' \ / \ Z' = \frac{-3}{2}Z + 5$;

On a : $\frac{-3}{2} \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $\dfrac{5}{1 - (\frac{-3}{2})} = \dfrac{5}{\frac{5}{2}} = 2 \Rightarrow f_{2i}$ est l'homothétie de rapport $\frac{-3}{2}$ et de centre le point d'affixe 2.

2.a) Calcul de Z_1 :

$Z_1 = f(Z_0) = f(3) = (\frac{1}{2} + \omega i)3 + 1 - 2\omega i = \frac{3}{2} + 3\omega i + 1 - 2\omega i = \frac{5}{2} + \omega i$

$Z_2 = f(Z_1) = f(\frac{5}{2} + \omega i) = (\frac{1}{2} + \omega i)(\frac{5}{2} + \omega i) + 1 - 2\omega i$

$= \frac{9}{4} - \omega^2 + \omega i$.

b) Pour démontrer que : $Z_n = 2 + 2\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$.

- 1^{ere} étape : Initialisation : vérifions avec n = 0 ; $Z_0 = 2 + (1)e^{i0} = 3$ c'est vrai
- $2^{ème}$ étape : Hérédité : Supposons pour n donné que : $Z_n = 2\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$ et montrons que cela entraîne : $Z_{n+1} = 2\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$. On a :

$Z_{n+1} = f(Z_n) = (\frac{1}{2} + \omega i)(2 + (\frac{1}{2\cos\theta})^n e^{in\theta}) + 1 - 2\omega i$

$= 1 + 2\omega i + (\frac{1}{2} + \omega i)(\frac{1}{2\cos\theta})^n e^{in\theta} + 1 - 2\omega i$

$= 2 + (\frac{1}{2} + \omega i)(\frac{1}{2\cos\theta})^n e^{in\theta}$

Or , $\theta = \arg(\frac{1}{2} + \omega i)$ d'où $\cos\theta = \dfrac{1}{2|1 + \omega i|} \Rightarrow$

$|1 + \omega i| = \frac{1}{2\cos\theta} \Rightarrow 1 + \omega i = \frac{1}{2\cos\theta} e^{i\theta}$

Donc : $Z_{n+1} = 2 + (\frac{1}{2\cos\theta})^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : Z_n = 2 + (\frac{1}{2\cos\theta})^n e^{i(n)\theta}$.

c) $V_n = \left|(\frac{1}{2\cos\theta})^n e^{i(n)\theta}\right| = (\frac{1}{2\cos\theta})^n$; car $\cos\theta > 0$.

Donc (V_n) est suite géomètrique de raison : $q = \frac{1}{2\cos\theta}$.

(V_n) est convergente $\Leftrightarrow -1 < |q| \le 1 \Leftrightarrow$

$0 < \frac{1}{2\cos\theta} \le 1 \Leftrightarrow \cos\theta \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left[\frac{-\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$.

d) $d_n = Z_{n+1} - Z_n = (\frac{1}{2\cos\theta})^n \left|(\frac{1}{2\cos\theta})e^{i\theta} - 1\right|$

$d_n = (\frac{1}{2\cos\theta})^{n+1} \left|e^{i\theta} - 2\cos\theta\right|$

$d_n = V_{n+1}\left|-e^{-i\theta}\right| \Rightarrow d_n = V_{n+1}$.

$S_n = V_1 + V_2 + \cdots\cdots + V_n$

$S_n = V_1 \frac{1}{1-q}(1 - q^{n+1}) = \dfrac{\frac{1}{2\cos\theta}}{1 - \frac{1}{2\cos\theta}}(1 - (\frac{1}{2\cos\theta})^{n+1})$

S_n est la longueur de la ligne brisée reliant les points M_0 ; M_1 ;$\cdots\cdots$$M_{n+1}$.

Exercice 2

1.a) Etude de f_0 / $f_0(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; $D_{f_0} =]-\infty; +\infty[$

Limites aux bornes :

$\lim_{x\to-\infty} f_0(x)=0$; $\lim_{x\to+\infty} f_0(x)=1$.

Dérivée et sens de variation

$f_0'(x) = \frac{e^x(1+e^x)-e^x(e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_0(x)$	+	
f (x)	0 ↗	1

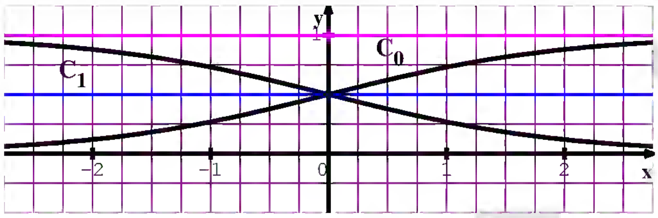
b) Comme $\lim_{x\to-\infty} f_0(x)=0$; $\lim_{x\to+\infty} f_0(x)=1$

Donc C_0 admet dux asymptôtes horizontales dont les équations sont y= 0 et y = 1.

c) $f_0(2(0) - x) + f_0(x) = f_0(-x) + f_0(x) =$

$\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{e^x+1}+\frac{e^x}{1+e^x} = 1 = 2(\frac{1}{2}) \Rightarrow$

$\Omega(0\ ;\ \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de C_0.



2.a) $f_1(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = f_0(-x) \Rightarrow$

C_1 est l'image de C_0 par la réflexion d'axe (Oy).

b) $f_1(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = 1-\frac{e^x}{1+e^x} = 1-f_0(x)$

d'où $\frac{f_1(x)+f_0(x)}{2} = \frac{1}{2}$ Donc C_1 est l'image de C0 par la réflexion d'axe la droite d'équation y = $\frac{1}{2}$.

c) Voir figure précédente.

3.a) $U_0 = \int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx \Rightarrow$

$U_0 = \left[\ln(1+e^x)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\frac{1+e}{2}$

$U_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 (1-f_0(x))dx$

$U_1 = \int_0^1 dx - U_0 = 1-\ln(\frac{1+e}{2})$.

b) $\forall x\in[0\ ;\ 1] : 1+e^x > 1$ d'où $0 < \frac{1}{1+e^x} < 1 \Rightarrow$

$0 < f_n(x) < e^{(1-n)x} \Rightarrow 0 < \int_0^1 f_n(x)dx < \int_0^1 e^{(1-n)x}dx$;

$\forall x\in[0\ ;\ 1] : 0 < U_n < \left[\frac{1}{(1-n)}e^{(1-n)x}\right]_0^1 \Rightarrow$

$0 < U_n < \frac{1}{n-1} - \frac{e^{1-n}}{n-1} \Rightarrow 0 < U_n < \frac{1}{n-1} \Rightarrow$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$; D'après le Théorème des gendarmes.

4.a) $U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}+e^{-(1-nx)}}{e^x+1}dx$

$\int_0^1 \frac{e^{-nx}+e^{-(1-nx)}}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^x)}{e^x+1}dx = \int_0^1 e^{-nx}dx$

$= \left[\frac{-1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$

$\int_0^1 \frac{e^{-nx}+e^{-(1-nx)}}{e^x+1}dx = \left[\frac{-1}{ne^n}\right] - \left[\frac{-1}{n}\right] = \frac{1}{n}(1-\frac{1}{e^n})$

Donc $U_{n+1} + U_n = |V_n|$.

b) Comme : $\begin{vmatrix} V_n > 0\ ;\ \text{si } n \text{ est pair} \\ V_n < 0\ ;\ \text{si } n \text{ est impair}\end{vmatrix} \Rightarrow$

$V_0 = U_1 + U_0$;

$V_1 = -U_2 - U_0$;

$V_2 = U_3 + U_2$;

…. = ………

…. = ………

$V_n = \begin{vmatrix} U_{n+1}+U_n\ ;\ \text{si } n \text{ est pair} \\ -U_{n+1}-U_n;\ \text{si } n \text{ est impair}\end{vmatrix} \Rightarrow$

– – – – – – – – –

$S_n = \begin{vmatrix} U_0+U_{n+1};\ \text{si } n \text{ est pair} \\ U_0-U_{n+1};\ \text{si } n \text{ est impair}\end{vmatrix} \Rightarrow$

$S_n - U_0 = U_{n+1}$ ou $S_n - U_0 = -U_{n+1} \Rightarrow$

$|S_n - U_0| = |U_{n+1}|$

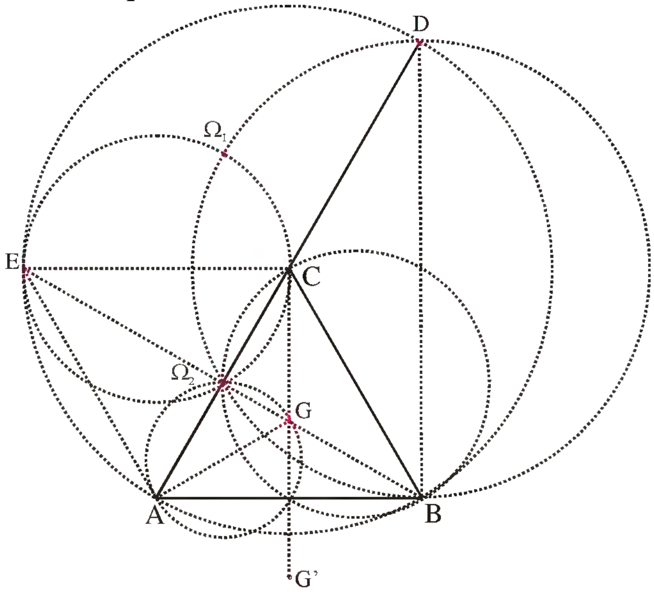
$S_n - U_0 = U_{n+1}$ ou $S_n - U_0 = -U_{n+1} \Rightarrow$

$|S_n - U_0| = |U_{n+1}|$; Or $\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = 0 \Rightarrow$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = U_0 = \ln(\frac{1+e}{2})$.

Exercice 3

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



2.a) Comme $\left| \begin{array}{l} AB = AC \text{ et } AC = CD \\ AB = CD \text{ Or } \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD} \end{array} \right. \Rightarrow$

$\exists!$ rotation r qui $\left| \begin{array}{l} A \mapsto C \\ B \mapsto D \end{array} \right.$

b) L'angle de r est $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$;

Comme EA = EC et $(\overrightarrow{EA}\,;\,\overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{3}$ alors EAC est équilatéral direct.

D'autre part E est le centre de r.

3) Comme CA = CB = CD = CE = a donc les points A ; B ; D et E sont cocycliques leur cercle a pour centre C et de rayon a.

4.a) Un angle de S est : $(\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD}\,;\,\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC})$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA}) - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Le rapport est de S est : $\frac{BC}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) SoS (B) = S(D) = B ; SoS (D) = S(C) ; Or

$(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BG}) = \frac{\pi}{6}$ et $\frac{BG}{BC} = \frac{\frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Alors

S(C) = G et ; SoS (D) = G; ; SoS (E) = S(A);

Or ABC et ACE sont équilatéraux d'où

$(\overrightarrow{BE}\,;\,\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{6}$ et $\frac{BA}{BE} = \frac{a}{2\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

S(E) = A et S(A) = G' où G' est le symétrique de G par rapport à (AB) d'où SoS (E) =G'.

Donc : l'image du triangle BDE est le triangle BGG'.

5.a) f(B) = roS(B) = r(B) = D ;
g(B) = So r(B) = S(D) = C;
f(E) = roS(E) = r(A) = C ;
g(A) = So r(A) = S(C) = G

b) Comme ; $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ et $1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (r est une similitude d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 1) alors f et g sont des similitudes d'angles $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Le centre de f est un point (Ω_1) d'intersection des cercles de diamètres [BD] et [EC].

Le centre de g est un point (Ω_2) d'intersection des cercles de diamètres [BC] et [AG].

c) On a Ω_2EC est rectangle en Ω_2 et le triangle Ω_2BD est rectangle aussi en $\Omega_2 \Rightarrow \Omega_2$ est un point commun des cercles de diamètres respectifs [AG] ;[BC] ; [CE] et [BD] d'où Ω_2 est le centre de de g(Ω_2 est le milieu de [AC]).

Exercice 4

1.a) Comme le discriminant de x^2 -2x + 2 est négatif alors $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2 -2x + 2 > 0$; Or $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ donc f(x) existe $\Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}^*$.

b) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ est une (A.V) de C

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{|x|\to+\infty} (f(x) - (2x-3)) = 0 \Rightarrow$ y = 2x -3 est (A.O) de C.

On a D : y = 2x – 3 alors $f(x) - y = \ln(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2})$

qui a le même signe que $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}$ -1 =

$\frac{-2x+2}{x^2}$ qui a le même signe que -2x + 2 d'où

Le tableau suivant:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f(x) - y	+	‖	+	0	-
P. relative	C/ D	‖	C/ D	●	D / C

2.a) $f'(x) = 2 + \dfrac{(2x-2)x^2 - 2x(x^2-2x+2)}{x^4} \times (\dfrac{x^2}{x^2-2x+2}) = \ 2(1 + \dfrac{x-2}{x(x^2-2x+2)})$

$$= 2(\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x(x^2-2x+2)}) = \frac{2((x-1)(x^2-x+2))}{x(x^2-2x+2)} = \frac{2(x-1)}{x}\varphi(x) \text{ ; où}$$

$\varphi(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2-2x+2}$; Or le discriminent de x^2-x+2 est négatif d'où $x^2-x+2>0 \Rightarrow \varphi(x)>0$.

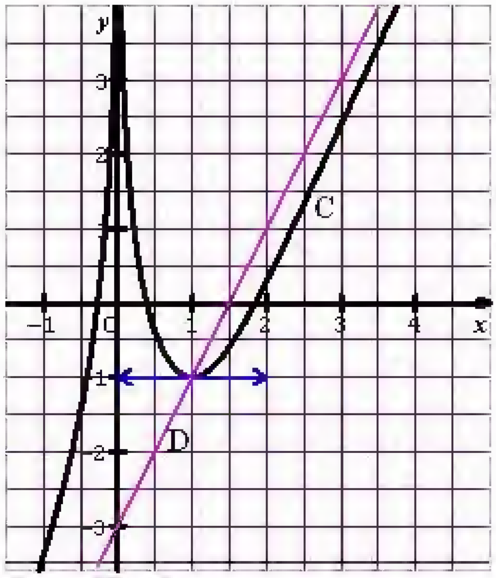
Donc $\varphi > 0$; $\forall\ x \neq$ .b) Le T.V de f

x	-∞	α	0	β	1	γ	+∞
x - 1	-		0		- 0		+
x	-		0		+		
f'(x)	+		0		- 0		+
f(x)	-∞ ↗	0 ↗	+∞ ‖ +∞	↘ 0	↘ -1	↗ 0	↗ +∞

c) D'après le T.V de f et la continuité de f sur] -∞ ; 0[et] 0 ; +∞ [on a l'équation f(x) = 0 admet trois solutions : α ; β ; γ . Puis on a :

- $f(-0{,}5) < 0$ d'où $-0{,}5 < \alpha < 0$;
- $f(0{,}5) < 0$ d'où $0 < \beta < 0{,}5$;
- $f(1{,}5) < 0$ et $f(2) > 0$ d'où $1{,}5 < \gamma < 2$

d) Courbe de C ci-contre



3.a)On a : $\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2} - \dfrac{2}{1+(x-1)^2} =$

$$\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2-2x+2} =$$

$$\frac{2x-4}{x^2-2x+2} \text{ d'où } \forall x \in \mathbb{R}:$$

$$\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{1+(x-1)^2}.$$

b) $A = \displaystyle\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx = \left[\ln(x^2-2x+2)\right]_2^{1+\sqrt{3}}$

$$= \ln(1+2\sqrt{3}+3-2-2\sqrt{3}+2) - \ln 2$$

$$= \ln 4 - \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2 \cdot$$

c) B=$\displaystyle\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2}{1+(x-1)^2}dx$;où x = 1 + tant ; t∈[0 ; $\dfrac{\pi}{2}$ [d'où

$x = 2 \Leftrightarrow \tan t = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$

$x = 1+\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$; $dx = (1+tna^2 t)dt \Rightarrow$

$$B = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2(1+\tan^2 t)}{1+\tan^2 t}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2dt = 2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{6}$$

d) S=$\displaystyle\int_2^{1+\sqrt{3}} (f(x)-(2x-3)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\frac{x^2-2x+2}{x^2})dx \cdot$

On pose :

$u(x) = \ln(\dfrac{x^2-2x+2}{x^2}) \Rightarrow u'(x) = \dfrac{2x-4}{x(x^2-2x+2)}$

v'(x) = 1⇒v(x) = x doù

$$S = \left[x\ln(\frac{x^2-2x+2}{x^2})\right]_2^{1+\sqrt{3}} - \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-2x+2}dx \Rightarrow$$

$$S = (1+\sqrt{3})\ln(\frac{4}{(1+\sqrt{3})^2}) + 2\ln 2 - A + B \Rightarrow$$

$$S = ((1+\sqrt{3})\ln(\frac{4}{(1+\sqrt{3})^2}) - \ln 2 + \frac{\pi}{6})u.a$$

Sujet 2008 /Séries : C & TMGM / Session normale

Exercice 1

$f(x) = x + \dfrac{1}{e^x + 1}$; $x \in \mathbb{R}$.

1 .a) Etude de f

- $D_f = \mathbb{R}$
- Limites aux bornes

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- Dérivée et sens de variations

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x+1)^2} > 0$$

- Tableau de variations

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f ' (x)	+
f (x)	$-\infty \nearrow +\infty$

b) D'après le T.V de f : f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2.a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x + 1} - 1 = 1 - 1 = 0$;

Donc la droite D d'équation y = x + 1 est une A .O de (C) en $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x + 1} = 0$; $\Rightarrow$ y = x est une A .O de (C) en $+\infty$.

c) $f(x) - x = \dfrac{1}{e^x + 1} > 0 \Rightarrow x < f(x)$;

$f(x) - (x+1) = \dfrac{1}{e^x + 1} - 1 = \dfrac{-e^x}{e^x + 1} < 0 \Rightarrow f(x) < x+1$;

$\Rightarrow x \le f(x) \le x+1$.Donc (C) / D' et D/ (C) c'est –à-dire (C) est située entre D et D'.

d) $f(-x) + (f(x) = -x + \dfrac{1}{e^{-x} + 1} + x + \dfrac{1}{e^x + 1}$

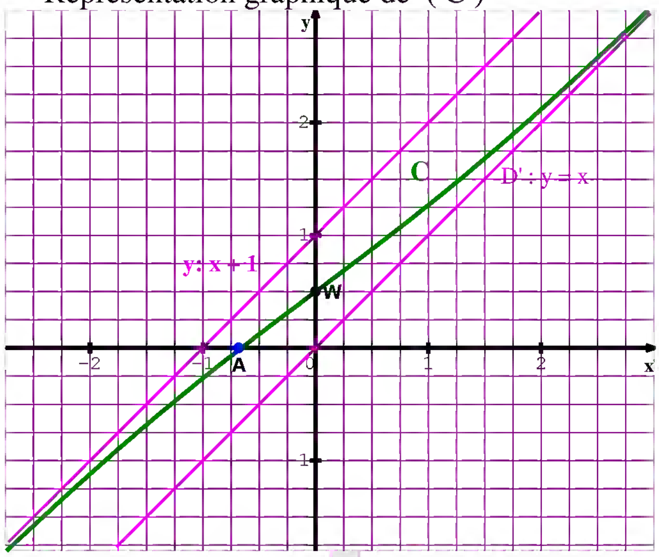
$$= \frac{1}{e^{-x} + 1} + \frac{1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{e^x}{1 + e^x} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1 + e^x}{1 + e^x} = 1 \quad \Rightarrow$$

(C) admet un centre de symétrie : $\Omega(0 ; \frac{1}{2})$.

e) $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$; par le calcul ; d'où (C) coupe l'axe des abscisses en un point A d'abscisse x_0 où $-0,7 < x_0 < -0,6$.

- Représentation graphique de (C)



Exercice 2

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_n = \int_1^e x^3 (\ln x)^n dx$;

1.a) $U_1 = \int_1^e x^3 (\ln x) dx$; on pose :

$$\begin{cases} u'(x) = x^3 \\ v(x) = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{1}{4} x^4 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$U_1 = \left[\frac{x^4}{4} (\ln x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4} \times \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} \Rightarrow U_1 = \frac{3e^4 + 1}{16}$$

b) $U_{n+1} - U_n = \int_1^e x^3 (\ln x)^{n+1} dx - \int_1^e x^3 (\ln x)^n dx$

$$= \int_1^e x^3 (\ln x)^n (\ln x - 1) dx \ ;$$

On a : $1 \le x \le e \Rightarrow 0 \le \ln x \le 1 \Rightarrow \ln x - 1 \le 0 \Rightarrow$ $x^3 (\ln x)^n (\ln x - 1) \le 0 \Rightarrow$

$\int_1^e x^3 (\ln x)^n (\ln x - 1) dx \le 0 \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \le 0 \Leftrightarrow$

(U_n) est décroissante ; D'autre part : $1 \le x \le e \Leftrightarrow$ $0 \le \ln x \le 1 \Rightarrow x^3 (\ln x)^n \ge 0 \Rightarrow$

$U_n = \int_1^e x^3 (\ln x)^n dx \ge 0$;

- (U_n) est minorée par 0 ; on peut en déduire que (U_n) est convergente.

2.a) $U_n = \int_1^e x^3 (\ln x)^n dx$. ; On pose

$$\begin{cases} u'(x) = x^3 \\ v(x) = (\ln x)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{4}x^4 \\ v'(x) = \dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$U_n = \left[\frac{x^4}{4}(\ln x)^n\right]_1^e - \frac{n}{4}\int_1^e x(\ln x)^{n-1}dx \Rightarrow$$

$$U_n = \frac{e^4}{4} - \frac{n}{4}U_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$4U_n = e^4 - nU_{n-1} \Leftrightarrow 4U_n + nU_{n-1} = e^4$$

b) $4U_2 + 2U_1 = e^4 \Leftrightarrow U_2 = \dfrac{e^4 - 2U_1}{4} \Leftrightarrow$

$$U_2 = \frac{e^4 - \dfrac{3e^4+1}{8}}{4} = \frac{5e^4 - 1}{32}$$

- $4U_3 + 3U_2 = e^4 \Leftrightarrow U_3 = \dfrac{e^4 - 3U_2}{4} \Leftrightarrow$

$$U_3 = \frac{e^4 - \dfrac{15e^4-3}{32}}{4} = \frac{17e^4 + 3}{128}$$

3.a) $U_n \le U_{n-1}$ car (U_n) est décroissante $\Rightarrow$
$nU_n \le nU_{n-1} \Leftrightarrow 4U_n + n\,U_n \le 4U_n + nU_{n-1} \Leftrightarrow$
$(4+n)U_n \le e^4 \Leftrightarrow U_n \le \dfrac{e^4}{4+n}$ (1).

- $4U_{n+1}+(n+1)U_n = e^4$;
  $U_{n+1} \le U_n \Leftrightarrow 4U_{n+1} \le 4U_n \Leftrightarrow$
  $4U_{n+1} + (n+1)U_n \le 4U_n + (n+1)U_n \Leftrightarrow$
  $e^4 \le (n+5)U_n \Leftrightarrow \dfrac{e^4}{n+5} \le U_n$ (2)

De (1) et (2) on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\dfrac{e^4}{n+5} \le U_n \le \dfrac{e^4}{4+n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^4}{n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^4}{n+4} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

On a : $\dfrac{ne^4}{n+5} \le nU_n \le \dfrac{ne^4}{4+n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{ne^4}{n+5} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{ne^4}{n+5} = e^4$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} nU_n = e^4$.

Exercice 3

$P(Z) = Z^3 - (5+6i)Z^2 + (-4+14i)Z + 8 - 8i$.

1.a) $P(1) = 1 - 5 - 6i - 4 + 14i + 8 - 8i = 9 - 9 + 14i - 14i = 0$.

b) Le tableau suivant donne les coefficients cherchés :

1	1	-5 - 6i	-4 + 14i	8- 8i
		1	-4 -6i	-8+8i
	1	-4-6i	-8 + 8i	0

Donc; $P(Z) = (Z-1)(Z^2-(4+6i)Z-8+8i$.

$P(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z-1)(Z^2-(4+6i)Z-8+8i = 0 \Leftrightarrow$
$Z-1 = 0 \Leftrightarrow Z = 1$ ou
$Z^2-(4+6i)Z-8+8i = 0$;
$\Delta = (4+6i)2-4(-8+8i) = 16 + 48i - 36 + 32 - 32i$
$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2$

$$Z_1 = \frac{4+6i-4-2i}{2} = \frac{4i}{2} = 2i$$

$$Z_2 = \frac{4+6i+4+2i}{2} = 4+4i$$

$S = \{1 ; 2i ; 4+4i\}$.

2.a) $Z_G = \dfrac{2Z_A - 2Z_B - Z_C}{2-2-1} \Leftrightarrow$

$2Z_A - 2Z_B - Z_C = -Z_G \Leftrightarrow$

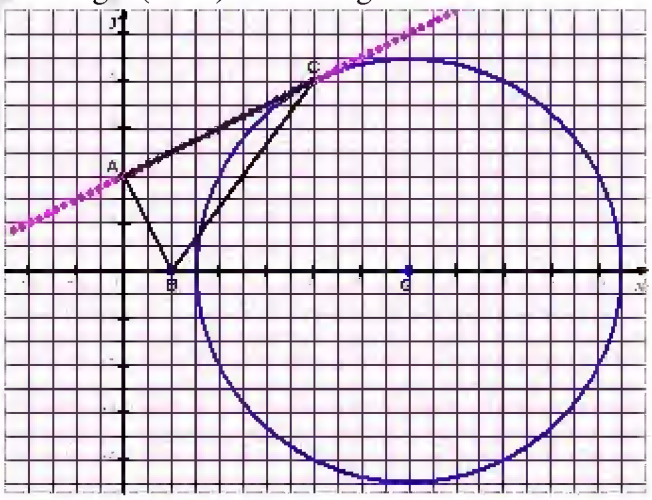
$2(2i) - 2(1) - Z_C = -6 \Leftrightarrow Z_C = 4 + 4i$.

- $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \dfrac{4+4i-2i}{1-2i} = \dfrac{4+2i}{1-2i} \Leftrightarrow$

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{2i(-2i+1)}{1-2i} = 2i \Rightarrow$$

$$\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = \arg 2i = \frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow$$

Le triangle (ABC) est rectangle en A.



b) $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -10$;
$2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -MG^2 + 2GA^2 - 2GB^2 - GC^2$.
$GA^2 = |Z_G - Z_A|^2 = |6 - 2i|^2 = 36 + 4 = 40$;
$GB^2 = |Z_G - Z_B|^2 = |6 - 1|^2 = 25 =$;
$GC^2 = |Z_G - Z_C|^2 = |6 - 4 - 4i|^2 = |2 - 4i|^2 = 20$;
$2MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = -MG^2 + 10$
$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow -MG^2 + 10 = -10 \Leftrightarrow MG^2 = 20 \Leftrightarrow$
$MG = 2\sqrt{5}$;
Donc Γ_1 est le cercle de centre G passant par C (de rayon $2\sqrt{5}$).

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = -5 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = -5$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}) = -5 \Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = -5$ avec $I = [A*B] \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = -\dfrac{5}{2}$

Donc Γ_2 est la droite passant par C et ($\perp$) à (AB) c'est-à-dire (AC).

c) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{GC} = -8+8 = 0 \Rightarrow$

(AC) $\perp$ (GC).

Donc Γ_1 et Γ_2 sont tangentes en C ; c'est à-dire Γ_2 est la tangente de Γ_1 en C.

Exercice 4

1) Etude de variations de u

- $D_u =]1 ; +[\infty$;
- Limites aux bornes de D_u

$$\lim_{n\to1^+} u(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \ ; \lim_{n\to+\infty} u(x) = 0$$

- Dérivée et sens de variations

$$u'(x) = \frac{\frac{-1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x\ln^2 x} < 0 \ ; u'(x) < 0 \ \forall x \in D_u.$$

- Tableau de variations

x	- ∞	+∞
u ' (x)	-	
u (x)	+∞ ↘	0

2) $f(x) = e^{u(x)} = e^{\frac{1}{\ln x}}$; $x \in]1;+\infty[$;

f'(x)= u'(x).$e^{u(x)}$ < 0 ; car u'(x) < 0 $\Rightarrow$ f est strictement décroissante sur]1 ; +∞[.

$\lim_{n\to1^+} f(x) = +\infty = \ ; \lim_{n\to+\infty} f(x) = 1$

- Tableau de variations

x	1	+∞
f ' (x)	-	
f (x)	+∞ ↘	1

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $F_n(x) = \int_x^{x+n} f(t)dt$; $x > 1$

a) $x \in]1$; $+\infty[$; on a $x \le t \le x + n$ et f est décroissante $\Rightarrow f(x+n) \le f(t) \le f(x) \Leftrightarrow$

$$\int_x^{x+n} f(x+n)dt \le \int_x^{x+n} f(t)dt \le \int_x^{x+n} f(x)dt \quad \Leftrightarrow$$

$$f(x+n)[t]_x^{x+n} \le F_n(x) \le f(x)[t]_x^{x+n} \Leftrightarrow$$

$nf(x+n) \le F_n(x) \le nf(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x+n) = n\times1 = n;\ \lim_{x\to+\infty} nf_n(x) = n\times1 = n \Rightarrow$

$\lim_{x\to+\infty} F_n(x) = n$

b) Soit $v(x) = e^x - 1 - x$; $\forall x > 0$; On a

$v'(x) = e^x - 1 > 0$; $\forall x > 0$.

Tableau de variations

x	0	+∞
v ' (x)	+	
v (x)	0 ↗	+∞

D'après le tableau de variations de v on a : $\forall x > 0$;

$v(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 + x$.

On pose $t = 1 + x \Leftrightarrow x = t - 1$

On a donc : $e^{t-1} > t \Rightarrow t - 1 > \ln t$;

$x > 0 \Rightarrow x + 1 > 1 \Leftrightarrow t > 1 \Leftrightarrow \ln t > 0$.

Donc : $t - 1 > \ln t > 0 \Leftrightarrow 0 < \ln t < t - 1$.

c) $\ln t < t - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\ln t} > \dfrac{1}{t-1} \Rightarrow$

$$e^{\frac{1}{\ln t}} > e^{\frac{1}{t-1}} > 1 + \frac{1}{t-1} \Rightarrow$$

$$\int_x^{x+n} e^{\frac{1}{\ln t}}dt > \int_x^{x+n}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt \Leftrightarrow$$

$$F_n(x) > [t + \ln(t-1)]_x^{x+n} \Leftrightarrow$$

$$F_n(x) > x + n + \ln(x+n-1) - x - \ln(x-1) \Leftrightarrow$$

$$F_n(x) > n + \ln\left(\frac{x+n-1}{x-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$F_n(x) - n > \ln\left(\frac{x+n-1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to1^+} \ln\left(\frac{x+n-1}{x-1}\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to1^+} F_n(x) = +\infty$$

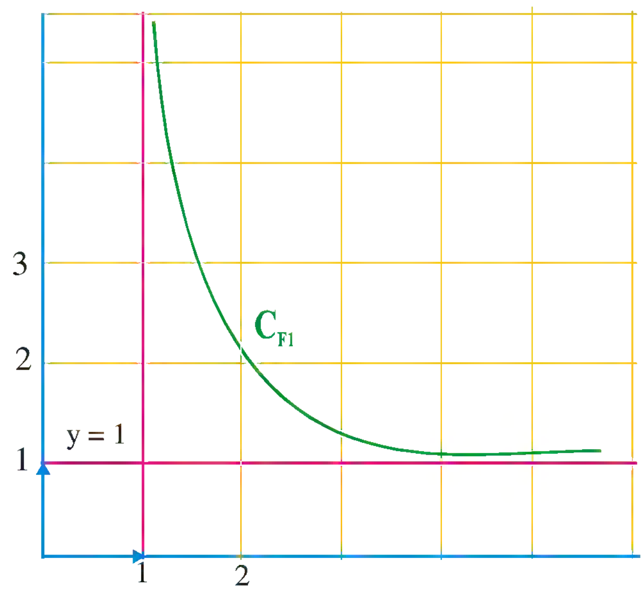
d) $F'_n(x) = f(x+n) - f(x) < 0$

- Tableau de variations

x	1	+∞
$F'_n(x)$	-	
$F_n(x)$	+∞ ↘	n

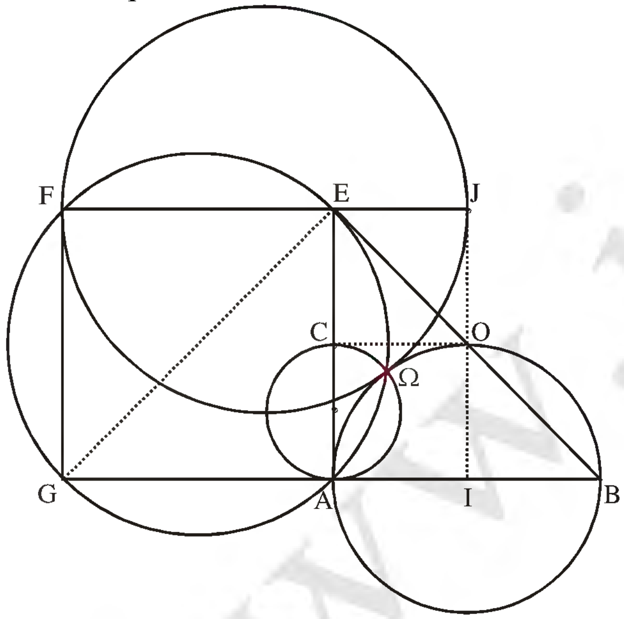
e) Une allure de F_1

Voir représentation ci-dessous.



Exercice 5

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



b) $\begin{cases} AE = BA \neq 0 \\ \overrightarrow{AE} \neq \overrightarrow{BA} \end{cases}$ Donc il existe une unique rotation r telle que : r(A) = B et r(E) = A.

c) L'angle de r est α telle que :

$\alpha = (\overrightarrow{AE} ~;~ \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AE} ~;~ \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

Le centre de r est le point d'intersection des médiatrices des segments [AB] et [AE] c'est-à-dire le point O.

d) r(I) est le symétrique de C par rapport à O et r(J) = C .

2.a) C ≠ A et A ≠ B, donc il existe une unique similitude directe S qui transforme C en A et A en B.

b) L'angle de S est : $(\overrightarrow{CA} ~;~ \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

Le rapport de S est : $\frac{AB}{CA} = 2$.

c) E est le symétrique de A par rapport à C, alors S(E) est le symétrique de S(A) par rapport à S(C), c'est-à-dire S (E) est le symétrique de B par rapport à A donc S (E) = G.

L'image du carré (COJE) est le carré (AEFG).

3.a) D'après les données on a :

- S(E) = G $\Rightarrow (\overrightarrow{\Omega E} ~;~ \overrightarrow{\Omega G}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow$ Ω appartient au $\mathscr{C}_{[EG]}$
- S (C) = A $\Rightarrow (\overrightarrow{\Omega C} ~;~ \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow$ Ω appartient au $\mathscr{C}_{[CA]}$.
- S (A) = B $\Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A} ~;~ \overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow$ Ω appartient au $\mathscr{C}_{[AB]}$.
- S (J) = F $\Rightarrow (\overrightarrow{\Omega J} ~;~ \overrightarrow{\Omega F}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow$ Ω appartient au $\mathscr{C}_{[JF]}$.

b) $S \circ S = h_{(\Omega\,;\,-4)} \Rightarrow S \circ S(C) = S(A) = B \Rightarrow$

$h(C) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} = -4\overrightarrow{\Omega C} \Rightarrow \Omega \in (BC)$.

Les points B ; C et F sont alignés ⇒ B ; Ω et F sont alignés.

Soit I'= [F*J] ; on a (AB) ∥ (FJ). Soit h_1 une homothétie de centre Ω qui transforme B en F alors :

h_1 (A) = J, car $\overrightarrow{\Omega F} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{FJ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$.

C'est –à-dire $\frac{\overline{\Omega F}}{\overline{\Omega B}} = \frac{\overline{FJ}}{\overline{BA}} = k$ (k rapport de h_1).

Donc h_1 transforme le cercle de diamètre [AB] en le cercle de diamètre [JF], alors h_1 (I) =I' ⇒

I ; Ω et I' sont alignés et puisque Ω appartient au $\mathscr{C}_{[JF]}$ alors $\mathscr{C}_{[AB]}$ et $\mathscr{C}_{[JF]}$ sont tangents en Ω .

4.a) L'image de Γ par S est le cercle de centre S(A) et passant par S(Ω) c'est-à-dire le cercle de centre B et passant par Ω.

Donc S (Γ) =Γ'.

- $(\overrightarrow{DA} ~;~ \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{DA} ~;~ \overrightarrow{D\Omega}) + (\overrightarrow{D\Omega} ~;~ \overrightarrow{DB})(\pi)$

  $(\overrightarrow{DA} ~;~ \overrightarrow{D\Omega}) = (\overrightarrow{\Omega D} ~;~ \overrightarrow{\Omega A})$ (car le triangle ΩAD est isocèle en A).

  $(\overrightarrow{D\Omega} ~;~ \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{\Omega B} ~;~ \overrightarrow{\Omega D})$ (car le triangle ΩDB est isocèle en B). Donc :

- $(\overrightarrow{DA}\ ;\ \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{\Omega D}\ ;\ \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega B}\ ;\ \overrightarrow{\Omega D})(\pi)$

$$= (\overrightarrow{\Omega B}\ ;\ \overrightarrow{\Omega A})(\pi)$$
$$= -\frac{\pi}{2}(\pi)$$
$$= \frac{\pi}{2}(\pi)$$
$$= (\overrightarrow{\Omega A}\ ;\ \overrightarrow{\Omega B})(\pi) \Rightarrow$$

Les points Ω; A ; B et D sont cocycliques.

b) $M \in \Gamma$ et M' = S(M) .

On a :

$$(\overrightarrow{DM}\ ;\ \overrightarrow{DM'}) = (\overrightarrow{DM}\ ;\ \overrightarrow{D\Omega}) + (\overrightarrow{D\Omega}\ ;\ \overrightarrow{DM'})(\pi)$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{A\Omega}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{B\Omega}\ ;\ \overrightarrow{BM'})(\pi)$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{A\Omega}) + (\overrightarrow{B\Omega}\ ;\ \overrightarrow{BM'})\right](\pi)$$

$$S : \begin{cases} A \to B \\ \Omega \to \Omega \\ M \to M' \end{cases} \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega B}\ ;\ \overrightarrow{BM'}) = (\overrightarrow{\Omega A}\ ;\ \overrightarrow{AM}) \Rightarrow$$

$$(\overrightarrow{DM}\ ;\ \overrightarrow{DM'}) = \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{A\Omega}) + (\overrightarrow{A\Omega}\ ;\ \overrightarrow{AM})\right](\pi)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{DM}\ ;\ \overrightarrow{DM'}) = 0(\pi) \Rightarrow$$

D ; M et M' sont alignés.

Sujet 2008 /Séries C & TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

1.a) $P(2i) = -8i + 4(4+8i) - 32i - 40 + 24 + 8i$
$= -8i + 16 + 32i - 32i - 16 + 8i = 0.$

b) A l'aide du tableau suivant on détermine les coefficients cherchés :

	1	-4-8i	-16+20i	24+8i
2i		2i	-8i +12	-8i -24
	1	-4 - 6i	-4 +12i	0

Donc : $\alpha = 4 - 6i$; $\beta = -4 + 12i$.

$P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z - 2i = 0 \Rightarrow Z = 2i$

ou $Z^2 - (4 + 6i)Z - 4 + 12i = 0$.

$\Delta = (4 + 6i)^2 - 4(-4 + 12i) = 16 + 48i - 36 + 16 - 48$

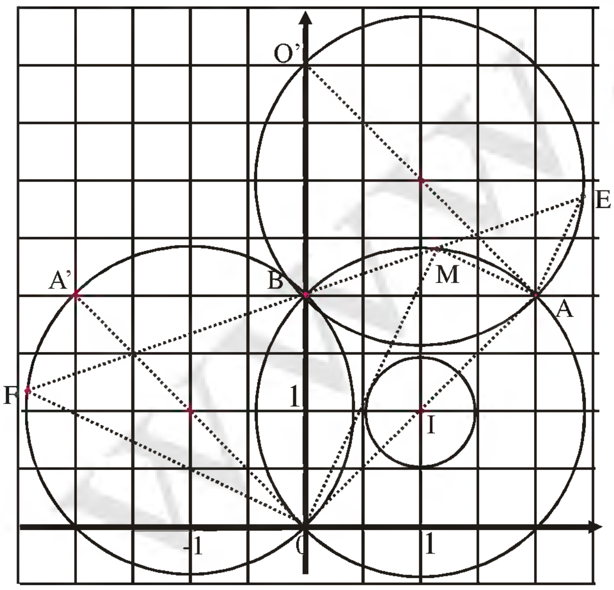
$\Delta = -4 = (2i)^2 \Rightarrow$

$$Z = \frac{4+6i+2i}{2} = 2+4i \text{ ;ou } Z = \frac{4+6i-2i}{2} = 2+2i \cdot$$

Donc les solutions sont $S = \{2i ; 2+ 4i ; 2+ 2i\}$.

2.a) Avec I milieu de [OA] on a :

$$\begin{cases} IM = \dfrac{OA}{2} \\ Z_I = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i \qquad \Rightarrow |m-1-i| = \sqrt{2} \\ OA = \dfrac{|2+2i|}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$



b) On a la rotation :

- de centre A , d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ transforme M en E,
- de centre O , d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme M en F,

Donc : $e - 2 - 2i = e^{-i\frac{\pi}{2}}(m - 2 - 2i) = -i(m - 2 - 2i)$

$e - 2 - 2i = -im + 2i - 2 \Rightarrow$

- $e = -im + 2i - 2 + 2 + 2i \Rightarrow e = -im + 4i$.
- $f = e^{i\frac{\pi}{2}}m = im \Rightarrow f = im$.
- $g = \dfrac{Z_0 + Z_A + Z_M}{3} = \dfrac{0+2+2i+m}{3} \Rightarrow$

  $g = \dfrac{1}{3}m + \dfrac{2+2i}{3}$.

c) Comme : $e + f = \dfrac{4i}{2} = 2i = Z_B \Rightarrow H = B$, Or

$|Z_B - 1 - i| = |2i - 1 - i| = |-1 + i| = \sqrt{2} \Rightarrow$

$B \in \Gamma$ donc H est un point fixe de Γ indépendant de la position du point M sur Γ.

d) Les lieux géométriques demandés :

- celui de E est le cercle image de Γ par la rotation de centre A d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$,
- celui de F est le cercle image de Γ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ de diamètre respectifs [AO'] et [OA'] tel que AOO' est isocèle rectangle indirect en A. OAA' est isocèle rectangle direct en O.
- celui de G est le cercle image de Γ par l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{3}$ et de centre le point d'affixe $\dfrac{\frac{2+2i}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1+i$ qui est I centre de Γ

  Donc Le lieu géométrique de G est le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{1}{3}$ IA.

e) Comme $B \in (EF)$ et $B \in \Gamma$ on a (EF)) est tangente à $\Gamma \Leftrightarrow E \neq F$ et $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{IB}$, Or $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow \dfrac{f-e}{1+i-2i} \in i\mathbb{R}$ Or

$$\frac{f-e}{1+i-2i} = \frac{2im-4i}{1-i} = \frac{2(im-2i)(1+i)}{2} =$$

$(im - 2i)(1+i) = (i(x+iy) - 2i)(1+i)$ où $M(x;y)$

$$\frac{f-e}{1+i-2i} = (ix - y - 2i)(1+i)$$

Donc $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow -x - y + 2 = 0$ c'est –à-dire

y = -x +2, Or la droite d'équation y = -x + 2 coupe Γ en deux points : B et le point d'affixe 2 Or pour M d'affixe 2 on a : E = F = B.
Donc B est la position de M pour laquelle le droite (EF) est tangente au cercle Γ d'où
e = -i(2i) + 4 i = 2 + 4i.

Exercice 2

1.a) Avec x = tant ; t∈[0 ; $\frac{\pi}{2}$ [; on a :

x = 0 ⇔t ant = 0 ⇔ t =0 ;

x = 1 ⇔ t ant = 1 ⇔ t =$\frac{\pi}{4}$⇒

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}(1+\tan^2 t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = 1(\frac{\pi}{4}-0) = \frac{\pi}{4}$$

b) ∀x ∈[0 ; 1] : $\frac{1}{1+x^2} > 0$ et $\frac{x^{2n}}{1+x^2} \geq 0 \Rightarrow I_0 \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \geq 0$. Puis ∀x ∈[0 ; 1] :
$x^{2n+2} \leq x^{2n} \leq 1$ d'où ∀x ∈[0 ; 1] :

$\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$:
$U_{n+1} \leq U_n \leq U_0$ D'où (U_n) est positive et décroissante donc (U_n) est convergente (car elle est minorée et décroissante).

c) $$U_{n+1} + U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}+x^{2n}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2+1)}{1+x^2}dx = \int_0^1 x^{2n}dx = \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

- 0→n : $U_1 + U_0 = 1 \Rightarrow U_1 = 1 - U_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$
- 1→n : $U_2 + U_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$

  $U_2 = 1 - U_0 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{-2}{3} + \frac{\pi}{4}$.

d) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \geq 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$:
$U_{n+1} + U_n \geq U_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1} \Rightarrow$
$\lim\limits_{x\to\infty} U_n = 0$, D'après le théorème des gendarmes.

2.a) $V_0 = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx$; On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \Rightarrow u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \\ V'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x \end{cases}$$

$V_0 = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2U_1$.

$\forall n \geq 1$; $V_n = \int_0^1 (2n+1)x^{2n}\ln(1+x^2)dx$; On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \Rightarrow u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \\ V'(x) = (2n+1)x^{2n} \Rightarrow v(x) = x^{2n+1} \end{cases}$$

$V_n = \left[x^{2n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2U_{n+1}$.

b) $$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = V_0 = \ln 2 - 2U_1 = \ln 2 - 2(1-\frac{\pi}{4}) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

c) Comme (U_n) est décroissante et
$V_n = \ln 2 - 2U_{n+1}$, alors (V_n) est croissante.
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(\ln 2 - 2U_{n+1}) = \ln 2 - 2(0) = \ln 2$.

Exercice 3

1) Etude de f

- $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0 ; +\infty[$
- Limites aux bornes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

- Dérivée et sens de variations

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$. Soit f'(x) = 0

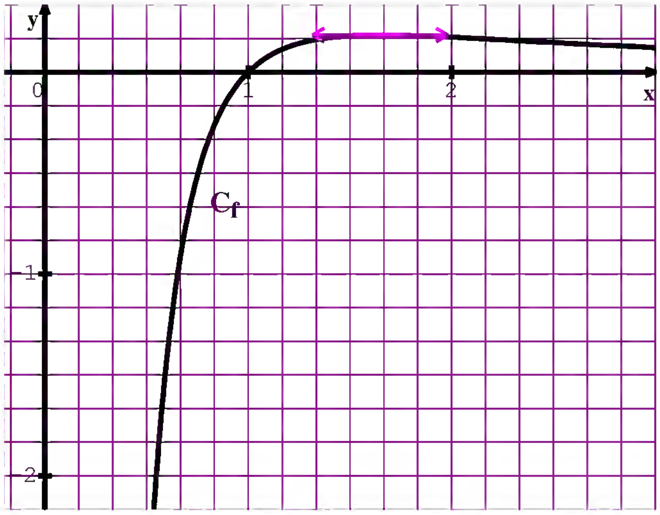
$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$; $f(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$

$0 < x < e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) > 0$; $x > e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) < 0$.

- Tableau de variations

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		+∞
f' (x)		+	0	-	
f (x)	-∞	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

- Représentation graphique de f



2.a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f_k(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = \begin{vmatrix} 0 & ;\text{ si } k=0 \\ -\infty & ;\text{ si } k \in]0;1] \end{vmatrix}$

On a les cas suivant :

Si	alors
$k = 0$	$C_k = C_f$ a 2 asymptotes $x = 0$ et $y = 0$
$k \in]0;1]$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_k(x)}{x} = 0$; C_k a une seule asymptotes $x = 0$

b) $\varphi_k(x) = -kx^3 - 2\ln x$;

$\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi_k(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_k(x) = -\infty$

$\varphi'_k(x) = -3kx^2 - \frac{2}{x} < 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $\forall k \in [0;1]$

x	0	α_k	$+\infty$
f' (x)	+		-
f (x)	$+\infty$	0	$-\infty$

D'après le T.V de φ_k et sa continuité sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $1 - kx^3 - 2\ln x = 0$ admet une solution unique α_k, Or $\varphi_k(1) = 1 - k \geq 0$ et $\varphi_k(\sqrt{e}) \leq 0$ d'où $1 \leq \alpha_k \leq \sqrt{e}$.

c) $f'_k(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3} - k = \frac{\varphi_k(x)}{x^3}$ a le même signe de $1 - kx^3 - 2\ln x$ d'où le T.V de f_k / $k \neq 0$

x	0	α_k	$+\infty$
$f'_k(x)$	+	0	-
$f_k(x)$	$-\infty$	$f_k(\alpha_k)$	$-\infty$

3.a) $0 \leq k \leq k' \leq 1$ alors : $-k' < -k$; d'où $-k'x < -kx$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow f_{k'}(x) < f_k(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ alors on en déduit :

x	0	$+\infty$
P. relative	$C_k / C_{k'}$	

b) $C_0 = (E)$; $C_{0,2} = (F)$; $C_{0,8} = (I)$.

4) $M_k(x; y)$ avec $x = \alpha_k$ et

$y = f_k(\alpha_k) = \frac{\ln \alpha_k}{\alpha_k^2} - k\alpha_k$; Or $1 - k\alpha_k^3 - 2\ln\alpha_k = 0$

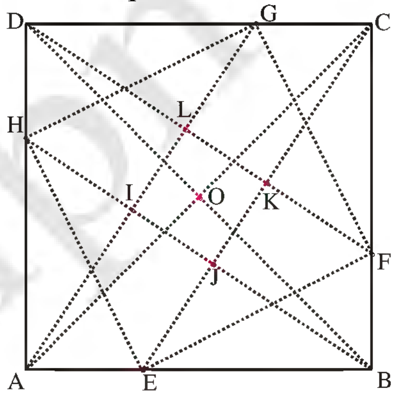
alors $k = \frac{1-2\ln\alpha_k}{\alpha_k^3}$ $\Rightarrow$

$y = \frac{\ln\alpha_k}{\alpha_k^2} - \frac{1-2\ln\alpha_k}{\alpha_k^2} = \frac{3\ln\alpha_k - 1}{\alpha_k^2} = \frac{3\ln x - 1}{x^2}$

Donc l'équation cartésienne de (Γ) est $y = \frac{3\ln x - 1}{x^2}$.

Exercice 4

1) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



2.a) Comme $\begin{cases} AE = \frac{1}{3}AB \ ;\ BF = \frac{1}{3}BC \\ AB = BC \end{cases}$

D'où AE = BF ; Or $\overrightarrow{AE} \neq \overrightarrow{BF}$ donc il existe une rotation unique r telle que : $\begin{cases} A \mapsto B \\ E \mapsto F \end{cases}$

b) L'angle de r est : $(\overrightarrow{AE}\ ; \overrightarrow{BF}) = (\overrightarrow{AB}\ ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

Or avec O le centre de ABCD on a : OA = OB et $(\overrightarrow{OA}\ ; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$ donc O est le centre de r.

c) On a r : $\begin{vmatrix} A \mapsto B \\ B \mapsto C \\ C \mapsto D \\ D \mapsto A \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} E = \text{bar}\{(A\ ;\ 2);(B\ ;\ 1)\} \\ F = \text{bar}\{(B\ ;\ 2);(C\ ;\ 1)\} \\ G = \text{bar}\{(C\ ;\ 2);(D\ ;\ 1)\} \\ H = \text{bar}\{(D\ ;\ 2);(A\ ;\ 1)\} \end{vmatrix}$

$$r:\left|\begin{array}{l}F\mapsto G\\G\mapsto H\\H\mapsto E\end{array}\right. \Rightarrow$$ les triangles OEF ; OGH ; OHE sont des triangles isocèles rectangles en O, d'où EFGH est un carré. L'aire de EFGH est :

$$EF^2 = BE^2 + BF^2 = (\frac{2}{3}a^2)+(\frac{1}{3}a^2)=\frac{5}{9}a^2$$

3.a) Comme $r:\left|\begin{array}{l}O\mapsto O\\A\mapsto B\\E\mapsto F\end{array}\right. \Rightarrow (\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OF})=(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OE})$;

$$\frac{OF}{OB}=\frac{OE}{OA}.$$

Donc S(B) = F ; Or ABCD et EFGH sont des carrés directs d'où S(C) = G et S(D) = H.

b) On a : S : ABCD →EFGH Donc le carré du rapport de S est : $\dfrac{\text{aire(EFGH)}}{\text{aire(ABCD)}}=\dfrac{\frac{5}{9}a^2}{a^2}=\dfrac{5}{9}$ d'où

Le rapport de S est : $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

c) Comme $S:\left|\begin{array}{l}A\mapsto E\\B\mapsto F\end{array}\right.$ donc l'angle de S est $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{EF})=(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{EF})$; Or le triangle EBF est rectangle en B d'où $\cos\alpha=\dfrac{BF}{EF}=\dfrac{\frac{2}{3}a}{\frac{\sqrt{5}}{3}a}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

4.) Comme $r:\left\|\begin{array}{l}[AG]\mapsto[BH]\ ;[CE]\mapsto[DF]\\ [BH]\mapsto[CE]\ \ ;[DF]\mapsto AG\end{array}\right.$

Donc par conservation du centre

$r:\left|\begin{array}{l}I\mapsto J\quad ;\ K\mapsto L\\J\mapsto K\ \ ;\ \ L\mapsto I\end{array}\right.$ d'où IJKL est un carré.

b) Soit M = bar {(D ; 4) ; (F ; 9} On a :M ∈(DF); Or, M = bar {(D ; 4) ; (B ; 6); (C; 3)}
= bar{(A ; 4) ; (B ; -4); (C; 4); (B ; 6); (C; 3)}
= bar {(A ; 4) ; (B ; 2); (C; 7)}
= bar {(E ; 6) ; (C ; 7}.

c) On a : $\overrightarrow{CK}=\dfrac{6}{13}\overrightarrow{CE}$ Or, r^{-1} conserve le barycentre d'où J = bar{(C ; 4) ; (E ; 9}, alors

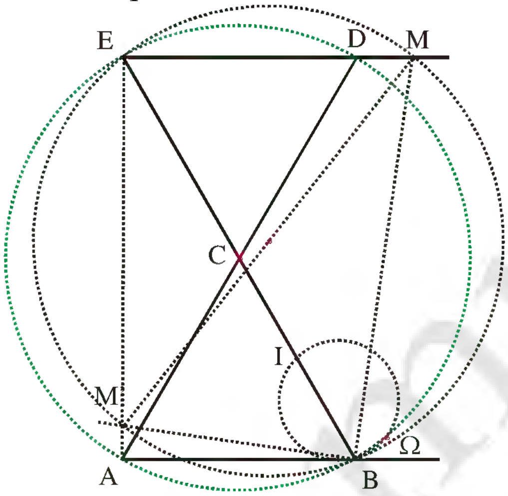
$\overrightarrow{CJ}=\dfrac{9}{13}\overrightarrow{CE}\Rightarrow\overrightarrow{KJ}=\dfrac{3}{13}\overrightarrow{CE}\Rightarrow KJ=\dfrac{3}{13}CE.$

Or l'aire de IJKL est KJ^2 où

$KJ^2=\dfrac{9}{169}CE^2=\dfrac{9}{169}(\dfrac{4a^2}{9}+a^2)$. Donc l'aire de IJKL est $\dfrac{a^2}{13}$

Exercice 5

1) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



2.a) Comme : $\left|\begin{array}{l}B\neq D\\B\neq A\end{array}\right.$ Donc∃!similitude S_1 de centre B qui transforme D en A.

b) L'angle de S est $(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BA})$ Or les segments [AD]et [BE] ont le même milieu et ont la même longueur (2a) donc ABDE est un rectangle direct d'où $(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BA})=\dfrac{\pi}{2}$ donc l'angle de S_1 est $\dfrac{\pi}{2}$.

Le rapport de S_1 est

$$\frac{BA}{BD}=\frac{a}{\sqrt{(2a)^2-a^2}}=\frac{a}{\sqrt{3a^2}}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

c) Comme $S_1\left|\begin{array}{l}D\mapsto A\\ \text{L'angle de } S_1 \text{ est } \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$ d'où l'image de la droite (DE) est la perpendiculaire à (DE) passant par A qui est la droite (AE).

Donc : le lieu géométrique de M' est la droite (AE) privée des points A et E' = S_1(E) ; M' est le point d'intersection de (AE) avec la perpendiculaire à (BM) en B.

Comme les triangles BMM' et EMM' sont rectangles de même hypoténuse [MM'] donc les points M' ; M ; B ; E sont cocycliques.

3.a) L'angle de S_2 est :

$$(\overrightarrow{IE}\ ;\ \overrightarrow{BD})=(\overrightarrow{BE}\ ;\ \overrightarrow{BD})=(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BD})$$
$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{6}$$

Le rapport de S_2 est : $\dfrac{BD}{IE}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\frac{3}{2}a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

.

b) Comme : $\left| \begin{array}{l} S_2(I) = B \;; (\overrightarrow{AI}\;;\;\overrightarrow{AB}) = -\dfrac{\pi}{6} \\ \text{et } \dfrac{AB}{AI} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ S_2(E) = D \;; (\overrightarrow{AE}\;;\;\overrightarrow{AD}) = -\dfrac{\pi}{6} \\ \text{et } \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{2a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$

Donc le centre de S_2 est A.

4.a) Comme f est une composée de deux similitudes donc f est une similitude, son angle est la somme des angles : $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$; son rapport est le produit des rapports : $\frac{1}{\sqrt{3}} \times (\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{2}{3}$.

b) On a : $f(E) = S_1 o S_2(E) = S_1(D) = A \Rightarrow$ avec Ω centre de f , on a : $(\overrightarrow{\Omega E}\;;\;\overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{3}$; Or

$(\overrightarrow{DE}\;;\;\overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{3}$ d'où $(\overrightarrow{\Omega E}\;;\;\overrightarrow{\Omega A}) = (\overrightarrow{DE}\;;\;\overrightarrow{DA})$

Donc les points Ω ; E; A ; D sont cocycliques d'où Ω appartient au cercle de diamètre [AD] qui est le cercle de diamètre [BE].

On a : $f(I) = S_1 o S_2(I) = S_1(B) = B \Rightarrow$

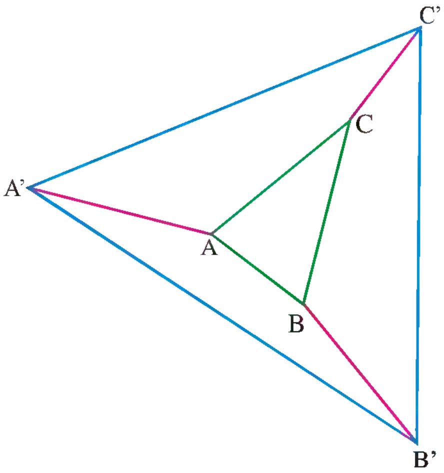
$(\overrightarrow{\Omega I}\;;\;\overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{3}$ Or; $(\overrightarrow{BI}\;;\;\overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$ d'où

$(\overrightarrow{\Omega I}\;;\;\overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{BI}\;;\;\overrightarrow{BA})$ donc Γ est le cercle passant par I et B et tangent à la droite (AB) en B.

Sujet 2007 / Séries : C & TMGM / Session normale

Exercice 1

A. **Méthode 1** : Utilisation des nombres complexes



a) On a : AA' = BC et $(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AA'}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ces deux égalités se traduisent par :

$$\begin{cases} \arg\frac{a'-a}{b-c} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ |c-b| = |a'-a| \end{cases} \text{ d'où } \frac{a'-a}{b-c} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

D'où : $a' - a = i(c-b)$ donc $a' = a - b + ic$.

b) De meme on peut écrire :

$b' - b = i(a-c)$ d'où et $c' - c = i(b-a)$

c) Soit G le centre gravité de ABC, g son affixe , il est définit par :

$$g = \frac{a+b+c}{3}.$$

On a : $g' = \frac{a'+b'+c'}{3}$ est l'affixe du centre de gravité de A'B'C'.

$$\text{Or, } \frac{a-ib+ic+b+ia-ic+c+ib-ia}{3}$$

$$= \frac{a-ib+ic+b+ia-ic+c+ib-ia}{3}$$

$$= \frac{a+b+c}{3} = g$$

D'où ABC et A'B'C' ont même centre de gravité G.

1. **Méthode** 2 : Utilisation d'une rotation vectorielle :

a) On a $\begin{cases} (\overrightarrow{AA'}\,;\,\overrightarrow{BC}) = \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] \\ AA' = BC \end{cases} \Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{BC}$

De même on remarque que :

$\varphi(\overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{CA}$ et $\varphi(\overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AB}$.

D'après les proporiétés de φ on a :

$$\varphi(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}) = \varphi(\overrightarrow{AA'})+\varphi(\overrightarrow{BB'})+\varphi(\overrightarrow{CC'})$$

$$= \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

b) De la question précédente on a :

$$\varphi(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

d'où en introduisant G :

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GC'} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$$

c) Il résulte que G' est aussi le centre de gravité de A'B'C'.

B. Méthode 1 : Utilisation des nombres complexes

a) On a : $\frac{c-b'}{c-a'} = \frac{c-ia-b+ic}{c-a+ib-ic}$

$$= \frac{-ia-b+(i+1)c}{-a+ib+(1-i)c}$$

$$= \frac{i(-a+ib+(1-i)c)}{(-a+ib+(1-i)c)}$$

d'où $\frac{c-b'}{c-a'} = i$. Il en découle que :

$$\arg\frac{c-b'}{c-a'} = \arg i = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ et } |c-b'| = |c-a'| \Leftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{CA'}\ ;\ \overrightarrow{CB'}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et } CA' = CB'$$

Donc le triangle A'B'C est rectagle isocèle en C.

b) Comme : $\frac{a-c'}{a-b'} = i = \frac{b-a'}{b-c'}$;

On en déduit que les triangles AB'C' et A'BC' sont respectivement rectangleset isocèles en A et B.

2. **B. Méthode 2** : Utilisation d'une rotation vectorielle

a) On a $\varphi(\overrightarrow{CB'}) = \varphi(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB'}) = \varphi(\overrightarrow{CB})+\varphi(\overrightarrow{BB'})$

$$= \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{CA}$$

d'où $\varphi(\overrightarrow{CB'}) = \overrightarrow{CA'}$.

Il résulte que :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{CA'} ; \overrightarrow{CB'}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \\ CA' = CB' \end{cases} \text{c'est} - \text{à dire que}$$

$A'CB'$ est un triangle direct rectangle et isocèle en C.

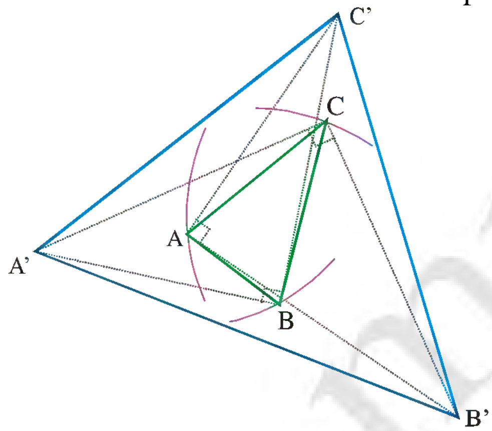
b) par analogie avec le résultat précédent on trouve que: $\varphi(\overrightarrow{BA'}) = \overrightarrow{BC'}$ et $\varphi(\overrightarrow{AC'}) = \overrightarrow{AB'}$

et par conséquent les triangles BC'A' et AB'C' sont directs rectangles et isocèles respectivement en B et A.

3) Il suffit de procéder comme suit :

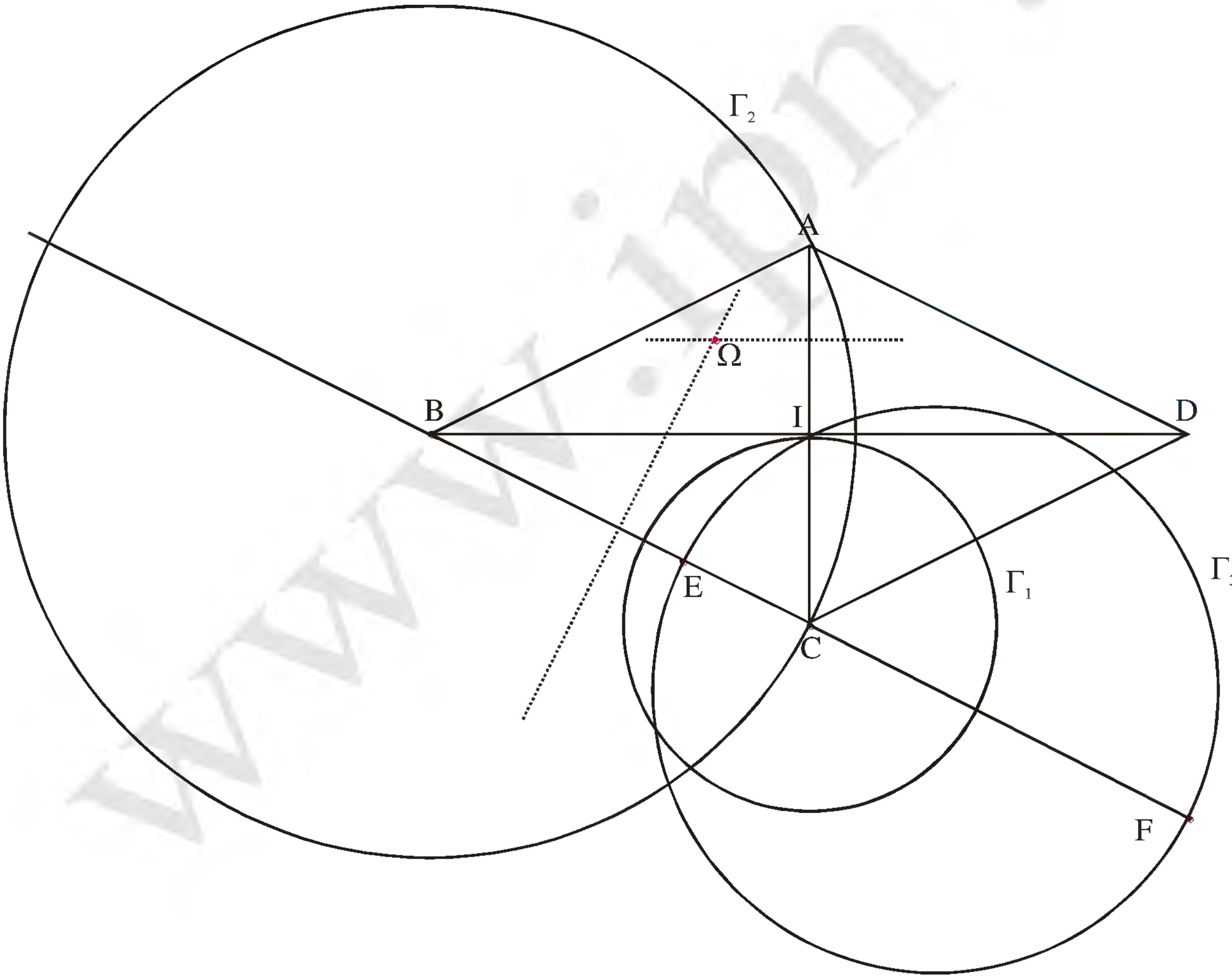
A partir d'un triangle A'B'C' construire le point A telque B'C'A est direct, rectangle et isocèle en A.

Cette construction est valable aussi pour B et C.



Exercice 2

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



b) E = bar {(B ; 1) ; (C ; 2)}$\Rightarrow$ $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

F= bar {(B ; 1) ; (C ; -2)}$\Rightarrow$ $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BC}$

d'où la construction de E et F (Voir figure précédente)

2. a) On a $\begin{cases} CI = a \\ BI = 2a \end{cases} \Rightarrow \frac{BI}{IC} = 2 \Rightarrow I \in \Gamma_3$;

D'autre part,

- $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0} \Rightarrow EB = 2EC \Rightarrow \frac{EB}{EC} = 2 \Rightarrow E \in \Gamma_3$;
- $\overrightarrow{FB}-2\overrightarrow{FC}=\vec{0} \Rightarrow FB = 2FC \Rightarrow \frac{FB}{FC} = 2 \Rightarrow F \in \Gamma_3$;

Donc les points I ; E et F appartiennent à Γ_3.

b) $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 2 \Leftrightarrow MB^2 - 4MC^2 = 0$; d'où

$(\overrightarrow{MB}$ - $2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB}$ + $2\overrightarrow{MC})$= 0 $\Leftrightarrow -\overrightarrow{MF}.3\overrightarrow{ME} = 0$.

Donc Γ_3 est le cercle de diamètre [EF].

3) On a CA = BI $\neq$ 0 et $\overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{AI}$ d'où l'existance d'une unique rotation r transformant C en B et A en I.

L'angle de r est déterminé par :

$(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{BI}) = (\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{ID}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Le centre Ω est le point de concours des médiatrices des segments [BC] et [AI].

4.a) On a CA $\neq$ 0 et BD $\neq$ 0 d'où l'existence d'une unique similitude S qui transforme C en B et A en D.

b) Etant donné la conservation du milieu d'un segment par une similitude on constate que :

S(I) = I (I milieu de [CA] et [BD]).

c) Eléments caractéristique de S :

- L'angle : $(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{ID}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$;
- Le rapport $\frac{BD}{CA} = \frac{BI}{CI} = 2$.

d) D'après les propriétés des similitudes on a :

$S(\Gamma_1) = \mathscr{C}_{[S(C) = B\ ;\ r = 2a]} = \Gamma_2$.

5) f = h o r est une similitude directe car c'est la composée d'une homothétie et d'une rotation.

En plus, nous avons

$\begin{cases} f(C) = h(r(C)) = h(B) = B = S(C) \\ f(A) = h(r(A)) = h(I) = D = S(A) \end{cases}$

Or, une similitude est déterminée par l'image de deux points d'où f est identique à S.

b) Il s'agit de déterminer h' et r' de même centre telle que :S = h'o r' = r'o h'.

Cette écriture est vérifiée pour h'l'homothétie de centre I et de rapport 2 tandis que r' est la rotation de même centre et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

6) Comme le rayon de Γ_1 est a celui de Γ_2 est 2a, donc le rapport k' de S' est égale à 2.

D'où toute les similitudes transformant Γ_1 en Γ_2 Ont même rapport k' = 2.

b) Soit S' une similitude de centre M vérifiant

$S'(\Gamma_1) = \Gamma_2 \Leftrightarrow$

$S'\begin{cases} C \to B \\ M \to M \end{cases} \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 2 \Leftrightarrow M \in \Gamma_3$.

D'où le lieu géométrique des centres des similitudes S' est Γ_3.

c) S' est une homothétie $\Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{MC}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = \pi(2\pi)$ ou $(\overrightarrow{MC}\ ;\ \overrightarrow{MB}) = 0\ (2\pi) \Leftrightarrow$

M = E ou M = F

et par conséquent si

- M = E ; h(C) = B $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{EB}$= $-2\overrightarrow{EC}$ d'ou le rapport de S' est -2;
- M = F; h(C) = B $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{FB}$= $2\overrightarrow{FC}$ d'ou le rapport de S' est 2.

Problème

Partie A

1.a) Calcul des limites

$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x}{x-1}\right| = 0^+ \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to +\infty}\left|\frac{x}{x-1}\right| = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$;

$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x}{x-1}\right| = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to -\infty}\left|\frac{x}{x-1}\right| = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

La courbe (C) admet trois asymptotes d'équations respectives x = 0 ; x= 1 et y = 0.

b) $f'(x) = \dfrac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{-1}{x(x-1)}$

c) Tableau de variations

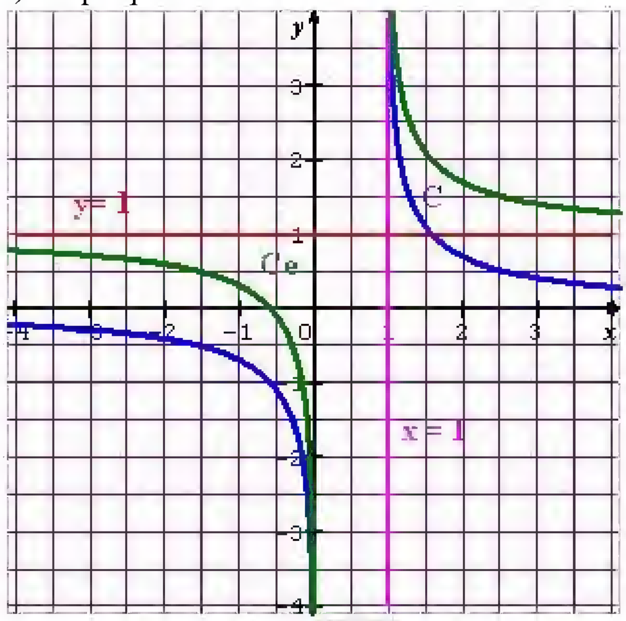
x	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
f '(x)	$-$	$+$	$-$
f (x)	$+\infty \searrow -\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow 0$

2.a) On a : $f(x) + f(1-x) =$

$$\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \ln\left|\frac{1-x}{-x}\right| = \ln\left|\frac{x}{x-1}\times\frac{1-x}{-x}\right| = \ln 1 = 0$$

Ce résultat veut dire que le point de coordonnées $(\frac{1}{2}\ ;0)$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

b) Graphique de f



3.a) On a $\begin{cases} x \neq 0 \Rightarrow 1-x \neq 1 \\ x \neq 1 \Rightarrow 1-x \neq 0 \end{cases}$; d'où

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\ ;\ 1\};(2\times\frac{1}{2} - x) \in \mathbb{R}\setminus\{0\ ;\ 1\}$$

et par conséquent on peut écrire

$$f_k(2\times\frac{1}{2} - x) = f_k(1-x) = \ln\left|\frac{k(1-x)}{-x}\right|$$

d'où $f_k(2\times\frac{1}{2} - x) = f_k(1-x).$

D'autre part :

$$2\ln|k| - \ln\left|\frac{kx}{x-1}\right| = 2\ln|k| - \ln|k| - \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

$$= \ln|k| + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = \ln\left|\frac{k(x-1)}{x}\right|.$$

d'où $f_k(2\times\frac{1}{2} - x) = 2\ln|k| - f_k(x).$

Donc le point $\Omega(\frac{1}{2}\ ;\ \ln|k|)$ est un centre de symétrie de C_k.

b) Soient $M(x;y) \in C$ et $M_k(x;y) \in C_k \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = f(x) \\ y_k = \ln k + f(x) \end{cases} \Leftrightarrow C_k = t_{\vec{u}_k\binom{0}{\ln|k|}}(C)$ d'où C_k

est l'image de C par la translation de vecteur $\vec{u}_k\begin{pmatrix}0\\ \ln|k|\end{pmatrix}$.

c) Comme $f_k(x) = f_{-k}(x)$ on en déduit que C_k et C_{-k} sont confondues.

d) On pose : $f_k(x) = f_{k'}(x)$ ce qui veut dire que :
$\ln|k| + f(x) = \ln|k'| + f(x) \Leftrightarrow \ln|k| = \ln|k'|$.
Alors, si $\ln|k| \neq \ln|k'|$ C_k et $C_{k'}$ n'ont pas de points communs.

e) Tableau de variations de $f_e(x)$

x	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
f '(x)	$-$	$+$	$-$
f (x)	$+\infty \searrow -\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow 1$

Voir la représentation précédente pour observer la courbe de C_e.

4) D'après le tableau de variations de f on constate que h est continue et strictement croissante sur]0 ; 1[vers]-∞ ; +∞[d'où h réalise une bijection :
h :]0 ; 1[→]-∞ ; +∞[.

b) On en déduit le tableau de variations de h à partir de celui de f :

x	$-\infty$ … $+\infty$
$(h^{-1})'(x)$	$+$
$(h^{-1})(x)$	$0 \nearrow 1$

Soit $y = (h)(x) \Leftrightarrow$

$$y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow (1-x)e^y = x \Leftrightarrow$$

$$(e^y+1)x = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y+1}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

c) $h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0$;

Soit $v(x) = h(x) - x$; cette fonction est dérivable sur $]0 ; 1[$ sa dérivée

$$v'(x) = h'(x) - 1 = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2} - 1$$

$$= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - 1$$

$$= \frac{(-e^{2x} + e^x + 1)}{(1+e^x)^2} < 0 \cdot$$

En plus $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} v(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} v(x) = +\infty \end{cases}$ donc v est continue et strictement décroissante et elle change de signe sur $]0 ;1[$ donc l'équation $v(x) = 0$ admet une unique solution $\propto$ de cet intervalle.

En plus on a : $\begin{cases} v(0,5) = -0,5 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} v(x) = +\infty \end{cases}$ d'où $0,5 < \alpha < 1$.

Partie B

1.a) On remarque que :

$\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) = h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ d'où

$h \circ g(x) = h(h^{-1}(x)) = x$.

Ce résultat veut dire simplement que g est la fonction réciproque de h.

b) Calcul de la dérivée de g :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ g'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2};$$

$$g'(x) = \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(1+e^x)}{(e^x+1)^2} - \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} - \left(\frac{e^x}{(e^x+1)}\right)^2;$$

Donc $g'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} - \left(\dfrac{e^x}{(e^x+1)}\right)^2$;

avec $a = 1$ et $b = -1$.

c) de la question b) on a :

$g'(x) = g(x) - g^2(x)$ en dérivant membre à membre : $g''(x) = g'(x) - 2\, g(x)\, g'(x)$.

2.) Calcul de I_1 où $I_1 = \int_0^\alpha g^n(t)dt$;

$$\int_0^\alpha g^n(t)dt = \int_0^\alpha \frac{e^t}{(e^t+1)}dt = \Big[\ln\left|e^t + 1\right|\Big]_0^\alpha$$

$$\int_0^\alpha g^n(t)dt = \Big[\ln\left|e^t + 1\right|\Big]_0^\alpha = \ln\left|e^\alpha + 1\right| - \ln 2$$

D'où $I_1 = \ln\left|\dfrac{e^\alpha + 1}{2}\right|$.

b) En utilisant 1. c) on a :

$g'(x) = g(x) - g^2(x) \Rightarrow$ pour tout $n \neq 0$

$g'(x)g^{n-1}(x) = g^n(x) - g^{n+1}(x)$ en intégrant membre à membre on trouve:

$$\int_0^\alpha g'(x)g^{n-1}(x)dx = \int_0^\alpha g(x)^n dx - \int_0^\alpha g^{n+1}(x)dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n}\Big[g(x)^n\Big]_0^\alpha = I_n - I_{n+1} \Rightarrow$$

$\dfrac{1}{n}\Big[g(\alpha)^n - g(0)^n\Big] = I_n - I_{n+1}$; Or $g(\alpha) = \alpha$

et $g(0) = \dfrac{1}{2}$;

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{2^n} - \alpha^n\right]$.

Remarque : On pourra utiliser une intégration par parties sur $I_{n+1} = \int_0^\alpha g^{n+1}(t)dt$ en posant

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)} \\ v'(t) = e^{nt} \end{cases}$$

c) On a $\dfrac{1}{2} \leq \alpha \Rightarrow \dfrac{1}{2^n} \leq \alpha^n \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$;

d'où (I_n) est décroisante.

Comme g est positive sur $[0 ; \alpha]$,

il en découle que $g^n(x)$ là aussi; ce qui justifie que:

$\int_0^\alpha g^n(x)dx \geq 0$ d'où $I_n \geq 0$.

Donc I_n est strictement décroissante et minorée d'où sa convergence.

3.a) Comme g est croissante sur $[0 ; \alpha]$ on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq t \leq \alpha \Rightarrow g(0) \leq g(t) \leq g(\alpha) \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2} \leq g(t) \leq \alpha \Rightarrow \dfrac{1}{2^n} \leq g(t)^n \leq \alpha^n$;

En intégrant on trouve :

$$\frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha \leq \int_0^\alpha g^n(t)dt \leq \alpha^{n+1} \Rightarrow \frac{\alpha}{2^n} \leq I_n \leq \alpha^{n+1}.$$

b) Il en résulte que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0 \cdot$

4.a) En utilisant la formule récurrente trouvée en 2.b) et en additionnant membre à membre on a :

$$I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2^{n-1}} - \alpha^{n-1}\right]$$

$$I_{n-1} - I_{n-21} = \frac{1}{n-2}\left[\frac{1}{2^{n-2}} - \alpha^{n-2}\right]$$

.... = ...

.... = ...

.... = ...

$$I_2 - I_1 \quad = \left[\frac{1}{2} - \alpha^1\right]$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$$I_n - I_1 = \sum_1^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$$

$$\forall n > 1\ ; I_n = I_1 + \sum_1^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^\alpha + 1}{2}\right) + \sum_1^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right);$$

Or $h(\alpha) = \alpha$ d'où $\alpha = \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Donc $I_1 = \ln\left(\frac{e^\alpha + 1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{\alpha}{1-\alpha} + 1}{2}\right)$

$$= \ln\left(\frac{\frac{1}{1-\alpha}}{2}\right) = \ln \frac{1}{2(1-\alpha)} = -\ln(2(1-\alpha)).$$

Ce qui rend $I_n = -\ln(2(1-\alpha)) + \sum_1^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right)$.

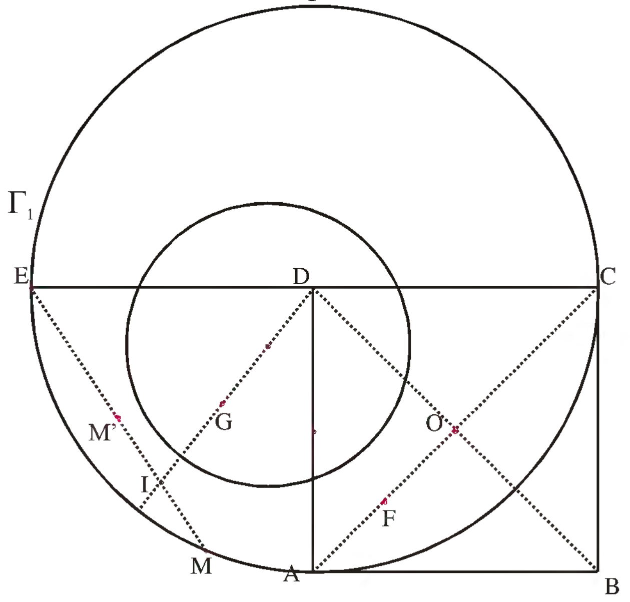
b) On en déduit clairement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_1^{n-1} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2^k} - \alpha^k\right) = \ln(2(1-\alpha)).$$

Sujet 2007 /Séries : C & TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

1.a) Détermination des points cherchés :



• $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = a \Leftrightarrow$

$\left\|\overrightarrow{MD}+\underbrace{\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}_{\vec{0}}\right\| = a \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MD}\right\| = a \Leftrightarrow MD = a \Leftrightarrow$

$M \in \mathscr{C}_{(D\,;\,a)} \Rightarrow \Gamma_1$ est le cercle de centre D passant par A.

• $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2 \Leftrightarrow$
$MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2 = a^2 \Leftrightarrow MD^2 = a^2 \Leftrightarrow$
$MD = a \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}_{(D\,;\,a)} \Leftrightarrow \Gamma_2 = \Gamma_1$.

• $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD})(2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = 0$
On a : C = bar {(A ; 1) ; (B ; 1) ; (D ;-1)} ;
E = bar {(D ; 2) ; (C ; -1) ; } ;
D = bar{(A ; 2) ; (B ; -2) ; (C ;2)} $\Rightarrow$
E = bar {(A ; 2) ; (B ; -2) ; (C ; 1)} $\Rightarrow$
$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MC}$
$2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{ME} \Rightarrow \quad M \in \Gamma_3 \quad \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow$ M appartient au cercle de diamètre [CE] $\Leftrightarrow M \in \mathscr{C}_{[D\,;\,A]} \Leftrightarrow \Gamma_3 = \Gamma_1$.

• $M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{ME}\right\| = \left\|\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right\|$; Or (AEBD) est un parallélogramme $\Rightarrow$
D = bar {(A ; 1) ; (B ; -1) ; (E ;-1)} $\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{ME} = -\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$.
$M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\| \Leftrightarrow MD = CD = a \Leftrightarrow$
$M \in \mathscr{C}_{[D\,;\,A]} \Leftrightarrow \Gamma_4 = \Gamma_1$.

b) On a : $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4$.

2) f_k : M $\rightarrow$M' / $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+(1-k)\overrightarrow{MC}$

a) f_k est une translation $\Leftrightarrow$ le vecteur $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+(1-k)\overrightarrow{MC}$ est constant c'est-à-dire la somme des coefficients associés à A ; B et C est nulle : 1 -1 +1 – k = 0 $\Leftrightarrow$ k = 1 ; Donc si k = 1 ; f_k est la translation de vecteurs $\overrightarrow{BA}$.

b) $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$; M est invariant par $f_k \Leftrightarrow$ M' = M $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+(1-k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Or il existe un unique point Ω_k tel que :
$\overrightarrow{\Omega_k A}-\overrightarrow{\Omega_k B}+(1-k)\overrightarrow{\Omega_k C} = \vec{0}$ où
$\Omega_k = \text{bar}\{(A;1);(B;-1);(C;1-k)\} \Rightarrow$
$M = \Omega_k = \text{bar}\{(A;1);(B;-1);(C;1-k)\}$

Donc f_k admet un unique point invariant Ω_k /
$\Omega_k = \text{bar}\{(A;1);(B;-1);(C;1-k)\}$.
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+(1-k)\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} = (1-1+1-k)\overrightarrow{M\Omega} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{\Omega M'} = (1-k)\overrightarrow{M\Omega}-\overrightarrow{M\Omega} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{M\Omega} \Leftrightarrow$
$M' = h_{(\Omega\,;\,k)}(M) \Rightarrow f_k$ est l'homothétie de centre Ω_k et de rapport k.

c) $\Omega_k = \text{bar}\{(A;1);(B;-1);(C;1-k)\} \Rightarrow$

$\overrightarrow{C\Omega_k} = \dfrac{1}{1-k}(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{C\Omega_k} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$

Ω_k apprtient à la droite passant par C et parallèle à (AB) $\Leftrightarrow \Omega_k \in$(CD).
Donc le lieu géomètrique des points Ω_k est la droite (CD) privée de C et D lorsque k décrit $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

d) $k = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \Omega_{\frac{1}{2}} = \text{bar}\left\{(A;1);(B;-1);(C;\dfrac{1}{2})\right\} \Rightarrow$
M' = $h_{(\Omega\,;\,\frac{1}{2})}(M)$.

$\overrightarrow{C\Omega_k} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BA} \Rightarrow \Omega_k = E.$

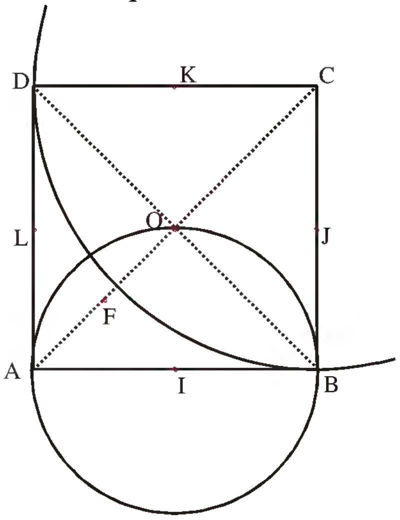
Soit I = [M*M'] ; $\overrightarrow{EM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EM} \Leftrightarrow \overrightarrow{EI} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{EM} \Leftrightarrow$

I = $h_{1(E\,;\,\frac{3}{4})}(M)$; Or $\overrightarrow{DG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DI} \Leftrightarrow G = h_{2(D\,;\,\frac{2}{3})}(I) \Rightarrow$

$G = h_2 \circ h_1(M)$. Le lieu géométrique des points G est donc un cercle de rayon $\frac{a}{2}$ image de Γ par $h_2 o\ h_1$ (Voir figure).

Exercice 2

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



b) $AI = \frac{a}{2}$; $OK = \frac{a}{2} \Rightarrow AI = OK$ et $\overrightarrow{AI} \neq \overrightarrow{OK} \Rightarrow$

Il existe une unique rotation r telle que : r(A) = O et r(I) = K.

c) $(\overrightarrow{AI}\ ;\overrightarrow{OK}) = (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ; \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$

d'où $\frac{\pi}{2}$ est un angle de r. Le centre de r est le point d'intersection des médiatrices des segments [AO] et [IK] c'est-à-dire le point $L \Rightarrow r_{(L;\frac{\pi}{2})}$.

2.a) $S_{(OJ)} \circ S_{(LI)} = r_{(L\ ;2(\overrightarrow{LI}\ ;\overrightarrow{OJ}\ ))} = r_{(L\ ;\frac{\pi}{2}\ )}$

$S_{(DA)} \circ S_{(LK)} = r_{(L\ ;2(\overrightarrow{LK};\ \overrightarrow{DA}\ ))} = r_{(L\ ;\frac{\pi}{2}\ )} \Rightarrow$

$S_{(OJ)} \circ S_{(LI)} = S_{(DA)} \circ S_{(LK)}$.

b) $g = S_{(OJ)}\ o\ S_{(LI)}\ o\ S_{(LK)} = r\ o\ S_{(LK)}$

$= S_{(DA)}\ o\ S_{(LK)}\ o\ S(LK)$

$= S_{(DA)} \Rightarrow$

g est la réflexion d'axe (DA).

3.a) $O \neq C$ et $I \neq B$ donc il existe une unique similitude directe S_1 telle que : $S_1(O) = I$ et $S_1(C) = B$.

b) Le rapport de S_1 est : $\frac{IB}{OC} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

L'angle de S_1 : $(\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AI}) = -\frac{\pi}{4}(2\pi)$

c) On a : $\begin{cases} \frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AI}) = -\frac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow$

A est le centre d'une similitude directe d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ qui transforme O en I ; cette similitude directe est S_1 donc A est le centre de S_1 c'est-à-dire $S_1(A) = A$.

4.a) Le rapport de S_2 : $\frac{OD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; l'angle de S_2 :

$(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OJ}\ ;\ \overrightarrow{OD}) = \frac{3\pi}{4}(2\pi)$.

b) $2(\overrightarrow{TB}\ ;\ \overrightarrow{TD}) = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow$

$(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = 2(\overrightarrow{TB}\ ;\ \overrightarrow{TD})(2\pi) \Rightarrow$

T appartient au cercle de centre C passant par B et D.

- $2(\overrightarrow{TA}\ ;\overrightarrow{TO}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{TA}\ ;\ \overrightarrow{IO}) = 2(\overrightarrow{TA}\ ;\ \overrightarrow{TO}) \Rightarrow$

T appartient au cercle de centre I passant par A et O c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

5) $h = S_2\ o S_1^{-1}$; $S_1(M) = M'$ et $S_2(M) = M''$.

a) h est la composée de deux similitudes directes dont le produit des deux rapports est 1 et la somme des deux angles est π d'où h est une symétrie centrale.

⇒ Le centre de h est le milieu du segment [AO] ; donc F est le milieu du segment [AO].

$h(M') = S_2\ o S_1^{-1}(M') = S_2(M) = M'' \Rightarrow$

$F = [M'*M'']$ et encore $F = [A*O] \Rightarrow$

Les diagonale [M'M''] et [AO] du quadrilatère AM'OM'' ont même milieu F, donc AM'OM'' est un parallélogramme.

b) On a : $h(I) = L \Leftrightarrow S_2\ o S_1^{-1}(I) = L \Leftrightarrow S_2(O) = L$.

c) $2(\overrightarrow{TA}\ ;\ \overrightarrow{TL}) = 2(\overrightarrow{TA}\ ;\ \overrightarrow{TO}) + 2(\overrightarrow{TO}\ ;\ \overrightarrow{TL})(2\pi)$

$= 2(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BO}) + 2 \times \frac{3\pi}{4}(2\pi)$

$= -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}(2\pi)$

- $2(\overrightarrow{FA}\ ;\ \overrightarrow{FL}) = \pi(2\pi) \Rightarrow 2(\overrightarrow{TA}\ ;\ \overrightarrow{TL}) = 2(\overrightarrow{FA}\ ;\ \overrightarrow{FL})(2\pi) \Rightarrow$

⇒ Les points A ; F ; T et L sont cocycliques.

6.a) Si $M = A \Rightarrow \begin{cases} M' = A \\ M'' = O \end{cases}$

- Si $M = F \Rightarrow \begin{cases} M' = B' = [A*I] \\ M'' = [O*L] \end{cases}$
- Si $M = T \Rightarrow \begin{cases} M' = S_F(T) \\ M'' = T \end{cases}$
- Si $M = L \Rightarrow \begin{cases} M' = F \\ M'' = F \end{cases}$

b) On a : $S_1(M) = M' \begin{cases} AM' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} AM \\ \text{et} \\ (\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM'}) = -\dfrac{\pi}{4}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow$

Le triangle AMM' est rectangle isocèle en M' :

$\text{Car} : MM'^2 = AM^2 + AM'^2 - 2AM.AM'\cos(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM'})$

$= AM^2 + \dfrac{1}{2}AM^2 - 2\dfrac{AM^2}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{1}{2}AM^2 \Rightarrow MM' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}AM \Rightarrow$

$MM' = AM'.$

$AM'^2 + MM'^2 = \dfrac{1}{2}AM^2 + \dfrac{1}{2}AM^2 = AM^2 \Rightarrow$

Le triangle AMM' est isocèle en M' et rectangle.

Donc $(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MA}) = -\dfrac{\pi}{4}(2\pi)$; D'autre part :

$(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MF}) = (\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MF})(\pi) \Rightarrow$

$(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MF}) = -\dfrac{\pi}{4} + (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MF})(\pi).$

c) M'; M''et F sont alignés car F = [M'*M'']; Donc M ; M' et M''sont alignés ⇔

$(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{MF}) = 0(\pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MF}) = \dfrac{\pi}{4}(\pi) \Leftrightarrow$

M appartient au cercle circonscrit au triangle (AFL) (Car $(\overrightarrow{LA}\ ;\ \overrightarrow{LF}) = \dfrac{\pi}{4}(\pi)$); c'est-à-dire le cercle de diamètre [AL].

Problème

Partie A

1.a) $f_1(x) = x - \ln x$

- $D_{f1} =]0\ ;+\infty[$
- Limite à droite de 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ est une (A.V)

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_1(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-\ln x) = -\infty \Rightarrow$

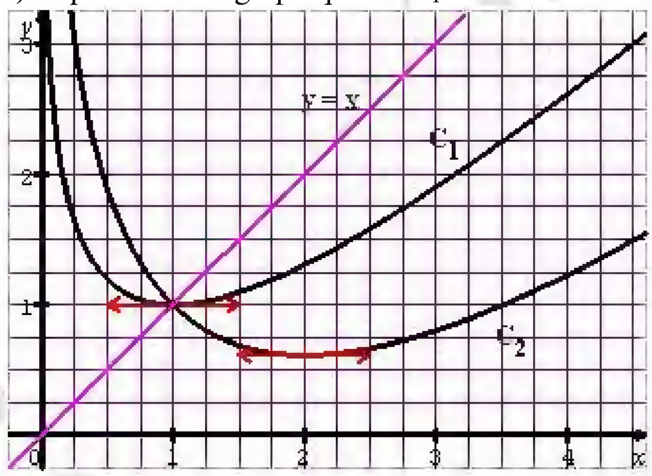
La courbe C_1 admet une branche parabolique de direction y = x au voisinage de +∞.

c) $f_1'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

- Tableau de variations

x	0		1		+∞
$f_1'(x)$		-	0	+	
$f_1(x)$	+∞	↘	1	↗	+∞

d) Représentation graphique de C_1



2.a) $f_n'(x) = 1 - \dfrac{n}{x} = \dfrac{x-n}{x}$

Tableau de variations

x	0		n		+∞
$f_n'(x)$		-	0	+	
$f_n(x)$	+∞	↘	n(1-lnn)	↗	+∞

b) M(x ; y) appartient à C_n et à C_{n+1} ⇔

$f_{n+1}(x) = f_n(x) \Leftrightarrow x - (n+1)\ln x = x - n\ln x \Leftrightarrow$

$(n + 1 - n)\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ d'où

$f_n(1) = 1$ donc le point (1 ; 1) est le seul point commun à toutes les courbes (C_n) .

$f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\ln x$

x	0		1		+∞
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		+	0	-	
P. relatibve		C_{n+1} / C_n	•	C_n / C_{n+1}	

c) Soit T_n la tangente à (C_n) en $x_0 = e$.

$T_n : y = f_n'(e)(x-e) + f_n(e) = \dfrac{e-n}{e}(x-e) + e - n \Leftrightarrow$

$y = \dfrac{e-n}{e}x - e + n + e - n \Leftrightarrow y = (\dfrac{e-n}{e})x \Rightarrow$

T_n passe par l'origine O du repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

3.a) $f_n(x) - f_0(x) = x - n\ln x - x = -n\ln x$

$= n(x - \ln x - x)$

$f_n(x) - f_0(x) = n(f_1(x) - f_0(x))$.

b) $\overrightarrow{M_0M_n} = (x-x)\vec{i} + (f_n(x) - f_0(x))\vec{j}$

$= (x-x)\vec{i} + n(f_1(x) - f_0(x))\vec{j}$

$= n((x-x)\vec{i} + (f_1(x) - f_0(x))\vec{j}) = n\overrightarrow{M_0M_1}$

$M_n = h_{(M_0;\, n)}(M_1)$ Donc à partir d'un point M_0 de C_0 et un point M_1 de C_1 on peut construire le point M_n de C_n comme étant l'image de M_1 par une homothétie de centre M_0 et de rapport n (Voir figure).

Partie B

1.a) $\forall x \in]0 ; +\infty[$; $f_1(x) \geq 1 \neq 0$ et $g(0) = 0 \Rightarrow$ $D_g = [0 ; +\infty[$.

b) Pour $x \in]0 ; +\infty[$; g représente le rapport de deux fonctions : $x \to x$ et $x \to f_1(x)$ qui sont continues sur $]0 ; +\infty[$ donc g est continue sur cet intervalle. En plus on a :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x - \ln x} = 0 = g(0) \Rightarrow$$

g est continue en $x_0 = 0$.

Conclusion : g est continue sur $]0 ; +\infty[$.

2.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x(1 - \frac{\ln x}{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(1 - \frac{\ln x}{x})} = 1$

D'où y = 1 est une (A.H) de C_g.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x - \ln x} = 0 \Rightarrow$ g est dérivable à droite de $x_0 = 0$ et la courbe (Cg) admet une demi-tangente horizontale en $x_0 = 0$.

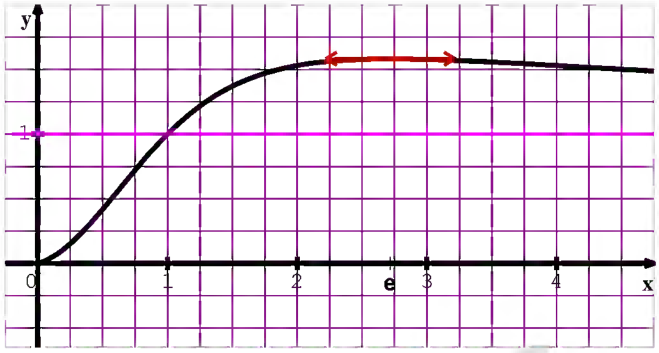
3.a) $g'(x) = \dfrac{x - \ln x - x(1 - \frac{1}{x})}{(x - \ln x)^2} \Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$

b) Tableau de variations

x	0		e		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	
g (x)	0	↗	$\frac{e}{e-1}$	↘	1

c) Représentation graphique de g

Voir représentation ci-contre :



4) $1 \leq x \leq e \Rightarrow 1 \leq g(x) \leq \dfrac{e}{e-1} \Leftrightarrow \dfrac{e-1}{e} \leq \dfrac{1}{g(x)} \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{e} \leq \dfrac{x - \ln x}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{e} \leq 1 - \dfrac{\ln x}{x} \leq 1 \Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{e} \leq -\dfrac{\ln x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{e}$.

5.a) $U_0 = \int_1^e dx = [x]_1^e = e - 1$

$U_1 = \int_1^e \dfrac{\ln x}{x} dx = \left[\dfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \dfrac{1}{2}$

b) $\forall x \in [1 ; e]$; $(\dfrac{\ln x}{x})^n \geq 0 \Rightarrow U_n \geq 0$

$U_{n+1} - U_n = \int_1^e (\dfrac{\ln x}{x})^n (\dfrac{\ln x}{x} - 1) dx$;

$\dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{e} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x} - 1 \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow$

- (U_n) est décroissante est décroissante et minorée par 0 ; alors (U_n) est convergente :

c) On a : $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{e} \Rightarrow 0 \leq \int_1^e (\dfrac{\ln x}{x})^n dx \leq \dfrac{1}{e^n} \int_1^e dx \Leftrightarrow$

$0 \leq U_n \leq \dfrac{e-1}{e^n}$; Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e-1}{e^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

6.a) $S_n = \int_1^e (1 + (\dfrac{\ln x}{x}) + (\dfrac{\ln x}{x})^2 + \cdots + (\dfrac{\ln x}{x})^n dx$

$\Leftrightarrow S_n = \int_1^e (\dfrac{1 - (\frac{\ln x}{x})^{n+1}}{1 - \frac{\ln x}{x}} dx$ (car c'est la S d'1 S.G)

b) $I - S_n = \int_1^e (\dfrac{x}{x - \ln x} - \dfrac{x - x(\frac{\ln x}{x})^{n+1}}{x - \ln x})dx = \int_1^e \dfrac{x(\frac{\ln x}{x})^{n+1}}{x - \ln x} dx$.

c) $1 \leq g(x) \leq \dfrac{e}{e-1}$ et $0 \leq (\dfrac{\ln x}{x})^{n+1} \leq \dfrac{1}{e^{n+1}} \Rightarrow$

$0 \leq g(x)(\dfrac{\ln x}{x})^{n+1} \leq \dfrac{1}{(e-1)e^n} \Rightarrow$

$0 \leq \int_1^e g(x)(\frac{\ln x}{x})^{n+1}dx \leq \frac{1}{(e-1)e^n}\int_1^e dx \Leftrightarrow$

$0 \leq I - S_n \leq \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{e^{n-1}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I$

d) $I - S_n \geq 0 \Leftrightarrow I \geq S_n \Leftrightarrow S_n \leq I$ (1)

Or $I - S_n \leq \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{e^{n-1}} \Leftrightarrow I \leq S_n + \frac{1}{e^{n-1}}$ (2)

De (1) et (2) on a : $S_n \leq I \leq S_n + \frac{1}{e^{n-1}}$

e) S_n est une valeur approchée de I à $10^{-2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{e^{n-1}} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow e^{n-1} \geq 100 \Leftrightarrow n - 1 \geq \ln 10^2 \Leftrightarrow$

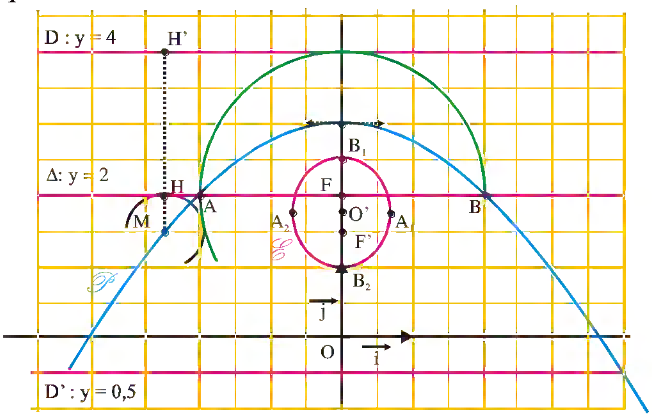
$n \geq 1 + 2\ln 10$. Donc à partir de

$n = E(1 + 2\ln 10) + 1$.

Sujet 2006 /Séries : C & TMGM / Session normale

Exercice 1

Illustration des données et réponses à certaines questions :



1.a) Soit H le projeté orthogonal de M sur D ;

- $M \in (P) \Leftrightarrow MF = MH'$
- $MH' = MH + HH' = MH + 2$
  (les points M ; H et H sont alignés) $\Leftrightarrow$
  $MF = MH + 2$

b) Le cercle de diamètre [AB] a pour rayon r = 2.
Le cercle de centre M passant par H a pour rayon $r' = MH$.
M est le centre du cercle $\mathscr{C}_{(M\,;\,r')}$ et F est le centre du cercle de diamètre [AB].
On a : $MF = MH + 2 \Leftrightarrow MF = r' + r \Rightarrow \mathscr{C}_{(M\,;\,r')}$ et $\mathscr{C}_{[AB]}$ sont tangents.

2.a) L'équation de (P) :
$MF = MH' \Leftrightarrow MF^2 = MH'^2 \Leftrightarrow$
$(0 - x)^2 + (2 - y)^2 = (x - x)^2 + (4 - y)^2 \Leftrightarrow$
$x^2 + 4 - 4y + y^2 = 16 - 8y + y^2 \Leftrightarrow x^2 = 12 - 4y \Leftrightarrow$
$x^2 = 4(3 - y) = -4(y - 3)$.

b) $D_m : y = mx + 2$; $D_m \cap (P) = \{S\,;\,T\}$ où

$$P : y = \frac{12 - x^2}{4}\ ;\ \Rightarrow \frac{12 - x^2}{4} = mx + 2$$

$\Leftrightarrow x^2 + 4mx - 4 = 0.$
$\Delta = 16m^2 + 16 > 0.$

$$x_1 = \frac{-4m + \sqrt{m^2 + 1}}{4} = -2m + 2\sqrt{m^2 + 1}$$

$$x_2 = \frac{-4m - \sqrt{m^2 + 1}}{4} = -2m - 2\sqrt{m^2 + 1}$$

$\Rightarrow y_1 = -2m^2 + 2m\sqrt{m^2 + 1} + 2$;
$y_2 = -2m^2 - 2m\sqrt{m^2 + 1} + 2$;
$I = [S*T] \Rightarrow I(-2m\,;\,-2m^2 + 2)$;
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2.$

Donc I appartient à une parabole (P') d'équation :
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$; dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

3) $E(F\,;\,e\,;\,D)$; $F(0\,;\,2)$; $e = \frac{1}{3}$; $D : y = 4$

a) $M \in (P) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} MF = MH' \\ MF = \frac{1}{3}MH' \end{array}\right\} \Rightarrow MH' = \frac{1}{3}MH'$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}MH' = 0 \Leftrightarrow MH' = 0$ (impossible; car $M \notin D$).
Donc (P) et (E) n'ont pas de points communs.

b) Equation de (E) ; dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$;

$M \in (E) \Leftrightarrow MF = \frac{1}{3}MH' \Leftrightarrow MF^2 = \frac{1}{9}MH'^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + (2 - y)^2 = \frac{1}{9}(y - 4)^2 = \frac{1}{9}(y^2 - 8y + 16) \Leftrightarrow$

$x^2 + 4 - 4y + y^2 = \frac{1}{9}(y^2 - 8y + 16) \Leftrightarrow$

$9x^2 + 36 - 36y + 9y^2 = y^2 - 8y + 16 \Leftrightarrow$

$9x^2 + 8(y^2 - \frac{7}{2}y) + 20 = 0 \Leftrightarrow$

$9x^2 + 8(y - \frac{7}{4}y)^2 - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$2x^2 + \frac{16}{9}(y - \frac{7}{4})^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{(y - \frac{7}{4})^2}{(\frac{3}{4})^2} = 1.$$

c) Détermination des éléments de (E).

- $x = 0 \Rightarrow (y - \frac{7}{4})^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$ ou $y = 1 \Rightarrow$ les

  sommets de l'axe focal sont $B_1(0\,;\,\frac{5}{2})$ et $B_2(0\,;\,1)$

- $y = \frac{7}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ les

  Sommet du petit axe : $A_1(\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\,\frac{7}{4})$ et $A_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\,\frac{7}{4})$

  Le centre de (E) est le point $O'[B_1*B_2] \Rightarrow O'(0\,;\,\frac{7}{4})$;

- Le $2^{ème}$ foyer F' : $\frac{x_{F'} + 0}{2} = 0 \Rightarrow x_{F'} = 0$

On pose: $\begin{cases} x = -2m \\ y = -2m^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2(\frac{x}{2})^2 + 2 \Leftrightarrow$

$\frac{y_{F'} + 2}{2} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow y_{F'} = \frac{3}{2} \Rightarrow F'(0 ; \frac{3}{2})$;

- La 2ème directrice D' = $S_{O'}$(D) = D'$\Rightarrow$ D' : $y = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2

1) f : $\begin{matrix} D \to A \\ J \to I \end{matrix}$; $AI = DJ = \frac{1}{2}AB$.

Il existe un antidéplacement unique f qui transforme Den A et J en I.

$S_{(DB)} \circ t_{\overrightarrow{JK}}$ est un antidéplacement qui vérifie :

$S_{(DB)} \circ t_{\overrightarrow{JK}}(D) = S_{(DB)}(C) = A$;

$S_{(DB)} \circ t_{\overrightarrow{JK}}(J) = S_{(DB)}(K) = I \Rightarrow f = S_{(DB)} \circ t_{\overrightarrow{JK}}$.

2.a) $t_{\overrightarrow{JK}} = t_{\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{IK}}$; $t_{\overrightarrow{JI}} \circ t_{\overrightarrow{IK}} = t_{\overrightarrow{JK}} = t_{\overrightarrow{IK}} \circ t_{\overrightarrow{JI}} \Rightarrow$

$f = S_{(DB)} \circ t_{\overrightarrow{IK}} \circ t_{\overrightarrow{JI}} = S_{(DB)} \circ (S_{(DB)} \circ S_{(JI)}) \circ t_{\overrightarrow{JI}} \Leftrightarrow$

$f = S_{(JI)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$.

Donc f est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{JI}$ et d'axe (JI).

b) L'écriture complexe de f est de la forme :

$Z' = a\overline{Z} + b$; a ; b $\in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$;

$Z_A = 0$; $Z_D = 2i$; $Z_I = 1$; $Z_J = i \Rightarrow$

$\begin{cases} 0 = -2ia + b \\ 1 = -ai + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -i \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow Z' = -i\overline{Z} + 2$

fo f (M) = M'' ; f (M) =M';

fo f : $Z'' = -i\overline{Z'} + 2 = -i\overline{(-i\overline{Z} + 2)} + 2$

$Z'' = -i(iZ + 2) + 2 = Z - 2i + 2 \Rightarrow$

fo f est une translation de vecteur d'affixe 2-2i $\Rightarrow$

fo f $= t_{2\vec{u}}$; avec $\vec{u}$ d'affixe 1- i.

$N \in \Delta \Rightarrow Z_N = \frac{Z' + Z}{2}$; $Z = 0 \Rightarrow Z_N = 1 \Leftrightarrow$

$N(1 ; 0) \in \Delta$. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de Δ ;

donc Δ a pour équation : y = -x + b ; N(1 ; 0) $\in \Delta$ $\Rightarrow 0 = -1 + b \Leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow \Delta : y = -x + 1$.

3) $f(A) = S_{(DB)} \circ t_{\overrightarrow{JK}}(A) = S_{(DB)}(B) = B$

4) g = $S_{(AI)} \circ f$; g est la composée de deux antidéplacements, donc g est un déplacement.

$g = S_{(AI)} \circ S_{(DB)} \circ t_{\overrightarrow{JK}} = r_{(B ; \frac{\pi}{2})} \circ t_{\overrightarrow{JK}} \Rightarrow$ g est une

rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Or $g(O) = O \Rightarrow g = r_{(O ; \frac{\pi}{2})}$.

5.a) S : $\begin{matrix} D \to O \\ C \to I \end{matrix} \Rightarrow k = \frac{OI}{DC} = \frac{1}{2}$ et

$\theta = (\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{OI}) = (\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DJ}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b) S(BC) est la droite perpendiculaire à (BC) passant par I.

Donc; S(BC) = (AB) ; puis S(DB) = (AC) ;

$B = (DB) \cap (BC) \Rightarrow S(B) = (AB) \cap (AC) \Leftrightarrow$ S(B) = A.

c) $A = (AC) \cap ((DA) \Rightarrow S(A) = J$.

d) $S : \begin{cases} \Omega \to \Omega \\ D \to O \\ C \to I \ ; (\overrightarrow{\Omega C} ; \overrightarrow{\Omega I}) = -\frac{\pi}{2} = (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BI})[\pi] \Rightarrow \\ A \to J \\ B \to A \end{cases}$

Ω ; I. C et B sont cocycliques.

6.a) $S \circ S = S''(\Omega ; \pi ; \frac{1}{4}) \Leftrightarrow S \circ S = h_{(\Omega ; -\frac{1}{4})}$.

b) $S \circ S (B) = S[S(B)] = S(A) = J \Leftrightarrow h(B) = J \Rightarrow$

$\overrightarrow{\Omega I} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega I} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{\Omega I} + \overrightarrow{\Omega B} = \vec{0} \Leftrightarrow$

Ω = bar {(B ; 1) ; (I ; 4)}.

7) $S' : \begin{matrix} B \to B \\ C \to E \end{matrix} \Rightarrow k' = \frac{BE}{BC} = 2$ et

$\theta' = (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BE}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$;

S o S' = S(?; 0 ; 1) $\Rightarrow$ S o S' est une translation;

S o S'(B) =S(B) = A $\Rightarrow$ S o S' $= t_{\overrightarrow{BA}}$.

$\left.\begin{matrix} S \circ S'(C) = S(S'(C)) = S(E) \\ S \circ S'(C) = t_{\overrightarrow{BA}}(C) = D \end{matrix}\right\} \Rightarrow S(E) = D \Rightarrow$

$(\overrightarrow{\Omega E} ; \overrightarrow{\Omega D}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\Omega D = 2\Omega E$.

Problème

Partie A

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}\ ;\ x\geq 0\\[2mm] \dfrac{-\ln(1-x)}{2x};\ x<0\end{cases}$$

1) Continuité de f en 0.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{1}{2}=f(0)$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(1-x)}{-x}=\dfrac{1}{2}=f(0)\Rightarrow$

f est continue en 0.

2) f est le rapport de fonctions dérivables sur]-∞ ; 0[et]0 ; +∞[alors f est dérivable sur]-∞ ; 0[et]0 ; +∞[.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^x}{e^{2x}+1}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2e^x-e^{2x}-1}{2x(e^{2x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^x-1}{x}.\frac{1}{2(e^{2x}+1)}+\frac{e^x}{2(e^{2x}+1)}\frac{1-e^x}{x}\right.$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0=f'_d(0)$$

3) $h<0\,;u(x)=\ (\dfrac{\ln(1-h)+h}{h^2})x^2-\ln(1-x)-x\ ;\ x\in\left]-\infty;0\right]$

a) u(h) = 0 ; u(0) = 0 ; u est continue sur [h ; 0] et non constante, alors il existe c∈]h ; 0[tel que : u'(c) = 0.

$u'(x)=\ \ 2(\dfrac{\ln(1-h)+h}{h^2})x+\dfrac{1}{1-x}-1$;

$u'(c)=0\ \Rightarrow 2(\dfrac{\ln(1-h)+h}{h^2})c=1-\dfrac{1}{1-c}\Rightarrow$

$$\frac{\ln(1-h)+h}{h^2})=\frac{1}{2(c-1)}.$$

b) $h\to 0^-\Rightarrow c\to 0^-$; $\lim\limits_{h\to 0^-}(\dfrac{\ln(1-h)+h}{h^2})=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1}{2(c-1)}$

$$=-\frac{1}{2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\ln(1-x)}{2x^2}-\dfrac{1}{2x}=$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-\ln(1-x)-x}{2x^2}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{1}{2}(\frac{\ln(1-x)+x}{2x^2})=\frac{1}{4}.$$

⇒ f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=\dfrac{1}{4}$.

d) $f'_d(0)=0$ et $f'_g(0)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow f'_d(0)=0\neq f'_g(0)\Rightarrow$

f n'est dérivable en 0.

4.a) $x>0\,;f'(x)=\dfrac{-e^{3x}+e^x}{(e^{2x}+1)^2}=\dfrac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}<0\,;\forall x\in\left]0\,;+\infty\right[$

⇒ f est décroissante sur [0 ; +∞[.

b) $x<0\,;f'(x)=\dfrac{\frac{2x}{1-x}+2\ln(1-x)}{4x^2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2x(1-x)}+\frac{\ln(1-x)}{2x^2}=\frac{x+(1-x)\ln(1-x)}{2x^2(1-x)}$$

c) x ≤ 0 ; v(x) = x + (1-x)ln(1-x) ;

v'(x) = 1 – ln(1-x) -1 = -ln(1-x) < 0 ; ∀x< 0.

v(0)= 0.

Tableau de variations :

x	- ∞	0
v ' (x)	-	
v (x)	+∞ ↘	0

Le signe de f'(x) lorsque x < 0 : D'après le T.V de v on a ; ∀ x < 0 ; v(x) ≥ 0 et on a ;

∀ x < 0 ; $f'(x)=\dfrac{v(x)}{2x^2(1-x)}>0$..

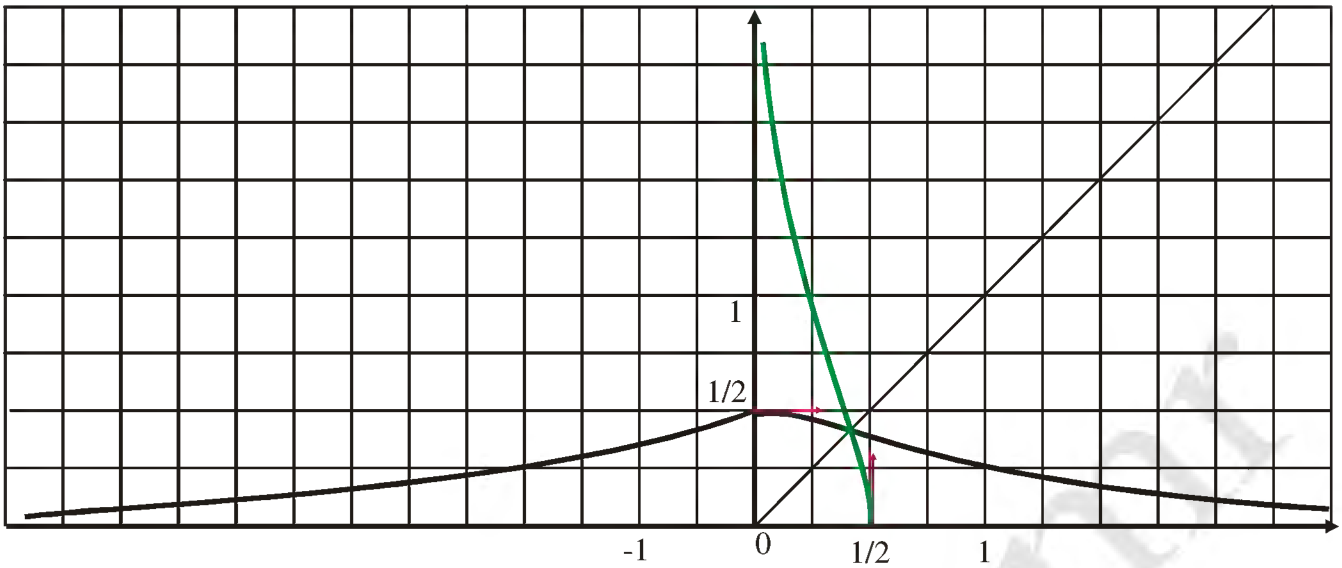
d) Tableau de variations

x	-∞	0	+∞
f '(x)	+	‖ -	
f (x)	0 ↗	$\frac{1}{2}$	↘ 0

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}\times\dfrac{1-x}{2x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$;

5) Représentation graphique

Voir représentation ci-dessous.



Partie B

1) f est continu sur [0 ; +∞[, donc f admet des primitives sur [0 ; +∞[.

2) $x \in \left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right[$; $G(x) = \int_0^{\ln(\tan x)} f(t)dt$

a) $G(\frac{\pi}{4}) = \int_0^{0} f(t)dt = 0$

• $G'(x) = (\ln(\tan x))'f(\ln\tan x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} \times \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = 1$

b) $G(x) = x + c$ et $G(\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow c = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$G(x) = x - \frac{\pi}{4}$; $\forall x \in I / \ I = [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}]$;

c) On pose $w(x) = \ln(\tan x)$; $x \in [\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}[$;

$w'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} > 0$; $\forall x \in I$.

x	$\frac{\pi}{4}$ $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
w' (x)	+
w (x)	0 ↗ +∞

W réalise une bijection de I sur [0 ; +∞ [, donc pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+$, il existe $\alpha \in I$ (α unique) tel que $\beta = w(\alpha) \Leftrightarrow \beta = \ln(\tan\alpha)$.

d) $A(\beta) = \int_0^{\beta} f(x)dx = G(\alpha) = (\alpha - \frac{\pi}{4}).4 \text{ cm}^2$.

$\lim\limits_{\beta \to +\infty} A(\beta) = \lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} (\alpha - \frac{\pi}{4})4 \text{ cm}^2 = \pi \text{cm}^2$.

Partie C

g est la restriction de f sur [0 ; +∞[.

1 .a) g est continue et strictement décroissante sur [0 ; +∞[(voir TV de f) ⇒ g est une bijection de [0 ; +∞[sur J =] 0 ; $\frac{1}{2}$].

b) $C_{g^{-1}}$ est l'image de Cg par la symétrie orthogonale d'axe la droite Δ d'équation y = x. (Voir figure précédente).

c) Détermination de $g^{-1}(x)$, $g(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^{2x}+1} = y$

$\Leftrightarrow ye^{2x} + y = e^x \Leftrightarrow ye^{2x} - e^x + y = 0$; soit $X = e^x$

$\Leftrightarrow y X^2 - X + y = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4y^2 \Rightarrow$

$X_1 = \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}$; $X_2 = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}$

On a : $0 < 1 - 4y^2 \le 1$, alors $\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y} \le 1 \Rightarrow$

$X_1 = \ln(\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}) \le 0$;

$X_2 = \ln(\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}) \ge 0$, donc

$g^{-1}(x) = \ln(\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x})$, $\forall x \in]0 ; \frac{1}{2}]$.

2) $h_n(x) = \int_1^{f(x)} t(\ln t)^n dt$;

a) $h_1(x) = \int_1^{f(x)} t(\ln t)dt$; on pose :

$\begin{cases} u'(t) = t \\ v(t) = \ln t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow$

$$h_1(x)=\left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^{f(x)}-\int_1^{f(x)}\frac{1}{2}tdt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^{f(x)}-\left[\frac{1}{4}t^2\right]_1^{f(x)}\Rightarrow$$
$$h_1(x)=\frac{1}{2}(f(x))^2\ln(fx))-\frac{(f(x))^2}{4}+\frac{1}{4}\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to-\infty}h_1(x)=\frac{1}{4}.$$

b) $x\geq 1$; En utilisant une intégration par parties:

$h_{n+1}(x)=\int_1^{f(x)}t(\ln t)^{n+1}dt$; on pose :

$$\begin{cases}u'(t)=t\\ v(t)=(\ln t)^{n+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u(t)=\frac{t^2}{2}\\ v'(t)=(n+1)\frac{(\ln t)^n}{t}\end{cases}$$
$$h_{n+1}(x)=\left[\frac{1}{2}t^2(\ln t)^{n+1}\right]_1^{f(x)}-\int_1^{f(x)}\frac{1}{2}t^2(n+1)\frac{(\ln t)^n}{t}dt$$
$$\frac{1}{2}f^2(x)(\ln(f(x))^{n+1}-\frac{n+1}{2}\int_1^{f(x)}t(\ln t)^n dt\Leftrightarrow$$
$$h_{n+1}(x)=\frac{1}{2}f^2(x)(\ln(f(x))^{n+1}-\frac{n+1}{2}h_n(x).$$

$K_n(x)=\int_1^{f(x)}t^n\ln t dt$; on pose :

$$\begin{cases}u'(t)=t^n\\ v(t)=(\ln t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}\\ v'(t)=\frac{1}{t}\end{cases}\Rightarrow$$
$$K_n(x)=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_1^{f(x)}-\int_1^{f(x)}\frac{t^n}{n+1}dt\Leftrightarrow$$
$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1}\ln(f(x))-\frac{1}{(n+1)}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^{f(x)}\Leftrightarrow$$
$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1}\ln(f(x))-\frac{1}{(n+1)^2}\left[f(x)^{n+1}-1\right]$$

c) On démontre par récurrence que L_n converge vers une limite non nulle l_n.

On a : $\lim_{x\to-\infty}h_1(x)=\frac{1}{4}.$

On suppose que : $\lim_{x\to-\infty}h_n(x)\neq l_n$, alors

$$\lim_{x\to-\infty}h_{n+1}(x)=-\frac{n+1}{2}l_n\neq 0$$

Conclusion : h_n admet une limite finie $l_n\neq 0$.

Démontrons que : $l_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n!}{2^{n+1}}$; on a :

$l_{n+1}=-\frac{n+1}{2}l_n\Rightarrow$

$l_2=-\frac{2}{2}l_1$

$l_3=-\frac{3}{2}l_2$

....

....

....

$l_{n-1}=-\frac{n-1}{2}l_{n-2}$

$l_n=-\frac{n}{2}l_{n-1}$

$l_n=(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n+1}}$; car ($l_1=\frac{1}{4}$).

d) $\lim_{x\to-\infty}K_n(x)=\frac{1}{(n+1)^2}$.

Partie D

$t\in]0\,;\frac{\pi}{2}]$; $\Phi(t)=\dfrac{\frac{t^2}{\pi}-t}{\sin t}$; $\Phi(0)=-1$.

1) Φ' est continue sur l'intervalle fermé alors Φ' est bornée d'où il existe un réel M tel que :

$|\Phi'(x)|\leq M$; $\forall x\in[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

2) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(t)\sin[(2n+1)t]tdt$,

a) On pose :

$$\begin{cases}u'(t)=\sin((2n+1)t)\\ v(t)=\Phi(t)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u(t)=\frac{-1}{2n+1}\cos((2n+1)t)\\ v'(t)=\Phi'(t)\end{cases}$$
$$I_n=\left[\frac{-1}{2n+1}\cos((2n+1)t)\Phi(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(t)\cos((2n+1)t)$$
$$I_n=\frac{-1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(t)\cos((2n+1)t)$$

b) $|I_n|\leq\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(t)\cos((2n+1)t)\right|$

$|\Phi'(t)|\leq M$ et $|\cos(2n+1)t|\leq 1$, d'où

$$|I_n|\leq\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}Md(t)\Leftrightarrow$$
$$|I_n|\leq\frac{1}{2n+1}\left[1+\frac{\pi}{2}M\right].$$

$$0 \le \lim_{n\to-\infty}|I_n| \le \lim_{n\to-\infty}\frac{1}{2n+1}\left[1+\frac{\pi}{2}M\right]=0.$$

$$\lim_{n\to-\infty}|I_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to-\infty} I_n = 0.$$

3) $x\in]0\,;\,\frac{\pi}{2}]$; $n \ge 1$.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{i(2kx)} = e^{i(2x)}\frac{1-(e^{i(2x)})^n}{1-e^{i(2x)}} = \frac{e^{i(2x)}-e^{i(2(n+1)x}}{1-e^{i(2x)}}$

$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i(\frac{\alpha+\beta}{2})} \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i(2kx)} = \frac{2i\sin(-nx)e^{i(n+2)x}}{2i\sin(x)e^{ix}} = \frac{\sin(nx)}{\sin x}e^{i(n+1)x}$$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx) = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{n}e^{i2kx}\right]$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx) = \frac{\sin(nx)}{\sin x}\cos(n+1)x$$

$$= \frac{\sin(2n+1)x+\sin(-x)}{2\sin x}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx) = \frac{\sin(2n+1)x}{2\sin x} - \frac{1}{2}$$

4.a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\cos(2kt)dt$

On pose :

$$\begin{cases} u(t)=\dfrac{t^2}{\pi}-t \\ v'(t)=\cos(2kt)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t)=\dfrac{2t}{\pi}-1 \\ v(t)=\dfrac{1}{2k}\sin(2kt)\end{cases} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\cos(2kt)dt = \left[\frac{1}{2k}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\sin(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2t}{\pi}-1\right)\sin(2kt)dt$$

On pose : $\begin{cases} u'(t)=\dfrac{2t}{\pi}-1 \\ v(t)=\sin(2kt)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t)=\dfrac{2}{\pi} \\ v'(t)=\dfrac{-1}{2k}\cos(2kt)\end{cases} \Rightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\cos(2kt)dt = \left[\frac{1}{2k}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\sin(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2k}\left[\left[-\frac{1}{2k}\left(\frac{2t}{\pi}-1\right)\cos(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{k\pi}\cos(2kt)dt\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\cos(2kt)dt = \frac{1}{4k^2} - \frac{1}{2k^2\pi}\left[\frac{1}{2k}\sin(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4k^2}$$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)dt = \frac{1}{4}S_n$; $k>0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\left[\frac{\sin(2n+1)t}{2\sin t}-\frac{1}{2}\right]dt = \frac{1}{4}S_n \Leftrightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)}{\sin t}\sin(2n+1)tdt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)dt = \frac{1}{4}S_n \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)}{\sin t}\sin(2n+1)tdt - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3\pi}t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}S_n \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}\frac{\pi^2-3\pi}{24} = \frac{1}{4}S_n \Leftrightarrow \frac{1}{2}I_n + \frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{4}S_n \Leftrightarrow S_n = 2I_n + \frac{\pi^2}{6}\text{ . Donc } \lim_{n\to+\infty}S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2I_n+\frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sujet 2006 /Séries : C & TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

1.a) $S_t : Z_t = f(t)\, e^{it} Z$.

Donc S_t est une similitude directe de centre O, de rapport f(t) et d'angle t.

b) S_t : $Z_t = f(t)\, e^{it} Z$; Soit $Z = x + iy$ et $Z_t = x_t + iy_t$ avec $x ; y ; x_t ; y_t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$x_t + iy_t = f(t)(\cos t + i\sin t)(x + iy)$

$= f(t)[x\cos t - y\sin t) + i(y\cos t + x\sin t)] \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_t = f(t)(x\cos t - y\sin t) \\ y_t = f(t)(y\cos t + x\sin t) \end{cases}$$

S_t^{-1} est une similitude directe de centre O de rapport $\dfrac{1}{f(t)}$ et d'angle (-t).

Donc S_t^{-1} admet une écriture complexe de la forme : Z' = $Z' = \dfrac{1}{f(t)} e^{-it} Z$.

Soit $Z' = x' + iy'$ et $Z = x + iy$; avec $x' ; y' ; x ; y \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$x' + iy' = \frac{1}{f(t)}(x\cos t + y\sin t) + i(y\cos t - x\sin t))$$

$$\Rightarrow S_t^{-1} \begin{cases} x' = \dfrac{1}{f(t)}(x\cos t + y\sin t) \\ y' = \dfrac{1}{f(t)}(y\cos t - x\sin t) \end{cases}$$

2) $f(t) = \dfrac{1}{\cos t} ; t \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$;

a) $(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{MM_t}) = \arg \dfrac{Z_t - Z}{-Z} \ (2\pi)$

$= \arg \left(\dfrac{Z - Z_t}{Z}\right) \ (2\pi)$

$= \arg \dfrac{Z - f(t)e^{it}Z}{Z} \ (2\pi)$

$= \arg \dfrac{Z(1 - f(t)e^{it}}{Z} \ (2\pi)$

$= \arg (1 - f(t)e^{it} \ (2\pi)$

$= \arg(1 - \dfrac{1}{\cos t}(\cos t + i\sin t)) \ (2\pi)$

$= \arg(1 - 1 - i\tan t) \ (2\pi)$

$= \arg(i\tan t) \ (2\pi)$

$= \pm\dfrac{\pi}{2}$

Donc le triangle OMM_t est rectangle en M.

b) Si M est fixe ; alors Mt décrit la droite perpendiculaire en M à (OM).

c) $M \in D \Rightarrow M(a ; y) \Rightarrow M_t = S_t(M)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x_t = \dfrac{1}{\cos t}(a\cos t - y\sin t) \\ y_t = \dfrac{1}{\cos t}(y\cos t + a\sin t) \end{cases} \Rightarrow$

$x_t + y_t \tan t = a - a\text{tna}^2 t$.

Donc l'image de (D) par St est une droite (D_t) d'équation : $x_t + y_t \tan t = a(1 + \text{tna}^2 t)$.

3.a) $(\overrightarrow{M_tO}; \overrightarrow{M_tM}) = \arg(\dfrac{Z - Z_t}{-Z_t})(2\pi) = \arg(\dfrac{Z_t - Z}{Z_t}) \ (2\pi)$

$= \arg(\dfrac{Z - \cos t(\cos t + i\sin t)Z}{\cos t(\cos t + i\sin t)Z}) \ (2\pi)$

$= \arg \dfrac{\sin^2 t - i\cos t\sin t}{\cos t(\cos t + i\sin t)} \ (2\pi)$

$= \arg \dfrac{-i\sin t(i\sin t + \cos t)}{\cos t(\cos t + i\sin t)} \ (2\pi)$

$= \arg(-i\tan t) \ (2\pi)$

$= \pm\dfrac{\pi}{2} \ (2\pi) \Rightarrow$

Le triangle (OMM_t) est rectangle en M_t.

b) Si M est fixe on a : $\forall M \neq O$:

$(\overrightarrow{M_tO} ; \overrightarrow{M_tM}) = \pm\dfrac{\pi}{2} \ (2\pi) \Rightarrow M_t$ décrit un cercle de diamètre [OM] privé de O et M.

4.a) $(\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{A_tM_t}) = \arg \dfrac{Z_t - Z_{At}}{Z - Z_A} \ (2\pi)$

$= \arg(\dfrac{\cos te^{it}Z - \cos te^{it}a}{Z - a}) \ (2\pi)$

$= \arg \cos te^{it} \ (2\pi)$

$= t \ (2\pi)$.

b) $(\overrightarrow{H_tA} ; \overrightarrow{H_tA_t}) = (\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{A_tM_t}) \ (\pi)$

$= t \ (\pi)$

D'autre part :

$(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OA_t}) = \arg \dfrac{\cos te^{it}a}{a} = \arg\cos te^{it} = t \ (\pi) \Rightarrow$

$(\overrightarrow{H_tA} ; \overrightarrow{H_tA_t}) = (\overrightarrow{AM} ; \overrightarrow{A_tM_t}) \ (\pi) \Rightarrow$

O ; H_t ; A et A_t sont cocycliques.

c) $(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM_t}) = \arg\frac{Z_t}{Z}\ (\pi) = \arg f(t)e^{it}\,(\pi) = t(\pi)$

$(\overrightarrow{H_tM}\ ;\ \overrightarrow{H_tM_t}) = (\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{A_tM_t})\ (\pi) = t\ (\pi) \Rightarrow$

$(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM_t}) = (\overrightarrow{H_tM}\ ;\ \overrightarrow{H_tM_t})\ (\pi) \Rightarrow$

O ; M ; Mt ; H_t sont cocycliques $\Rightarrow$

$(\overrightarrow{M_tO}\ ;\ \overrightarrow{M_tM}) = (\overrightarrow{H_tO}\ ;\ \overrightarrow{H_tM})\ (\pi)$ Or le triangle H_tOM est rectangle $M_t \Rightarrow$ Le projeté orthogonale de O sur la droite (AM) est le point H_t.

d) Le projeté orthogonale de O sur Δ est le point d'intersection de Δ et (D_t) donc A est le point d'intersection de Δ et (D_t); d'où (D_t) passe par le point fixe A lorsque t varie.

Exercice 2

1.a) $(E_2) : (iZ)^2 = (Z+2i)^2 \Leftrightarrow$

$-Z^2 = Z^2 + 4iZ - 4 \Leftrightarrow 2Z^2 + 4iZ - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$Z^2 + 2iZ - 2 = 0$;

$\Delta = -4 + 8 = 4 \Rightarrow$

$$Z_1 = \frac{-2i-2}{2} = -1-i\ ; Z_2 = \frac{-2i+2}{2} = 1-i \Rightarrow$$

$$Z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})\ ; Z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

b) $u = \frac{-\sqrt{2}}{2}Z_1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -e^{i\pi}\times e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$u^p + u^{-p} = e^{\frac{ip\pi}{4}} + e^{-\frac{ip\pi}{4}} = 2\cos(\frac{p\pi}{4})$$

c) $$\frac{1}{2}\left[(1+uZ)^n + (1+\bar{u}Z)^n\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{p=0}^{n} C_n^p u^p Z^p + \sum_{p=0}^{n} C_n^p \bar{u}^p Z^p\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{P=0}^{n} C_n^p Z^p (u^p + \bar{u}^p)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{P=0}^{n} C_n^p Z^p (2\cos(\frac{p\pi}{4}) = f(Z)$$

d) $f(Z) = 0 \Leftrightarrow (1+uZ)^n + (1+\bar{u}Z)^n = 0 \Leftrightarrow$

$(1+uZ)^n = -(1+\bar{u}Z)^n \Leftrightarrow$

$$\frac{(1+uZ)^n}{(1+\bar{u}Z)^n} = -1 \Leftrightarrow (\frac{1+uZ}{1+\bar{u}Z})^n = -1;$$

Soit $z = \frac{1+uZ}{1+\bar{u}Z} \Leftrightarrow (Z = \frac{z-1}{u-\bar{u}z}) \Rightarrow$

$$z^n = -1 \Leftrightarrow z = e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})}\ \ /\ \ 0 \le k \le n-1 \Leftrightarrow$$

$$Z = \frac{e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})} - 1}{u - \bar{u}e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})}}\ \ /\ \ 0 \le k \le n-1$$

2.a) Z est solution de $(E_n) \Leftrightarrow (iZ)^n = (Z+2i)^n \Leftrightarrow$
$|iZ|^n = |Z+2i|^n \Leftrightarrow |i|^n\,|Z|^n = |Z+2i|^n \Leftrightarrow$

$|Z| = |Z+2i| = |Z-(-2i)| \Leftrightarrow OM = AM.$

b) Z est solution de $(E_n) \Rightarrow$

M $\in$ médiatrice de [OA] $\Rightarrow$ Im(Z) = -1 (La médiatrice de [OA] est la droite d'équation y = -1) $\Rightarrow Z = a - i\ /\ a \in \mathbb{R}$.

3.a) $(iZ)^n = (Z+2i)^n \Leftrightarrow (\frac{iZ}{Z+2i})^n = 1$

Soit $T = \frac{iZ}{Z+2i} \Leftrightarrow (Z = \frac{2iT}{i-T}) \Rightarrow T^n = 1 \Rightarrow$

$T = e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})}\ /\ 0 \le k \le n-1 \Rightarrow$

$$Z = \frac{2ie^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})}}{i - e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})}} = \frac{2ie^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})}}{i(1+ie^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})})} = \frac{2e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})}}{(1+ie^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})})}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{2e^{i(\frac{\pi+2k\pi}{n})}}{e^{i(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4})}\times(2\cos(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow$$

$$Z = \frac{e^{i(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4})}}{\cos(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow$$

$$Z = \frac{\cos(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4})};$$

Or $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{4} = (\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{2}$ et $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \Rightarrow$

$$\cos(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\cos(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4})}{-\sin(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow$$

$$Z = -i - \frac{\cos(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow$$

$$Z = -i - \cot an(\frac{k\pi}{n}-\frac{\pi}{4})\ /\ k \in \{0;1\cdots;n-1\}.$$

Problème

Partie A

$f(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

1.a) f est définie $\Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1\,;1[\Rightarrow$

$D_f =]-1\,;1[$.

b) $\forall x \in D_f\,;\ -x \in D_f\,;$

$f(-x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1-x}{1+x}) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = -f(x) \Rightarrow$ f est impaire.

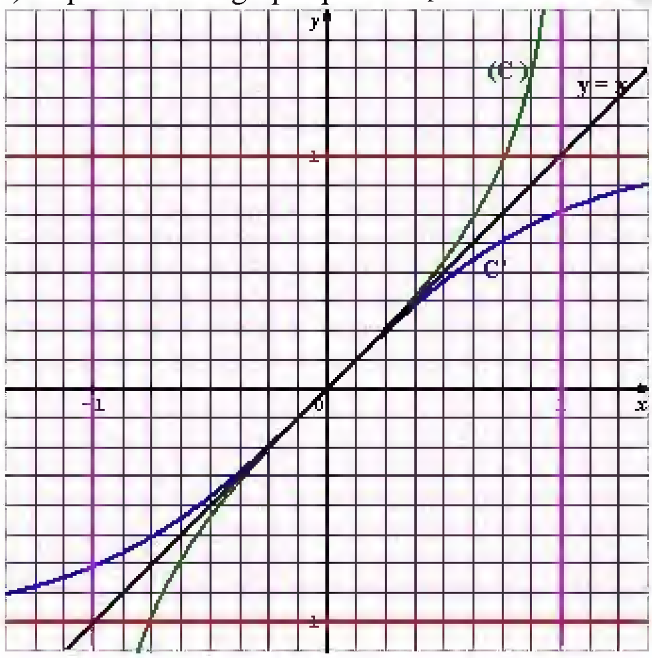
c) Tableau de variations de f :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(\frac{1+x}{1-x})'}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-x}{1+x} \times \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0\ ;\ \forall\ x \in D_f$

x	-1	1
f '(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

d) Représentation graphique de C_f



2.a) f est continue et strictement croissante sur]-1 ;1[, donc f réalise une bijection de]-1 ;1[sur $\mathbb{R}$.

b) On pose $y = f(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) \Leftrightarrow 2y = \ln(\frac{1+x}{1-x}) \Leftrightarrow$

$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow e^{2y} - x\,e^{2y} = 1 + x \Leftrightarrow$

$e^{2y} - 1 = x\,e^{2y} + x = (e^{2y}+1)x \Leftrightarrow$

$x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = \frac{e^y(e^y - e^{-y})}{e^y(e^y+e^{-y})} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$.

Donc g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

- **2ème méthode**

$$f(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1-\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln(\frac{2e^x}{2e^{-x}}) = \frac{1}{2}\ln e^{2x}$$

$$f(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}) = \frac{1}{2}(2x) = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$\Leftrightarrow g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

c) (C') est l'image de (C) dans la symétrie orthogonale d'axe : $\Delta : y = x$ (Voir figure).

3) Soit A l'aire cherchée. On a :

$$A = \int_0^1 (x - g(x))dx = 4\int_0^1 (x - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}})dx =$$

$$4\left[\frac{x^2}{2} - \ln(e^x + e^{-x})\right]_0^1 = 4\left[\frac{1}{2} - \ln(e + e^{-1}) + \ln 2\right] =$$

$$4\left[\frac{1}{2} - \ln\frac{e^2+1}{e} + \ln 2\right] = 4\left[\frac{1}{2} - \ln(e^2+1) + 1 + \ln 2\right] =$$

$$4\left[\frac{3}{2} + \ln 2 - \ln(e^2+1)\right] = 4\left[\frac{3}{2} + \ln(\frac{2}{e^2+1})\right] \text{u.a}$$

Partie B

1.a) $t \mapsto [g(t)]^n$ est continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow$

$I_n(x) = \int_0^x [g(t)]^n dt$ existe $\forall\ n \in \mathbb{N}$ et $\forall\ x \geq 0$.

b) $I_0(x) = \int_0^x 1dt = [t]_0^x = x$

$I_1(x) = \int_0^x g(t)dt = \left[\ln(e^t + e^{-t})\right]_0^x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2$

$\Leftrightarrow I_1(x) = \ln(\frac{e^x + e^{-x}}{2})$.

c) $\forall\ p \geq 1$ et $\forall\ x \geq 0$ on a : $0 \leq t \leq x$ et g est croissante $\Rightarrow g(0) \leq g(t) \leq g(x) \Leftrightarrow$

$0 \leq [\,g(t)]^{2p} \leq [\,g(x)]^{2p} \Rightarrow$

$0 \le \int_0^x [g(t)]^{2p} dt \le \int_0^x [g(x)]^{2p} dt \Leftrightarrow 0 \le I_{2p} \le x[\,g(x)]^{2p}.$

d) $\forall\ x \in \mathbb{R}_+\ ;\ g(x) \in [0\ ;\ 1[\Rightarrow \lim\limits_{p\to+\infty} [g(x)]^{2p} = 0.$

Donc (I_{2p}) est convergente et on a : $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p}(x) = 0$

2.a) $g'(t) = \dfrac{(e^t+e^{-t})^2-(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2} \Leftrightarrow$

$g'(t) = \dfrac{(e^t+e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2} - \dfrac{(e^t-e^{-t})^2}{(e^t+e^{-t})^2} \Leftrightarrow$

$g'(t) = 1 - [g(t)]^2 \Leftrightarrow [g(t)]^2 = 1 - g'(t)\ ;\ \forall\ t \in \mathbb{R}.$

b) $I_{n+2}(x) = \int_0^x [g(t)]^{n+2} dt = \int_0^x [g(t)]^2 [g(t)]^n dt =$

$\int_0^x (1-g'(t))[g(t)]^n dt =$

$\int_0^x 1\times(g(t))^n dt - \int_0^x g'(t)(g(t))^n dt =$

$I_n(x) - \left[\dfrac{1}{n+1}[g(t)]^{n+1}\right]_0^x = I_n(x) - \dfrac{1}{n+1}g(x)^{n+1}.$

D'après 2.b) on a :

Si n = 0 ; $I_2(x) = I_0(x) - [g(x)]$

Si n = 2 ; $I_4(x) = I_2(x) - \dfrac{1}{3}[g(x)]^3$

Si n = 4 ; $I_6(x) = I_4(x) - \dfrac{1}{5}[g(x)]^5$

.

.

.

Si n = 2p - 2 ; $I_{2p}(x) = I_{2p-2}(x) - \dfrac{1}{2p-1}[g(x)]^{2p-1}$

En sommant membre à membre :

$I_2(x) + I_4(x) + \cdots\cdots + I_{2p}(x) =$

$I_0 + I_2(x) + \cdots\cdots + I_{2p-2}(x) - [g(x) + \dfrac{1}{3}[g(x)]^3]$

$+\cdots\cdots+ \dfrac{1}{2p-1}[g(x)]^{2p-1}] \Leftrightarrow$

$I_{2p}(x) = I_0 - [g(x) + \dfrac{1}{3}[g(x)]^3] + \cdots\cdots +$

$\dfrac{1}{2p-1}[g(x)]^{2p-1}] \Leftrightarrow$

$I_{2p}(x) = x - [g(x) + \dfrac{1}{3}[g(x)]^3] + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2p-1}[g(x)]^{2p-1}].$

d) $f(\dfrac{1}{3}) = \ln\sqrt{2} \Rightarrow g(\ln\sqrt{2}) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$I_{2p}(\ln\sqrt{2}) = \ln\sqrt{2} - [g(\ln\sqrt{2}) + \dfrac{1}{3}[g(\ln\sqrt{2})]^3]$

$+\cdots\cdots+ \dfrac{1}{2p-1}[g(\ln\sqrt{2})]^{2p-1}] \Leftrightarrow$

$I_{2p}(\ln\sqrt{2}) = \ln\sqrt{2} - [\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3})^3 + \cdots\cdots +$

$\dfrac{1}{2p-1}(\dfrac{1}{3})^{2p-1}]$ Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p}\ln(\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{p\to+\infty} [\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{3})^3 + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2p-1}(\dfrac{1}{3})^{2p-1}] = \ln\sqrt{2}.$

Partie C

$h(x) = \int_0^x \dfrac{t^2}{1+t^2}dt\ ;\ x \in]-1\ ;\ 1[$

1.a) La fonction : $t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur $]-1\ ;\ 1[$

Donc h est bien définie sur $]-1\ ;\ 1[$.

b) $\forall\ t \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ On a :

$\dfrac{t^2}{1-t^2} = \dfrac{t^2-1}{1-t^2} + \dfrac{1}{1-t^2} = -1 + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(1+t)+(1-t)}{(1+t)(1-t)} + \dfrac{1}{1-t^2}\right]$

$= -1 + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(1+t)+(1-t)}{(1+t)(1-t)} + \dfrac{1}{1-t^2}\right] =$

$-1 + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1-t}) + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1+t}) \Leftrightarrow \dfrac{t^2}{1-t^2} = -1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{1-t} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1+t}$

$\Rightarrow a = -1\ ;\ b = \dfrac{1}{2}\ ;\ c = \dfrac{1}{2}.$

c) $h(x) = \int_0^x (-1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{1-t} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1+t})dt =$

$\left[-t - \dfrac{1}{2}\ln(1-t) + \dfrac{1}{2}\ln(1+t)\right]_0^x =$

$\left[-t + \dfrac{1}{2}(\ln(1+t) - \ln(1-t))\right]_0^x = \left[-t + \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+t}{1-t})\right]_0^x$

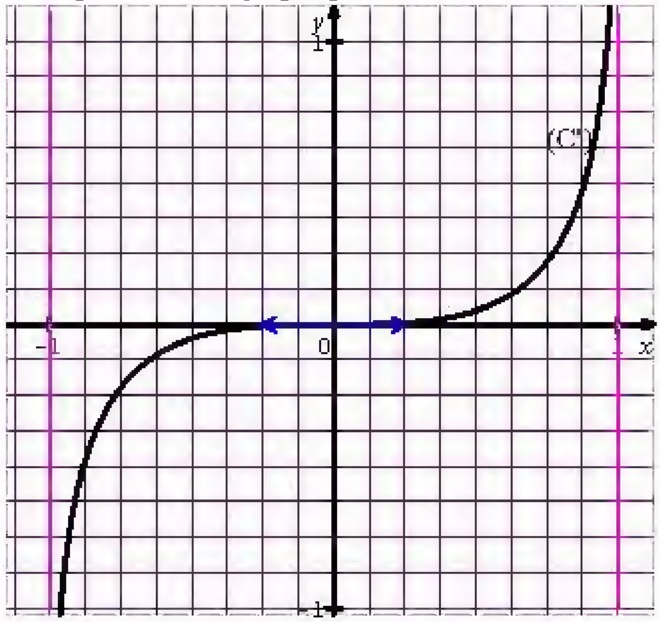
$\Leftrightarrow h(x) = -x + f(x)$

$h'(x) = -1 + f'(x) = -1 + \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{x^2}{1-x^2} \ge 0$

- Tableau de variations :

x	-1		0		1
h '(x)		+	0	+	
h(x)	-∞	↗	0	↗	+∞

- Représentation graphique de (C_h) :



$\forall\, x \geq 0$; $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$; On pose :

$u(x) = \ln x - \frac{x}{k} + 1 - \ln k$; $u'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{k} = \frac{k-x}{kx}$

- Tableau de variations :

x	0	k	1
u '(x)	+	0	-
u(x)	↗	u(k)	↘

$u(k) = \ln k - \frac{k}{x} + 1 - \ln k = 0 \Rightarrow \forall x > 0 ; \forall k \in \mathbb{N}^*$;

$u(x) \leq u(k) = 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{x}{k} + 1 - \ln k \leq 0 \Leftrightarrow$

$\ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln k \cdot$

On a : $\ln x \leq \frac{x}{k} - 1 + \ln k \Rightarrow$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (\frac{x}{k} - 1 + \ln k) dx \Leftrightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \left[\frac{x^2}{2k} - x + (\ln k)x\right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{2k} - k - \frac{1}{2} + (\ln k)(k+\frac{1}{2}) - \frac{(k-\frac{1}{2})^2}{2k} + k - \frac{1}{2} - (\ln k)(k-\frac{1}{2}) \Leftrightarrow$$

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq 1 - 1 + \ln k \Leftrightarrow \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln k$$

- Si $k = 1$; $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \ln x dx \leq \ln 1$
- Si $k = 2$; $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \ln x dx \leq \ln 2$

.

.

.

- Si $k = n$; $\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln n \Rightarrow$

En additionnant membre à membre :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \ln x dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \ln x dx + \cdots + \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln(1 \times 2 \times \cdots \times n) \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx \leq \ln(n!).$$

c) Donc $\ln(n!) \geq \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx$; Or

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x dx = [x\ln x - x]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = (n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) - (n+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = (n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow$$

$\ln(n!) \geq (n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\ln 2$.

4) $U_n = \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n) + n$;

a) $U_n - U_{n+1} = \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n) + n - \ln((n+1)!) + (n+\frac{3}{2})\ln(n+1) - n - 1$

$$= -\ln(n+1) + (n+\frac{3}{2})\ln(n+1) - 1 - (n+\frac{1}{2})\ln(n)$$

$$= (n+\frac{1}{2})(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 = (2n+1)\ \frac{1}{2}\ln(\frac{n+1}{n}) - 1 \text{ ; Or}$$

$$f(\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{n+1}{n}) \Rightarrow U_n - U_{n+1} = (2n+1)\, f(\frac{1}{2n+1}) - 1$$

- $U_n - U_{n+1} = (2n+1)\, f(\frac{1}{2n+1}) - \frac{1}{2n+1}) = (2n+1)\, h(\frac{1}{2n+1}) \geq 0$; car $h(x) \geq 0$; $\forall x \geq 0 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante

b) On a : $\ln(n!) \geq (n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) - n + \frac{1}{2}\ln 2$ et $(n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2}) \geq (n+\frac{1}{2})\ln(n) \Rightarrow$

$$\ln(n!) \geq (n+\frac{1}{2})\ln(n) - n + \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \ln(n!) - (n+\frac{1}{2})\ln(n) + n \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow U_n \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow$$

c) (Un) est convergente car elle est décroissante et minorée par $\frac{\ln 2}{2}$.

Sujet 2005 /Séries : C & TMGM / Session normale

Exercice 1

1.a) Soit $Z_0 = ib$ / b $\mathbb{C}$; Z_0 est solution de $P(Z) = 0 \Leftrightarrow$
$(ib)^3-(5+7i)(ib)^2+(-6+26i)(ib)+24-24i = 0 \Leftrightarrow$
$-ib^3+5b^2+7ib^2-6ib-26b+24-24i = 0 \Leftrightarrow$
$5b^2-26b+24+i(-b^3+7b^2-6b-24) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5b^2-26b+24=0 & (1) \\ -b^3+7\,b2-6b-24=0 & (2) \end{cases}$$

La résolution de l'équation 1 donne : b = 4 ou b = 1,2 (à rejeter). Donc $Z_0 = 4i$.

b) T.H

4i	1	-5 - 7i	-6 + 26i	24 - 24i
		4i	-20i + 12	24i -24
	1	-5-3i	6 + 6i	0

$\Rightarrow P(Z) = (Z-4i)(Z^2-(5+3i)Z+6+6i)$;

$$P(Z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z-4i=0 \Leftrightarrow Z=4i \\ Z2-(5+3i)Z+6+6i=0 \quad (2) \end{cases}$$

$\Delta = 25 - 9 + 30i - 24 - 24i = -8 + 6i = (1+3i)^2 \Rightarrow$

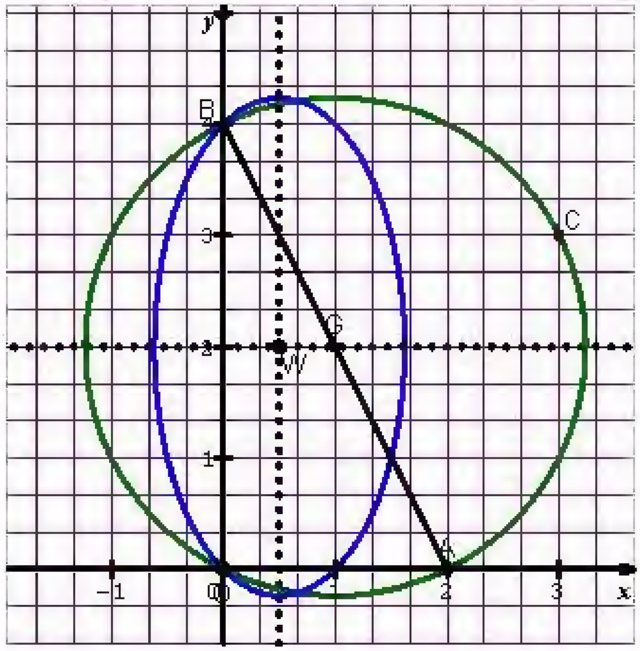
$$\frac{5+3i+1+3i}{2} = 3+3i \text{ ou } Z = \frac{5+3i-1-3i}{2} = 2 \Rightarrow$$

S = {4i ; 3 + 3i ; 2}.

2.a) $Z_A = 2$; $Z_B = 4i$; $Z_C = 3 + 3i$.

$$(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}) = \arg\frac{4i}{2} = \arg 2i = \frac{\pi}{2}(\pi)\ ;$$

$$(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}) = \arg\frac{4i-3-3i}{2-3-3i} = \arg\frac{-3+i}{-1-3i} = \arg -i = -\frac{\pi}{2}$$



D'où $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB})\ (\pi) \Rightarrow$ O ; A ; B et C sont cocycliques (car O ; A ; B et C ne sont pas alignés).

b) $$Z_G = \frac{5\times 0-3Z_A+4Z_C}{5-3+4} = \frac{-3\times 2+4\times(3+3i)}{6}$$

$\Rightarrow Z_G = 1 + 2i$;

- $\dfrac{Z_A+Z_B}{2} = \dfrac{2+4i}{2} = 1+2i = Z_G \Rightarrow$ G =[A*B].

c) $$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{Z-2}{Z-4i} = 0 \\ \text{ou} \\ \arg(\dfrac{Z-2}{Z-4i}) = \dfrac{\pi}{2}(\pi) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} M = A \\ \text{ou} \\ (\overrightarrow{MB}\ ;\ \overrightarrow{MA}) = \dfrac{\pi}{2}(\pi) \end{cases}$$ donc $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre [AB] privé de B.

3.a) $\varphi(M) = 6MG^2+5GO^2-3GA^2+4GC^2$
$= 6MG^2 + 5\times 5 - 3\times 5 + 4\times 5$
$= 6MG^2 + 30$

$M\in\Gamma_k \Leftrightarrow 6MG^2 + 30 = k \Leftrightarrow 6MG^2 = k - 30$;

- Si $k < 30 \Rightarrow \Gamma_k = \Phi$
- Si $k = 30 \Rightarrow \Gamma_k = \{G\}$
- Si $k > 30 \Rightarrow \Gamma_k = \mathscr{C}_{(G\ ;\ \sqrt{\frac{k-30}{6}})}$.

b) $M\in\Gamma_{60} \Leftrightarrow MG^2 = 5 \Leftrightarrow MG = \sqrt{5}$; donc Γ_{60} est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{5}$ passant par les points O ; A ; B et C (Voir figure).

4) f : $M(Z) \to M'(Z')$ / $Z' = \dfrac{3Z-\overline{Z}}{4}$;

$\Gamma : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

a) $$x'+iy' = \frac{3(x+iy-(x-iy)}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x \\ y' = y \end{cases}$$

b) $\Gamma' = f(\Gamma)$; $\Gamma' : (2x'-1)^2 + (y'-2)^2 = 5 \Leftrightarrow$
$4(x' - \frac{1}{2})^2 + (y' - 2)^2 = 5$; donc Γ' admet une équation de la forme : $4(x - \frac{1}{2})^2 + (y-2)^2 = 5$.

c) L'équation de Γ' : $4(x - \frac{1}{2})^2 + (y-2)^2 = 5$.

Soit $\begin{cases} X = x - \dfrac{1}{2} \\ Y = y - 2 \end{cases}$ et $\Omega(\frac{1}{2}\,;\,2)$. Dans le repère $(\Omega\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ Γ' a pour équation :

$4X^2 + Y^2 = 5 \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2} + \dfrac{Y^2}{\sqrt{5}^2} = 1$; Donc Γ' est l'ellipse de centre $\Omega(\frac{1}{2}\,;\,2)$; de sommets :

$(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\,;\,2)$; $(\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}\,;\,2)$; $(\dfrac{1}{2}\,;\,\sqrt{5}+2)$; $(\dfrac{1}{2}\,;\,-\sqrt{5}+2)$ et d'excentricité $e = \dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et passant par O et B.

Exercice 2

$n \in \mathbb{N}^*$; $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$; $x \in]0\,;+\infty[$.

1) $f'_n(x) = \dfrac{x^{n-1} - nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}} = \dfrac{x^{n-1}(1 - n\ln x)}{x^{2n}}$

$f'_n(x) = \dfrac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}$; $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - n\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{n}}$

- Tableau de variations

x	0		$e^{\frac{1}{n}}$		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	
f (x)	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{ne}$	↘	0

- Limites aux bornes

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

2.a) $C_{n+1} \cap C_n$: $\begin{cases} y = f_{n+1}(x) = \dfrac{\ln x}{x^{n+1}} \\ y = f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\ln x}{x^{n+1}} = \dfrac{\ln x}{x^n} \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x^{n+1}} - \dfrac{\ln x}{x^n} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x(1-x)}{x^{n+1}} = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$; $f_n(1) = 0$.

Donc : toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe $A(1; 0)$. $f'_n(1) = 1$ et

$f'_{n+1}(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} \times \dfrac{1}{x^{n+1}} = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} f'_n(1) = f'_{n+1}(1) = 1 \\ f_n(1) = f_{n+1}(1) = 0 \end{cases}$ Donc : les courbes (C_n) admettent la même tangente : $y = x - 1$ en $A(1\,;\,0)$.

b) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{(\ln x)(1-x)}{x^{n+1}} \leq 0 \Rightarrow C_n/C_{n+1}$.

c) $M_n(e^{\frac{1}{n}}\,;\,\dfrac{1}{ne})$; on pose $X = e^{\frac{1}{n}}$ et $Y = \dfrac{1}{ne} \Rightarrow$

$X^n = e \Leftrightarrow Y = \dfrac{1}{nX^n}$ Donc les points M_n sont situés sur une branche de la courbe d'équation : $Y = \dfrac{1}{nX^n}$.

3) Représentation de C_3

4.a) f est décroissante sur $[\,e^{\frac{1}{3}}\,;+\infty\,[$;

$\forall\, k \geq 2$; $[k\,;\,k+1\,[\, \subset [\,e^{\frac{1}{3}}\,;+\infty\,[\Rightarrow$

$\forall\, x \in [k\,;\,k+1\,[$; $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \Rightarrow$

$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx \leq \Leftrightarrow$

$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$.

b) On a : $f(3) \leq \int_2^3 f(x)dx \leq f(2)$;

$f(4) \leq \int_3^4 f(x)dx \leq f(3)$;

…………………………

…………………………

…………………………

$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n-1)$;

$S_n - f(2) \leq \int_2^n f(x)dx \leq S_n - f(n)$

$\Leftrightarrow S_n - \dfrac{\ln 2}{8} \leq \int_2^3 f(x)dx \leq S_n - \dfrac{\ln n}{n^3}$; $\forall n \geq 1$

c) $\int_2^n f(x)dx \leq S_n - \dfrac{\ln n}{n^3} \Leftrightarrow \int_2^n f(x)dx + \dfrac{\ln n}{n^3} \leq S_n$

• $S_n - \frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x)dx \Leftrightarrow S_n \leq \int_2^n f(x)dx + \frac{\ln 2}{8}$;

Donc $\forall n \geq 2$; on a : $\int_2^n f(x)dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x)dx + \frac{\ln 2}{8}$

d) $\int_2^n f(x)dx = \int_2^n \frac{\ln x}{x^3}dx$; on pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{2x^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_2^n f(x)dx = \left[\frac{-\ln x}{2x^2}\right]_2^n - \int_2^n \frac{-1}{2x^3}dx \Rightarrow$$

$$\int_2^n f(x)dx = \frac{-\ln n}{2n^3} + \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{2}\int_2^n \frac{1}{x^3}dx \Rightarrow$$

$$\int_2^n f(x)dx = \frac{-\ln n}{2n^3} + \frac{\ln 2}{8} - \frac{-1}{4n^2} + \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_2^n f_n(x)dx = \frac{1+2\ln 2}{16}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^3} = 0$; alors (S_n) est convergente (encadrée par 2 suites convergentes).

e) On a : $\frac{1+2\ln 2}{16} \leq \lambda \leq \frac{1+2\ln 2}{16} + \frac{\ln 2}{8} \Leftrightarrow$

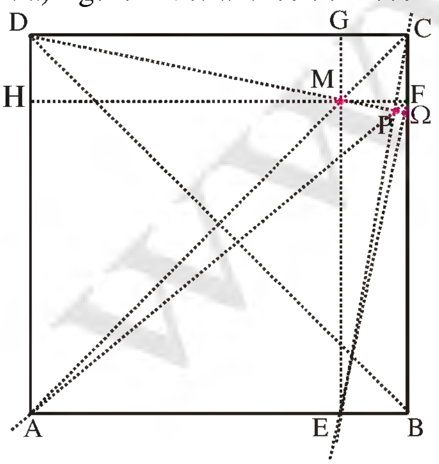
$$\frac{2\ln e^{\frac{1}{2}} + 2\ln 2}{16} \leq \lambda \leq \frac{1+4\ln 2}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln 2\sqrt{e} + 2\ln 2}{8} \leq \lambda \leq \frac{4\ln\sqrt{e}}{8}.$$

Problème

Partie A

1. a)Figure illustrant les données



2.a) $h_1((AD))$ est la droite passant par F et parallèle à (AD) donc : $h_1((AD)) = (CB)$

b) $h_2((BC)) = (EG)$

c) $h_2 \circ h_1((AD)) = h_2((BC)) = (EG)$

d) $h_1 \circ h_2((DC)) = h_1((AB)) = (FH)$

e) $h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2$; (h_1 et h_2 ont le même centre).

Donc : $h_1 \circ h_2 : \begin{cases} (AD) \to (EG) \\ (DC) \to (FH) \end{cases} \Rightarrow$

$h_1 \circ h_2((AD) \cap (DC)) = (EG) \cap (FH) \Rightarrow$

$h_1 \circ h_2(D) = M$. Or, $h_1 \circ h_2$ est une homothétie de centre P; alors $P \in (DM)$.

Conclusion : les droites (DM) ; (CE) et (AF) sont concourantes $\forall$ M $\in$[AC].

3.a) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} \Rightarrow \varphi(\overrightarrow{DE}) = \varphi(\overrightarrow{DA}) + \varphi(\overrightarrow{AE})$

$= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AH}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$

$= \overrightarrow{AF}$

$$\varphi(\overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AF} \Leftrightarrow \begin{cases} \|\overrightarrow{DE}\| = \|\overrightarrow{AF}\| \\ \text{et} \\ (\overrightarrow{DE}\ ;\ \overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases}$$

$\Rightarrow$(DE) $\perp$ (AF).

b) $\varphi(\overrightarrow{DF}) = \varphi(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}) = \varphi(\overrightarrow{DC}) + \varphi(\overrightarrow{CF})$

$= \varphi(\overrightarrow{AB}) + \varphi(\overrightarrow{GM})$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{EC} \quad \Rightarrow$

$\varphi(\overrightarrow{DF}) = \overrightarrow{EC}$

• $\varphi(\overrightarrow{DM}) = \varphi(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GM}) = \varphi(\overrightarrow{DG}) + \varphi(\overrightarrow{GM})$

$= \varphi(\overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC}$

$= \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MF}$

$= \overrightarrow{EF} \quad \Rightarrow$

$\varphi(\overrightarrow{DM}) = \overrightarrow{EF}$;

• $\varphi(\overrightarrow{DF}) = \overrightarrow{EC} \Rightarrow (DF) \perp (EC)$

• $\varphi(\overrightarrow{DM}) = \overrightarrow{EF} \Rightarrow (DM) \perp (EF)$

• $(FA) \perp (DE) \Rightarrow$ (FA) est la hauteur issue de F dans letriangle FED.

• $(EC) \perp (DF) \Rightarrow$ (EC) est la hauteur issue de E dans letriangle FED.

• $(DM) \perp (EF) \Rightarrow$ (DM) est la hauteur issue de D dans letriangle FED.

Donc pour tout M de [AC] les droites (FA)

(EC) et (DM) sont les hauteurs issues de F ; E et D du triangle FED ; alors (FA) ; (EC) et (DM) sont concourantes en un seul point qui est l'orthocentre du triangle FED.

On considère la réflexion S(AC) ; on a :

$$S(AC):\begin{cases}(DM)\to(BM)\\(CE)\to(CH)\\(AE)\to(AG)\end{cases}\Rightarrow$$

(DM) ; (SE) et (AF) sont concourantes $\Rightarrow$ (BM) ; (CH) et (AG) sont concourantes.

Partie B

1.a) $\Omega \neq M$ et $\Omega \neq F$; donc il existe une unique similitude directe S de centre Ω qui transforme M en F.

b) L'angle de S : $(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega F}) = -\dfrac{\pi}{2}(2\pi)$

$$S:\begin{cases}(EF)\to(DM)\\(EM)\to(FM)\end{cases}\Rightarrow$$

$S((EF)\cap(EM)) = (DM)\cap(FM) \Rightarrow S(E) = M.$

2) L' image du carré (AEMH) est le carré (GMFC) c'est-à-dire :

$$S:\begin{cases}A\to G\\E\to M\\M\to F\\H\to C\end{cases}$$

$$3)\ S(M)=F \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega F}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow \Omega\in\Gamma_1$$

$$S(E)=M \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega E}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow \Omega\in\Gamma_2$$

$$S(A)=G \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega A}\ ;\ \overrightarrow{\Omega G}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow \Omega\in\Gamma_3$$

$$S(H)=C \Rightarrow (\overrightarrow{\Omega H}\ ;\ \overrightarrow{\Omega C}) = -\frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow \Omega\in\Gamma_4$$

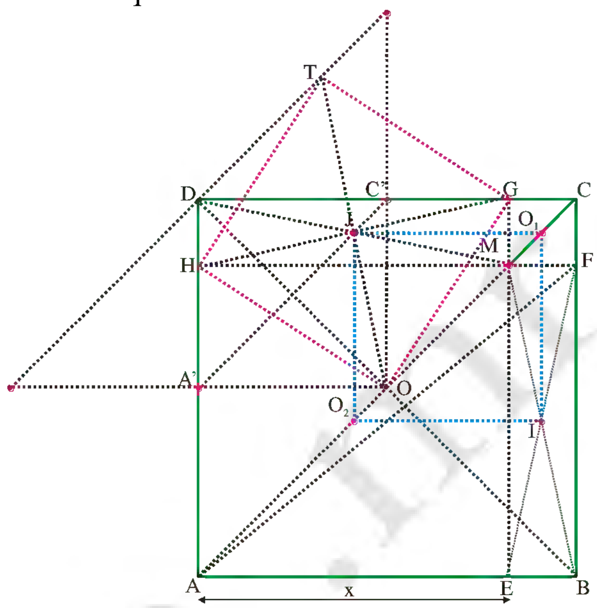
Donc $\forall$M de [AC] les cercles Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 et Γ_4 ; sont concourantes en Ω.

$$4)\ S_{(AC)}:\begin{cases}[FM]\to[GH]\\[ME]\to[MH]\\[GA]\to[FA]\\[CH]\to[CE]\end{cases}$$

Donc les cercles de diamètres [GH] ; [MH] ; [FA]et [CE] restent concourantes quelque soit la position de M sur [AC].

Partie C

1) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions.



$O_2I = IO_1 = O_1J = JO_2 = \dfrac{1}{2}AB.$

$\overrightarrow{O_2I} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IO_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $(AB)\perp(BC) \Rightarrow$

$(O_2I)\perp(JO_1) \Rightarrow (O_2IO_1J)$ est un carré.

2$^{\text{ème}}$ Méthode:

On considère l'homothétie $h_{(M;\frac{1}{2})}$; on a :

$$h:\begin{cases}A\to O_2\\B\to I\\C\to O_1\\D\to J\end{cases}\ ;\ \text{ABCD est un carré} \Rightarrow (O_2IO_1J)$$

est un carré; puis $\text{Aire}\,(O_2IO_1J) = \dfrac{1}{4}\times\text{Aire}\,(ABCD)$

$$= \frac{a^2}{4}$$

2) $h'_{(D;\frac{1}{2})} : M \to J$; Donc si M décrit [AC], alors le lieu géométrique du point J est le segment [A'C'], avec A' = [D*A] et C'= [D*C].

3.a) Soit O = [A*C]. La rotation $r_{(O;\frac{\pi}{2})}$ transforme G en H et la rotation $r'_{(S;\frac{\pi}{2})}$ transforme G en H; alors S = O.

b) Soit A'' = $S_{A'}(S)$ et C'' = $S_{C'}(S)$, alors le lieu géométrique de T est le segment [A''C''].

4.a) $HG^2 = HM^2 + GM^2 = x^2 + (a-x)^2$;

Aire (SGTH) = $SG^2 = (\frac{HG}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}(x^2+(a-x))^2$

b) f(x) = Aire (JSG) = $\frac{1}{4}$ Aire(SGTH) $\Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{1}{8}(x^2+(a-x)^2)$.

c) $f'(x) = \frac{1}{8}(2x - 2(a-x)) = \frac{1}{8}(4x - 2a)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

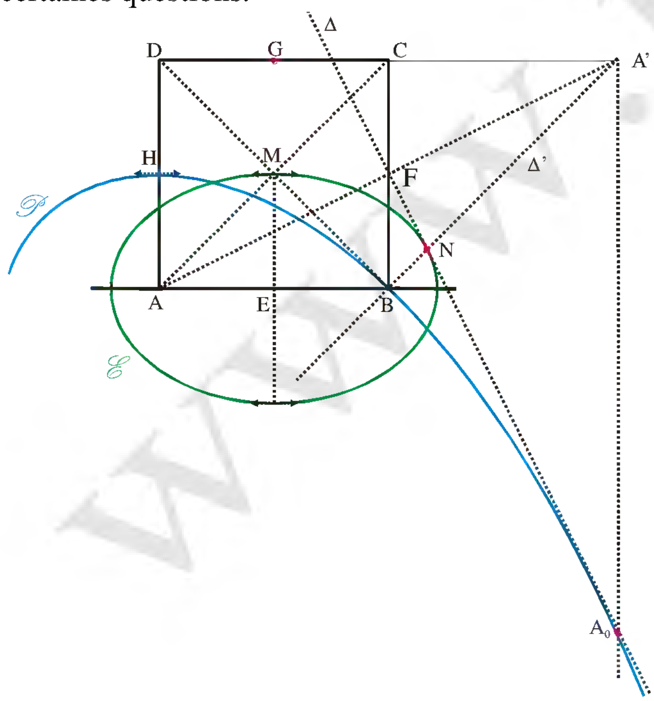
- Tableau de variations

x	0		$\frac{a}{2}$		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f (x)	$\frac{a^2}{8}$	↘	$\frac{a^2}{16}$	↗	$\frac{a^2}{8}$

f est minimale lorsque $x = \frac{a}{2}$ c'est-à-dire M = [A*C].

Partie D

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions.



Le foyer de $\mathscr{P}$ est le point A tel que :

BA = BC = d(B ; (CD)) $\Rightarrow$ B $\in \mathscr{P}$.

b) MA + MB = 2MA = AC = $\sqrt{2}$ a $\Rightarrow$ M $\in \mathscr{P}$.

(ME) $\perp$ (AB) $\Rightarrow$ M est un sommet de ($\mathscr{E}$).

Le 2ème sommet du petit axe est le symétrique de M par rapport à (AB).

Les sommets de l'axe focale sont les points d'intersection de la droite (AB) avec le cercle de centre $E = [A*B]$ et de rayon $MA = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (Voir figure).

2) (FH) = médiatrice [AD] $\Rightarrow$ (FH) est tangente à $\mathscr{P}$ en H.

(FH) passe par M et // à (AB) $\Rightarrow$ (FH) est tangente à ($\mathscr{E}$)en M . Donc (FH) est une tangente commune à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{E}$.

3.a) Soit A' le symétrique de A par rapport à Δ (A' $\in$(DC)) $\Rightarrow$ Δ = médiatrice [AA'].

Soit A_0 le point d'intersection de Δ avec la perpendiculaire en A' à (DC) on a : $A_0 \in \mathscr{P}$, alors Δ est tangente à $\mathscr{P}$ en A_0.

b) (ABA'C) est un parallélogramme $\Rightarrow$(BA')//(AC)

D'autre part (BN)$\perp$(DB) et (AC) $\perp$(DB) $\Rightarrow$

(BN)//(AC) $\Rightarrow$ (BA')//(BN) $\Leftrightarrow$ N$\in$(BA').

De plus on a : $BA' = AC = a\sqrt{2}$; or BA' = NB + NA'

et NA' = NA ; donc NA + NB $= a\sqrt{2} \Rightarrow$ N $\in \mathscr{E}$

Encore : $A'\hat{N}F = F\hat{N}A$ car Δ = médiatrice $[AA']$

et $A_0\hat{N}B = F\hat{N}A \Rightarrow$ Δ est la bissectrice externe

de l'angle $(\overrightarrow{NA} ; \overrightarrow{NB}) \Rightarrow$ Δ est tangente à ($\mathscr{E}$) en N.

c) Voir figure précédente.

Sujet 2005 /Séries : C & TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

(E) : $Z^2+2Z+1-e^{2i\theta}=0$; $\theta\in[0\,;2\pi[$.

1.a) $\Delta = 4-4(1-e^{2i\theta}) = 4e^{2i\theta} = (2e^{i\theta})^2$.

$$Z_1=\frac{2+2e^{i\theta}}{2}=1+e^{i\theta}\ ;Z_2=\frac{2-2e^{i\theta}}{2}=1-e^{i\theta}$$

b) $Z_1 = 1+e^{i\theta} = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$;

$$Z_2 = 1-e^{i\theta} = -2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin(\frac{\theta}{2})e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}.$$

Si $\theta=\pi \Rightarrow Z_1=0$; Si $\theta=0\Rightarrow Z_2=0$

Donc :

$$\text{pour } Z_1\begin{cases}|Z_1|=2\cos\frac{\theta}{2}\ ;\ \arg Z_1=\frac{\theta}{2}\ \text{ si } 0\le\theta\le\pi\\ |Z_1|=-2\cos\frac{\theta}{2};\ \arg Z_1=\frac{\theta}{2}+\pi\ (2\pi)\text{si } \pi<\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$\text{pour } Z_2\begin{cases}|Z_2|=2\sin\frac{\theta}{2};\ \arg Z_2=\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}(2\pi)\text{ si } 0<\theta<2\pi\\ .;..\end{cases}$$

2.a) $M_1\to Z_1 = 1+e^{i\theta}$; $M_2\to Z_2 = 1-e^{i\theta}$;

Soit A le point d'affixe 1.

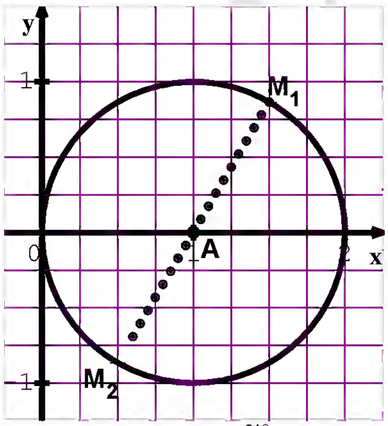
$AM_1 = |Z_1-1| = |e^{i\theta}| = 1$;

$AM_2 = |Z_2-1| = |-e^{i\theta}| = 1$

Donc si θ décrit $[0\,;2\pi[$; alors M1 et M2 décrivent un cercle Γ de centre A(1 ; 0) et de rayon 1.

$\frac{Z_1+Z_2}{2}=1\Rightarrow A=[M_1*M_2]$alors (M_1M_2) passe par le point fixe A.

b) Si $\theta=\frac{\pi}{3}\Rightarrow Z_1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};Z_1=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$



3) (E_n) : $(Z-1)^n-e^{2i\theta}=0$; $\theta\in[0\,;2\pi[$.

a) $(Z-1)^n=e^{2i\theta}$; Soit $z=Z-1\Leftrightarrow Z=z+1$ d'où :

$z^n=e^{2\theta i}$; On pose $z=re^{i\alpha}$ $/r\in\mathbb{R}^*$ et $\alpha\in\mathbb{R}$

$z^n = r^ne^{in\theta}$ Donc $z^n=e^{i2\theta}\Leftrightarrow = r^ne^{in\alpha}=e^{i2\theta}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}r^n=1\\ n\alpha=2\theta+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}r=1\\ \alpha=\frac{2\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\ ;\ 0\le k\le n-1\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$z=e^{i(\frac{2\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})};0\le k\le n-1\Leftrightarrow Z=1+e^{i(\frac{2\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})};0\le k\le n-1$$

Conclusion : les solutions de (E_n) sont les nombres $Z_k=1+e^{i(\frac{2\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})};0\le k\le n-1$.

b) $Z_0+Z_1+Z_2+\cdots+Z_{n-1}=$

$$1+e^{\frac{i2\pi}{n}}+e^{\frac{i2\theta}{n}}\cdot e^{\frac{i2\pi}{n}}+1+e^{\frac{i2\theta}{n}}e^{\frac{4\pi}{n}}+1+\cdots+e^{\frac{i2\theta}{n}}e^{\frac{i2(n-1)\pi}{n}}+1=$$

$$n+e^{\frac{i2\pi}{n}}(1+e^{\frac{i2\pi}{n}}+(e^{\frac{i2\pi}{n}})^2+\cdots+(e^{\frac{i2\pi}{n}})^{n-1})=$$

$$n+e^{\frac{i2\pi}{n}}(\frac{1-(e^{\frac{i2\pi}{n}})^n}{1-e^{\frac{i2\pi}{n}}})=n+0=n\cdot$$

D'où $Z_0+Z_1+Z_2+\cdots+Z_{n-1}=n$

c) M_k : $Z_k = 1+e^{i(\frac{2\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})};0\le k\le n-1$

$$AM_k=|Z_k-1|=\left|e^{i(\frac{2\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}\right|=1\Leftrightarrow M_k\in\Gamma.$$

d) $S_n = M_0M_1+M_1M_2+\ldots\ldots+M_{n-1}M_n$ d'où

$$M_{k-1}-M_k=|Z_k-Z_{k-1}|=\left|e^{i(\frac{2\theta}{n})}(e^{i(\frac{2k\pi}{n})}-e^{i(\frac{2(k-1)\pi}{n})})\right|$$

$$=\left|e^{i(\frac{2\theta}{n})}\right|\left|e^{i(\frac{2k\pi}{n})}(1-e^{i(\frac{2\pi}{n})})\right|=\left|2i\sin\frac{\pi}{n}e^{i(\frac{-\pi}{n})}\right|S_n$$

$$=2\sin\frac{\pi}{n}\Rightarrow$$

$= M_0M_1+M_1M_2+\ldots\ldots+M_{n-1}M_n$

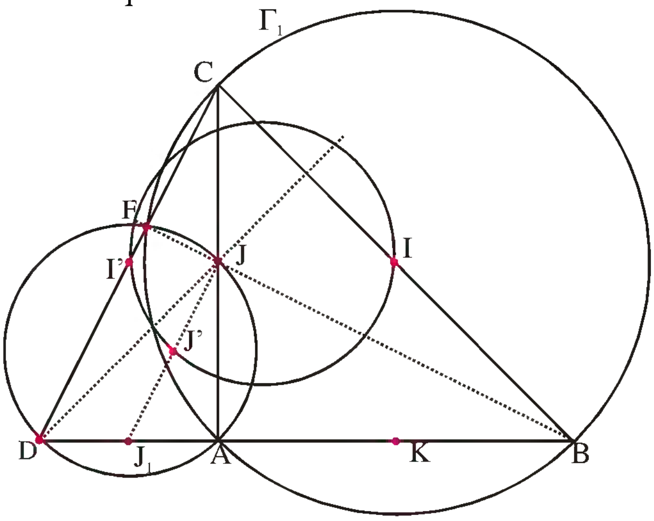
$$=2\sin\frac{\pi}{n}+2\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+2\sin\frac{\pi}{n}\Rightarrow$$

$$S_n=2n\sin\frac{\pi}{n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}2n\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to+\infty}2\pi\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=2\pi\cdot$$

- Interprétation: La somme des distances entre les points (M_k) lorsque n est assez grand est égale au périmètre du cercle $\Gamma_{(A\,;\,1)}$.

Exercice 2

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions.



b) r(B) = C ; r(J) = D $\Rightarrow \begin{cases} BJ = CD \text{ et} \\ (\overrightarrow{BJ}\ ;\ \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow$

(BJ) $\perp$(CD) .

c) $S_{(A;\ \frac{\pi}{2};\frac{1}{2})}$; S(B) = J et S(C) = D $\Rightarrow$

$\begin{cases} JD = \frac{1}{2}BC \text{ et} \\ (\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{JD}) = \frac{\pi}{2}(2\pi) \end{cases} \Rightarrow (BC) \perp (JD)$

d) (BJ) $\perp$(CD) $\Rightarrow$ (BJ) est la hauteur issue de B dans le triangle BCD.

- (DJ)$\perp$(BC) $\Rightarrow$ (DJ) est la hauteur issue de D dans le triangle (BCD).
  J appartient à deux hauteurs du triangle (BCD) donc J est l'orthocentre du traingle (BCD).

2) Les traingles (AJD) et (DFD) sont rectangles en A et F respectivement et de même hypoténuse [JD] donc les points A ; J ; F et D sont cocycliques.

Les traingles (ABC) et (FBC) sont rectangles en A et F respectivement et de même hypoténuse [BC] donc les points A ; B ; C et F sont cocycliques.

3) I = [B*C] $\Rightarrow$S(I) = S([B*C])$\Leftrightarrow$ S(I) = [J*D] $\Leftrightarrow$ Γ_1 est le cercle de diamètre [BC] $\Rightarrow$ S(Γ_1) est le cercle de diamètre [JD] $\Rightarrow$ le lieu géométrique du point M' est le cercle de diamètre [JD] lorsque M décrit Γ_1.

4.a) $MM'^2 = AM^2 + AM'^2 = AM^2 + \frac{1}{4}AM^2 = \frac{5}{4}AM^2$

$\Leftrightarrow AN = \frac{\sqrt{5}}{4}AM \Leftrightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{4}AM^2$.

D'après Alkhashi on a:

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AMAN\cos(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AN}) \Leftrightarrow$

$\frac{5}{4}AM^2 = AM^2 + \frac{5}{4}AM^2 - 2AM\frac{\sqrt{5}}{4}AM\cos(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AN}) \Leftrightarrow$

$\frac{5}{4} = 1 + \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}\cos(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AN}) \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{5}}{2}\cos(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AN}) = 1 \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AN}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

la mesure de α de l'angle $(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AN})$ est constante.

b) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) On a : $\begin{cases} AN = \frac{\sqrt{5}}{4}AM \text{ et} \\ (\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AN}) = \alpha\ (2\pi) \end{cases}$

Donc N est l'image de M par une similitude de :

centre A ; de rapport $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et d'angle α.

d) Le lieu géométrique Γ de N lorsque M décrit Γ_1 est le cercle passant les points I ; I' =[C*D] ; J'= [J*J_1] avec J_1 =[A*D] (Voir figure).

Problème

Partie A

$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots\cdots + (-1)x^n$

1.a) $S_n^{'} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $S_n(x)$.

b) $\forall$ x $\neq$-1 ; $\forall$ n $\geq$ 2 ; $S_{n-1}(x)$ est la somme de n termes d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison –x, donc on a :

$S_{n-1}(x) = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} \Leftrightarrow$

$S_{n-1}(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$ (1)

2.a) $S_{n-1}(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)t^n}{1+t} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \int_0^1 (1-t+t^2+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1})dt + \int_0^1 \frac{(-1)t^n}{1+t})dt$$

$$\Leftrightarrow [\ln(1+t)]_0^x = \left[t - \frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}t^n\right]_0^x + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \Leftrightarrow$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}x^n + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \qquad (2)$$

b) $\forall\ x > 0$; on a :

- Si n= 2 ; $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \Rightarrow$

  $\ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2}) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \geq 0$

  $(x - \frac{x^2}{2}) \leq \ln(1+x)$.

- Si n= 3 ; $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} - \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \Rightarrow$

  $\ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}) = -\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \leq 0 \Leftrightarrow$

  $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Donc : $(x - \frac{x^2}{2}) \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

- $\forall x\in]-1;0[$; $\ln(1+x) - (x - \frac{1}{2}x^2) = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \leq 0$

  (car $x < 0$) $\Rightarrow \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2$

- $\ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}) = -\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \geq 0 \Leftrightarrow$

  $x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} \leq \ln(1+x)$ Donc :

  $x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$.

c) Si $x > 0$: On a :

$$-\frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

- Si $x \in\ ]-1\ ;0[$;

$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3 \leq \ln(1+x)-x \leq -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Donc $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Partie B

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x};\ x \in\ ]0\ ;+\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1.a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$;

Donc f est continue en $x_0 = 0$.

b) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f_d'(0) = -\frac{1}{2}$

2) $u(x) = x - (x+1)\ln x + 1)$.

a) $u'(x) = 1 - [\ln(1+x) + (x+1)\times\frac{1}{x+1}] \Leftrightarrow$

$u'(x) = 1 - \ln(1+x) - 1 = -\ln(1+x)$.

- Tableau de variations

x	0	0	$+\infty$
u'(x)	+	0	-
u (x)	↗	0	↘

D'après le T.V de u on a : $\forall$ x> -1 ; $u(x) \leq 0$

b) $\forall\ x\in]-1\ ;0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$;

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\times x - 1\times\ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{u(x)}{x^2(1+x)}$$

c) Tableau de variations de f

x	-1	$+\infty$
f'(x)	-	
f(x)	$+\infty$ ↘	0

Partie C

$$\begin{cases} g(x) = f(\frac{1}{x}) = x\dfrac{\ln(1+x)}{x};\ x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1.a) $\frac{1+x}{x} > 0$; $x \in\ ]-\infty\ ;-1[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$ et $g(0) = 0$

Donc $D_g =]\ -\infty\ ;\ -1[\ \cup [\ 0\ ;\ +\infty[$.

b) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$.

Soit $X = \frac{1}{x}$; $x \to 0^+ \Leftrightarrow X \to +\infty$ d'où

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln(1+X)}{X} = 0 = g(0)$$

Donc g est continue en $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \ln(\frac{1+x}{x})}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \ln(\frac{1+x}{x}) = +\infty$$

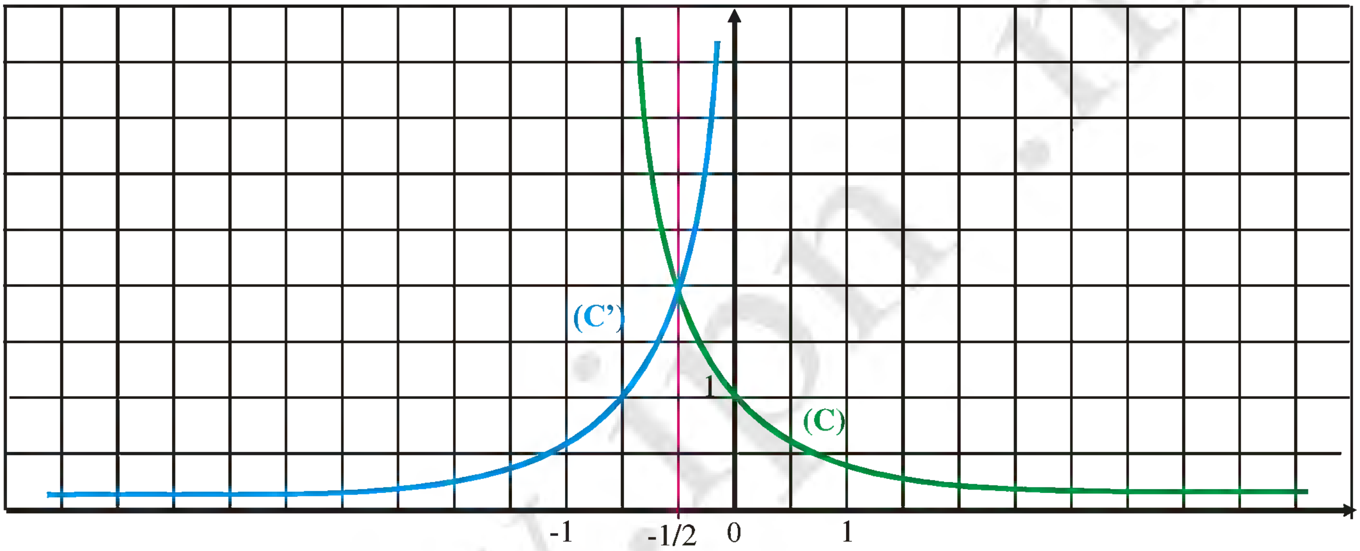
Donc g est dérivable en $x_0 = 0$.

2.a) $g'(x) = \frac{-1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) > 0$; donc g est croissante sur Dg.

b) Tableau de variations de g

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
g'(x)	+			+
gx)	1 ↗ $+\infty$		0 ↗ 1	

c) Représentation graphique de (C)



3) (C) : $y = g(x) = x\ln(\frac{1+x}{x})$:

On a : $\begin{cases} x = -x'-1 \\ y = y' \end{cases}$; C' =σ (C) ⇒

$y' = (-x'-1)\ln(\frac{1-x'-1}{-x'-1}) \Leftrightarrow y' = -(x'+1)\ln(\frac{x'}{x'+1}) \Leftrightarrow$

$y' = (x'+1)\ln(\frac{x'+1}{x'})$

Donc $h(x) = (x+1)\ln(\frac{x+1}{x})$.

$$g(-x-1) = (-x-1)\ln(\frac{1-x-1}{-x-1}) = -(x+1)\ln(\frac{x}{x+1})$$
$$= (x+1)\ln(\frac{x+1}{x}) \Rightarrow$$

$h(x) = g(-x-1)$.

b) $h'(x) = -g'(-x-1) < 0$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$ -1		0 $+\infty$
h'(x)	-		-
h(x)	1 ↘ 0		$+\infty$ ↘ 1

c) On a : $x' + iy' = -x + iy -1 \Leftrightarrow Z' = -\overline{Z} -1$ et c'est l'écriture complexe de σ.

$M' = M \Leftrightarrow Z' = Z \Leftrightarrow Z = -\overline{Z} -1 \Leftrightarrow Z+\overline{Z} = -1 \Leftrightarrow$ $2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

L'ensemble des points invariants par σ est la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$. et σ est un antidéplacement d'après son écriture complexe. Donc σ est la réflexion d'axe Δ d'équation : $x = -\frac{1}{2}$ ⇒(C') est l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe Δ : $x = -\frac{1}{2}$ (Voir figure).

4) $U_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$; $\forall n \geq 2$.

a) D'après le T.V de g on a :

$\forall n \geq 2$; $g(x) \leq 1$ et d'après celui de h on a :

$\forall n \geq 2$; $h(x) \geq 1$ donc :

$\forall n \geq 2$; $g(x) \leq 1 \leq h(x) \Rightarrow$

$n\ \ln(\frac{1+n}{n}) \leq 1 \leq (n+1)\ln(\frac{n+1}{n}) \Leftrightarrow$

$n\ \ln(\frac{1+n}{n}) \leq \ln e \leq (n+1)\ln(\frac{n+1}{n}) \Leftrightarrow$

$(1+\frac{1}{n})^n \leq e \leq (1+\frac{1}{n})^{(n+1)} \Leftrightarrow U_n \leq e \leq V_n$

b) $\forall n \geq 2$; On a : $1 \leq \frac{e}{U_n} \leq \frac{V_n}{U_n} \Leftrightarrow$

$$1 \leq \frac{e}{U_n} \leq \frac{(1+\frac{1}{n})^{(n+1)}}{(1+\frac{1}{n})^n} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{e}{U_n} \leq 1+\frac{1}{n} \Rightarrow$$

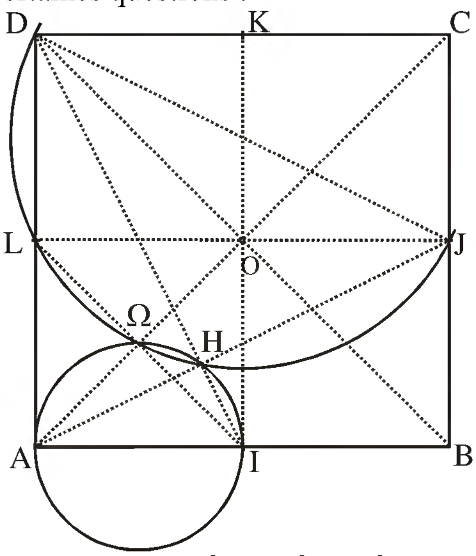
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = e$.

c) (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante d'une part et $U_n < e < V_n$ d'autre part donc (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Sujet 2004 /Séries : C & TMGM / Session normale

Exercice 1

1) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



2.a) Comme : $AJ^2 = AB^2 + BJ^2$

$= AD^2 + AI^2 = ID^2$

Donc AJ = ID ; Or $\overrightarrow{AJ} \neq \overrightarrow{ID}$ d'où il existe une unique rotation r_1 qui : $r : \begin{cases} A \mapsto I \\ J \mapsto D \end{cases}$

b) $R(\overrightarrow{AJ}) = R(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}) = R(\overrightarrow{AB})+R(\overrightarrow{BJ}) = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{ID}$

Donc $(\overrightarrow{AJ}\ ;\ \overrightarrow{ID}) = \frac{\pi}{2}$ d'où l'angle de r_1 est $\frac{\pi}{2}$.

i) **Méthode 1 :**

Le cercle de diamètre [AI] contient H et Ω ;

Le cercle de diamètre [JD] contient H et Ω ;

Cela donne la position de Ω car Ω ≠ H.

ii) **Méthode 2:**

Comme: r_1 (L) = A ; $R(\overrightarrow{AL}) = R(\overrightarrow{BJ}) = \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA}$;

$r_1 o\ r_1$ (L) = r_1 (A) = I; Or $r_1 o\ r_1$ est une rotation d'angle π de centre Ω Donc Ω est le milieu de [IL] c'es(-à-dire (Ω∈(IL).

iii) **Méthode 3:**

On a : $r_1 = S_{AC}\ o\ S_\Delta \Leftrightarrow S_\Delta = S_{AC}\ o\ r_1$, Or

$S_{AC}\ o\ r_1$ (A) = S_{AC} (I)= L Donc Δ est la médiatrice de [AL].

D'autre part : Δ // (DC) ; Δ coupe (AD) en bar {(A ; 2) ; (L ; 2)} = bar {(A ; 3) ; (D ; 1)} et

Δ ∩ (AC) = Ω d'où Ω = bar {(A ; 3) ; (C ; 1)}

(α = 3 ; ϒ = 1 par exemple).

3.a) Comme $r_1 : \begin{cases} A \mapsto I \\ B \mapsto A \\ J \mapsto I \\ L \mapsto K \end{cases}$ Donc l'image du rectangle ABJL par r_1 est le rectangle IKDA.

b) g est la réflexion S_{AC} ; Or $g : \begin{cases} A \mapsto A \\ B \mapsto D \\ J \mapsto K \\ L \mapsto I \end{cases}$ Donc l'image du rectangle ABJL par g est le rectangle ADKI.

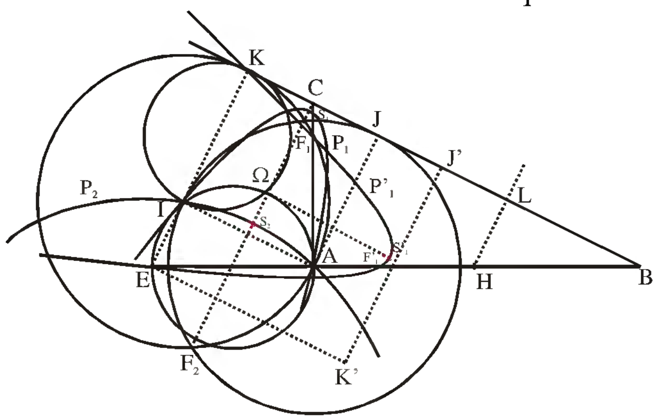
c) Comme $\begin{cases} (JL) \cap (AC) = O \\ 2(\overrightarrow{AC}\ ;\overrightarrow{JL}\ ) = 2(\overrightarrow{OC}\ ;\overrightarrow{OJ}\ ) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc r_2 est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Or, $r_2 : \begin{cases} A \mapsto D \\ B \mapsto A \\ J \mapsto I \\ L \mapsto K \end{cases} \Rightarrow$ L'image du rectangle ABJL par r_2 est le rectangle DAIK.

Exercice 2

1) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



2.a) Comme :

$\begin{cases} AE = AH = \frac{1}{2}AB = AC \\ (\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) - \pi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Donc r(E) = C d'où l'image de la droite (EK) par r est la perpendiculaire à (EK) passant par C qui est la droite (BC).

b) Comme : le quadrilatère AIKJ a trois angles droit donc $(AI) \perp (AJ)$ Or, r(A) = A d'où l'image de la droite (AI) par r est la droite (AJ), or :

$\{I\} = (EK) \cap (AI)$ et $\{J\} = (BL) \cap (AJ)$

Donc r(I) = J.

c) Comme : $\left| \begin{array}{l} AC = \frac{1}{2}AB = AH \\ (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AH}) = (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

Donc r(C) = H , or $C \in (BL)$ d'où l'image de la droite (BC) par r est la droite Δ perpendiculaire à (BC) passant par H.

d) Comme $\{K\} = (EK) \cap (BC)$:

Donc : $\{L\} = (BC) \cap \Delta$.

Puis $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$ et (HL) || (EK) et B ; L ; K alignés d'où $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BK}$.

3) Comme $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ donc le rapport de h est $\frac{3}{2}$.

En plus : (AJ) //(EK) d'où h((AJ))= (EK) or h((BC)) = ((BC)) d'où h(J) = K.

4) Comme r est une similitude directe et h est une similitude directe donc S est une similitude directe.

En plus le rapport de r est 1, son angle est $-\frac{\pi}{2}$, le rapport de h est $\frac{3}{2}$ son angle est 0 d'où le rapport de S est $\frac{3}{2}$ et son angle est $-\frac{\pi}{2}$.

On a : S(I) = h o r (I) = h(J) = K;

S(A) = h o r (A) = E d'où $(\overrightarrow{\Omega I}\ ;\ \overrightarrow{\Omega K}) = (\overrightarrow{\Omega A}\ ;\ \overrightarrow{\Omega E}) = -\frac{\pi}{2}$ donc Ω appartient aux deux cercles de diamètres respectifs [AE] et [IK].

5) L'ensemble des foyers des paraboles passant par :

- A, de directrice (BC) est le cercle de centre A et de rayon AJ privé de J.
- I, de directrice (BC) est le cercle de centre I et de rayon IK privé de K.

Or AI < AJ + IK (car AIJK est un carré) d'où les deux cercles ont deux points d'intersections F_1 et F_2 d'où il existe deux paraboles P_1 et P_2 de foyers F_1 et F_2 , de directrices (BC) solution du problème.

Le foyer, le sommet et la directrice de la parabole (P_1') sont les images par S du foyer, du sommet et de la directrice de la parabole (P_1) en plus avec KEJ'K' un carré direct on a [J'K'] est la directrice de (P_1').

Problème

Partie A :

1.a) n = 1 ;

- Continuité de f_1
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x(1 + \ln x)) = \lim\limits_{x \to 0^+}[x + x\ln x]$
  $= 0 = f_1(0)$

  Donc f_1 est continue en $x_0 = 0$.
- Dérivabilité de f_1

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+}(1 + \ln x) = -\infty$ donc f_1 n'est pas dérivable à droite de $x_0 = 0$ et C_1 admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

- n > 1 ; Continuité de f_n

  $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(x^n + x^n \ln x) = 0 = f_n(0)$

  Donc f_n est continue en $x_0 = 0$ à droite.
- Dérivabilité de f_n

  $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+}(x^{n-1} + x^{n-1}\ln x) = 0$

  donc f_n est dérivable à droite de $x_0 = 0$. et C_n admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$; $f'_1(x) = 1(1 + \ln x) + x\frac{1}{x}$

$= 2 + \ln x$.

$f'_1(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$.

- Tableau de variations de f_1

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	-	0	+	
f_1 (x)	0	↘	$-e^{-2}$	↗	$+\infty$

- n > 1 ; $f'_n(x) = nx^{n-1}(1 + \ln x) + x^n(\frac{1}{x})$

  $= x^{n-1}(n\ln x + n + 1)$.

  $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x = -(\frac{n+1}{n}) \Leftrightarrow$

  $x = e^{-(1+\frac{1}{n})}$.

- Tableau de variations de f_n

x	0		$e^{-(1+\frac{1}{n})}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$f_n(e^{-(1+\frac{1}{n})})$	$\nearrow$	$+\infty$

2) L'ordonnée d'un point d'abscisse x de C_n est indépendante de n si et seulement si x^n est indépendant de n ou $1 + \ln x = 0$ c'est-à-dire $x= 0$ ou $x = 1$ ou $x =\frac{1}{e}$ d'où Cn passe par trois points fixes qui sont $O(0 ; 0)$; $A(1 ; 1)$; $B(e^{-1} ; 0)$.

3) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x^{n+1}- x^n)(1 + \ln x)$
$= x^n(x -1)(1 +\ln x)$.

Le tableau suivant donne la position relative

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
x^n	0	$+$		$+$		$+$	
$x -1$		$-$		$-$	0	$+$	
$1 + \ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		$+$		$-$		$+$	
P.relative	$\bullet$	C_{n+1} / C_n	$\bullet$	C_n / C_{n+1}	$\bullet$	C_{n+1} / C_n	

4) Tableau de correspondance

Courbe	Fonction
(E)	f_1
(F)	f_2
(G)	f_3

Partie B

1) $y_n = f_n(x_n) = x_n^n (1 + \ln x_n) = e^{-(n+1)}(1 - 1 - \frac{1}{n})$

$= \frac{1}{n} e^{-(n+1)}$.

On a : $M_n(x_n ; y_n)$ où $x_n = e^{-(1+\frac{1}{n})}$ et $y = -\frac{1}{n}e^{-(n+1)}$

Or $x = e^{-(1+\frac{1}{n})} \Leftrightarrow -1 -\frac{1}{n} = \ln x \Leftrightarrow -\frac{1}{n} = 1 + \ln x$ et

$n = \frac{-1}{1 + \ln x}$ d'où $y = (1 + \ln x)e^{\frac{1}{1+\ln x}-1}$

$= (1 + \ln x)e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}$ donc le point M_n appartient à une branche de courbe de la fonction $\varphi(x) = (1 + \ln x)e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}$.

2) On a : $n + 1 \geq n$; $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{n+1} \leq 1+\frac{1}{n} \Rightarrow$

$-(1+\frac{1}{n+1}) \geq -(1+\frac{1}{n}) \Rightarrow e^{-(1+\frac{1}{n+1})} \geq e^{-(1+\frac{1}{n})} \Rightarrow$

$V_{n+1} \geq V_n$ d'où (V_n) est croissante.

En plus, on a : $-(1+\frac{1}{n}) \leq 0$ d'où $x_n \leq e^0$; $x_n \leq 1$

Donc (U_n) est majorée par 1.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = e^{-\infty} = 0; \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} M_n = O\cdot$

4.a) $U_n = \int_{e^{-1}}^{1} f_n(x)dx = \int_{e^{-1}}^{1} x^n(1 + \ln x)dx$;

On pose : $\begin{cases} u(x) = 1 +\ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \\ V'(x) = x^n \Rightarrow v(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases}$

$$U_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(1 +\ln x)\right]_{e^{-1}}^{1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_{e^{-1}}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}\right] - 0 - \left[\frac{1}{(n+1)^2}\right] + \left[\frac{1}{(n+1)^2}e^{-(n+1)}\right]$$

$$U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}e^{-(n+1)} \Rightarrow$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0\cdot$ Donc sur $[e^{-1} ; 1]$ on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = (Ox)\cdot$

b) $\forall x\in[e^{-1} ; 1]$; $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0 \Leftrightarrow$
$f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \Leftrightarrow U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow (U_n)$ est décroissante.

D'autre part, $\forall x\in[e^{-1} ; 1]$; $1 + \ln x \geq 0 \Rightarrow$
$f_n(x) \geq 0 \Rightarrow U_n \geq 0$.

Comme : (Un) est positive et décroissante donc elle est convergente.

Partie C

1) $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{e})^-} g(x) = 0e^{\frac{1}{0}} = 0(0) = 0 = g(\frac{1}{e})$

Donc g est continue à gauche de $\frac{1}{e}$.

$\lim\limits_{x\to(\frac{1}{e})^+} g(x) = F.I.$ On pose $X = \frac{-\ln x}{1+\ln x}$ on a :

$\begin{cases} X \to +\infty \text{ ; } X+X\ln x = -\ln x \\ \ln x = \frac{-X}{1+X} \end{cases} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{e})^+} g(x) = \lim_{X\to+\infty}\left[(1-\frac{X}{1+X})e^X\right]$$

$$= \lim_{X\to+\infty}\left[\frac{e^X}{1+X}\right] = \frac{e^X}{X}\left(\frac{1}{\frac{1}{X}+1}\right) = +\infty \cdot$$

Don g n'est pas continue, ni dérivable à droite en $\frac{1}{e}$.

Par contre g est dérivable à gauche en $\frac{1}{e}$ car on a :

$$\lim_{x\to(\frac{1}{e})^-} \frac{g(x)-g(\frac{1}{e})}{x-\frac{1}{e}} = \lim_{x\to(\frac{1}{e})^-}\left[\left(\frac{\ln x - \ln\frac{1}{e}}{x-\frac{1}{e}}\right)e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}\right]$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{e}}(0) = 0 \cdot$$

D'où Γ admet une demi-tangente horizontale d'abscisse $\frac{1}{e}$.

La continuité de g à gauche de $x_0 = \frac{1}{e}$ résulte de la dérivabilité en ce point.

2) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \left[(1+\ln x)e^{\frac{-1}{\frac{1}{\ln x}+1}}\right] = (+\infty)(e^{-1}) = +\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x})e^{\frac{-1}{\frac{1}{\ln x}+1}}\right] = (0)(e^{-1}) = 0$$

Donc Γ a une branche parabolique de direction (Ox) lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[(1+\ln x)e^{\frac{-1}{\frac{1}{\ln x}+1}}\right] = (-\infty)(e^{-1}) = -\infty$$

D'où x= 0 est une asymptote verticale à Γ.

3) $g'(x) = \frac{1}{x}e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}} + (1+\ln x)\left(\frac{\frac{-1}{x}(1+\ln x)-\frac{1}{x}(-\ln x)}{(1+\ln x)^2}\right)e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}$

$$= \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x(1+\ln x)}\right)e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}} = \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}} .$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; Or $x > 0$ et $e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}} > 0$

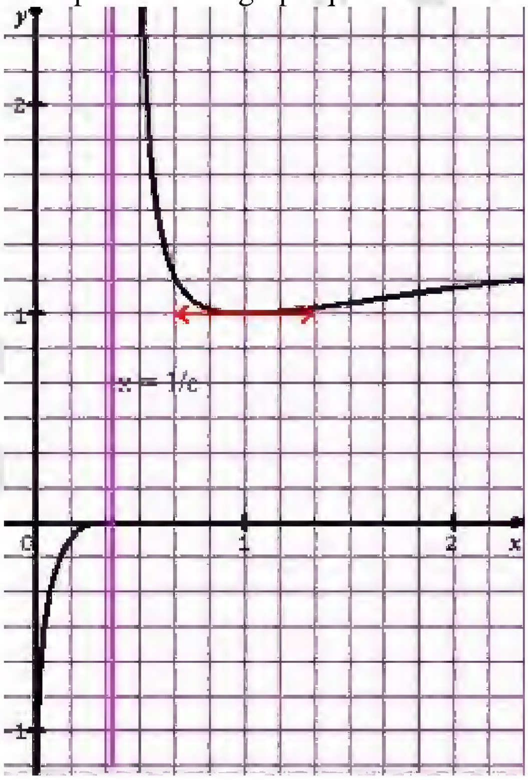
D'où le tableau de signe suivant :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
lnx	‖	-	‖	-	0	+	
1 +lnx	‖	-	‖	+	⋮	+	
g'(x)	‖	+	‖	-	⋮	+	

4) Tableau de variations de g

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
g'(x)	‖	+	‖	-	0	+	
g (x)	‖ $-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

- Représentation graphique de Γ



5.a) $f_n(x) = g(x) \Leftrightarrow (1 + \ln x)\,(x^n - e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}) = 0 \Leftrightarrow$

$1 + \ln x = 0$ ou $x^n = e^{\frac{-\ln x}{1+\ln x}}) \Leftrightarrow$

$x = e^{-1}$ ou $n\ln x = \frac{-\ln x}{1+\ln x}$.

$n\ln x = \frac{-\ln x}{1+\ln x} \Rightarrow (\ln x)(n + \frac{1}{1+\ln x}) = 0 \Leftrightarrow$

$\ln x = 0$ ou $n + \frac{1}{1+\ln x} = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ou $\ln x = -(1 + \frac{1}{n}) \Leftrightarrow x = e^{-(1+\frac{1}{n})}$; Or

$f_n(e^{-1}) = 0$; $f_n(1) = 1$; $f_n(e^{-(1+\frac{1}{n})}) = \frac{-1}{n}e^{-(n+1)}$;

Finalement on a :

$\Gamma \cap C_n = \{(e^{-1}; 0) ; (1; 1) ; (e^{-(1+\frac{1}{n})}; \frac{-1}{n}e^{-(n+1)})\}$.

b) Le troisième point est le point M_n de la partie B

- si $n = 1$, alors l'abscisse de M_n est e^{-2} et $M_n \in \Gamma$
- $n = 2$ alors, abscisse de M_n est $e^{-\frac{3}{2}}$ et $M_n \in \Gamma$.

Sujet 2004 /Séries : C & TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

1.a) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3-2\\2+3\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}3-3\\-5-2\\0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-7\\-3\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3-2\\2-5\\3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\7\end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}=(1)(1)+(-3)(5)+(7)(2)=1-15+14=0$

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB}=(1)(0)+(-3)(-7)+(7)(-3)=21-21=0$

Or $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DB}$ ne sont pas colinéaires :
(car qui : $x_{\overrightarrow{AD}}\neq 0$)et sont dans le plan (ABD) donc la droite (CD) est orthogonale au plan (ABD).

2.a) Comme (CD) $\perp$ plan (ABD) $\Rightarrow$ (AB) $\perp$ (CD), Or (AB) $\perp$ (CH) d'où (AB) $\perp$plan (CDH).

b) Un vecteur normal du plan (CDH) est : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\-5+3\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$l'équation de (CDH) est :

x -2y – z + d = 0 ; d$\in\mathbb{R}$; Or C$\in$(CDH) d'où 2 – 10 + 4 + d = 0 $\Rightarrow$ d = 4$\Rightarrow$ l'équation de(CDH) est : x -2y - z + 4 = 0.

Un vecteur directeur de la droite (AB) est : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et A$\in$(AB) d'où l'équation de (AB) est :

$$(AB) : \begin{cases}x=2+t\\ y=-3-2t \quad ;t\in\mathbb{R}\\ z=1-t\end{cases}$$

c) {H}= (DH) $\cap$ (AB) donc, avec t le paramètre de H, on a : 2 + t -2(3-2t) –(1 –t) + 4 = 0 $\Rightarrow$

$t=-\dfrac{11}{6}$ d'où $x_H=2-\dfrac{11}{6}=\dfrac{1}{6}$; $y_H=-3+\dfrac{11}{3}=\dfrac{2}{3}$;

$z_H=1+\dfrac{11}{6}=\dfrac{17}{6}$.

3.a) AB = $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

CD = $\|\overrightarrow{CD}\|=\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(+7)^2}=\sqrt{59}$

$\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}-3\\ \frac{2}{3}-2\\ \frac{17}{6}-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-17}{6}\\ \frac{-4}{3}\\ \frac{-1}{6}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

DH = $\|\overrightarrow{DH}\|=\dfrac{\sqrt{289+64+1}}{6}=\dfrac{\sqrt{354}}{6}$ $\Rightarrow$

V = $\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}\times AB\times DH)\times CD=\dfrac{1}{36}\sqrt{6\times 59\times 354}$

b) V = $\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}\times AB\times CH)\times \text{distance}(D,\text{plan}(ABC))$

(car (CH) $\perp$(AB)) $\Rightarrow$

distance (D, plan (ABC)) = $\dfrac{6V}{AB\times CH}$ Or ,

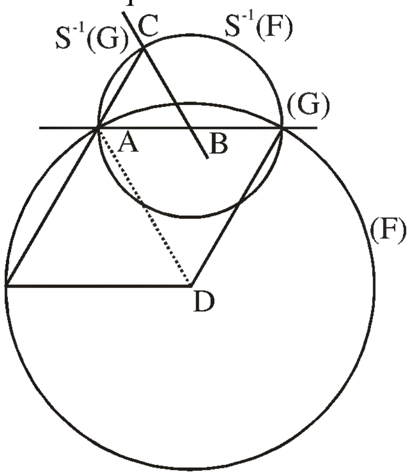
$\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}-2\\ \frac{2}{3}-5\\ \frac{17}{6}+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-11}{6}\\ \frac{-13}{3}\\ \frac{41}{6}\end{pmatrix}$ et

CH = $\dfrac{\sqrt{(-11)^2+(-26)^2+(41)^2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2478}}{6}$

$\Rightarrow$ distance (D, plan (ABC)) est égale à $\dfrac{\sqrt{5}}{7}$.

Exercice 2

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



b) D = bar {(A ; -1) ; (B ; -2); (C; 2)}⇔ $\overrightarrow{AD} = +2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ ⇔ $-\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

⇔ $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires d'où (BC) // (AD).

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}) =$

$$BA^2 - 2BA \times BC \cos\frac{\pi}{3} = a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow$$

ABD est rectangle en B.

2.a) $f(A) = -0 - 2AB^2 + 2AC^2 = -2a^2 + 2a^2 = 0$

b) f(M) est un scalaire de Leibniz avec :
D = bar {(A ; -1) ; (B ; -2); (C; 2)}⇔
$f(M) = (-1 - 2 + 2)MD^2 + f(D) = -MD^2 + f(D)$.
Comme : D = bar {(A ; -1) ; (B ; -2); (C; 2)}⇔

$$f(D) = \frac{2AB^2 - 2AC^2 - 4BC^2}{-1} = 4a^2 \Rightarrow$$

$$f(M) = -MD^2 + 4a^2.$$

c) f(M) = 0 ⇔ MD = 2a = DA donc (F) est le cercle de centre D passant par A.

3.a) $g(M) = a^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$
D'où (G) est la perpendiculaire à (BD) passant par A qui est la droite (AB).

b) Comme E∈(F) ⇒ DE = DA , Or (DB) ⊥(AE) (car E ∈(G)) Donc (DB) est la médiatrice de [AE], Or

$$(\overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD} ; \overrightarrow{BC}) + \pi$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi \Rightarrow (\overrightarrow{DE} ; \overrightarrow{DA}) = \frac{\pi}{3}$$

⇒ le triangle ADE est équilatéral.

c) Comme E∈(G) et (BD) ⊥(AB) et E∈(F) donc B est le milieu de [EA], Or, BA = BC = d'où BA = BC = BE donc le triangle ACE est rectangle en C.

4.a) L'angle de S est :

$$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3}$$

Le rapport de S est : $\frac{AD}{AB} = \frac{2BC}{BC} = 2$.

b) Comme : S : $\left|\begin{array}{l} A \mapsto A \\ B \mapsto D \\ C \mapsto C' \end{array}\right.$ et ABC est équilatéral direct d'où ADC' est équilatéral direct.
Or, ADE est équilatéral direct, Donc C' = E.

c) Comme : S^{-1} : $\left|\begin{array}{l} A \mapsto A \\ D \mapsto B \\ E \mapsto C \end{array}\right.$ ⇔

$F' = S^{-1}((F))$ est le cercle decentre B passant par A, et $G' = S^{-1}((G))$ est la droite(AC).

Problème

Partie I

1.a) Etude de variations de f

- $D_f =]-\infty ; +\infty[$;
- lmites aux bornes de D_f

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - 0 = -\infty$;

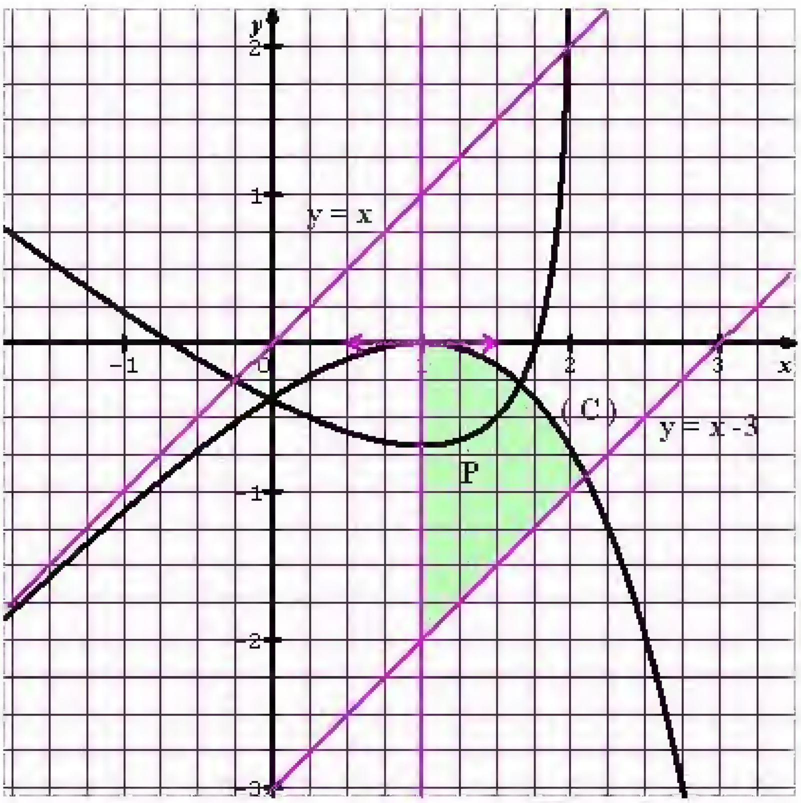
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x(1 - (\frac{e^x}{x})e^{-1})\right] = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

- Dérivée de f
  $f'(x) = 1 - e^{x-1}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = \ln 1 = 0$ ⇔ x = 1.
- Tableau de variations

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f (x)	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x) = -\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}) = 0 \Rightarrow \Delta$ est une asymptote à (C), elle est au dessous de Δ.

c) Représentation graphique de (C).



2.a) $f(x) - y = x - e^{x-1} - x + 3 = -e^{x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow$
$x - 1 = \ln 3 \Leftrightarrow x = 1 + \ln 3$.

x	$+\infty$	$1 + \ln 3$	$+\infty$
f(x) - x	+	0	-
P. relative	C / Δ_1	●	Δ_1 / C

b) $A = \int_1^{1+\ln 3}(f(x) - y)dx = \int_1^{1+\ln 3}(-e^{x-1} + 3)dx$

$= \left[-e^{x-1} + 3x\right]_1^{1+\ln 3}$

$= [-3 + 3 + 3\ln 3] - [-1 + 3]$

$= 3\ln 3 - 2.$

Partie II

1) Comme : $-\frac{1}{2}(1+i) \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ donc S est une similitude directe de centre le point d'affixe :

$\frac{2}{1 + \frac{1}{2}(1+i)} = \frac{4}{3+i} = \frac{2}{5}(3-i)$; Or

$-\frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\pi)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i(\frac{3\pi}{4})}$

d'où le rapport de S est : $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et son angle est : $-\frac{3\pi}{4}(2\theta)$.

2) $Z' = -\frac{1}{2}(1+i)Z + 2 \Leftrightarrow$

$x' + iy' = -\frac{1}{2}(1+i)(x+iy) + 2$

$= -\frac{1}{2}(x + iy + ix - y) + 2) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 \\ y' = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow x' + y' = -x + 2 \Leftrightarrow$

$x = 2 - x' - y'$, Or $2y' = -x - y$ d'où

$y = -x - 2y' = -2 + x' + y' - 2y' \Rightarrow y = -2 + x' - y'$

Donc on a : $\begin{cases} x = 2 - x' - y' \\ y = -2 + x' - y' \end{cases}$

3) $S((\Delta_0))$ a pour équation : $2 - x - y' = 1$ qui est $y' = 1 - x'$ ou $y = -x + 1$;
$S((\Delta_1))$ a pour équation: $-2 + x' - y' = 2 - x' - y' - 3$ qui est $x' = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$.

4.a) $M(x ; y) \in (C) \Leftrightarrow y = x - e^{x-1} \Rightarrow$
$-2 + x' - y' = 2 - x' - y' - e^{1-x'-y'}$ d'où :
$e^{1-x'-y'} = 4 - 2x'$ Donc $4 - 2x' > 0$ d'où :
$1 - x' - y' = \ln(4 - 2x')$ donc $x' < 2$ et
$y' = 1 - x' - \ln(4 - 2x')$ d'où $x' < 2$ et $M' \in \Gamma$.
b) $M'(x'; y') \in \Gamma \Leftrightarrow y' = 1 - x' - \ln(4 - 2x') \Rightarrow$

$$-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-2-\ln(4+x-y-4)\Rightarrow$$

$\ln(x-y)=x-1$ d'où $x-y=e^{x-1}\Rightarrow\ y=x-e^{x-1}$

Donc $M(x\ ;\ y)\in(C)$ et $S(M=M'$.

c) D'après l'étude faite en 4.a) et 4 .b) on a : $S(C)=\Gamma$.

Partie III

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty-\infty$(F.I) ;Soit $X=4-2x\ \Rightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} X\mapsto+\infty \\ x=2-\frac{1}{2}X \end{array}\right.\quad \text{alors}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-1+\frac{1}{2}X-\ln X\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-1+X(\frac{1}{2}-\frac{\ln X}{X})\right]=+\infty$$

• $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=+\infty$

$$g'(x)=-1-(\frac{-2}{4-2x})=-1+\frac{2}{4-2x}=\frac{2x-2}{4-2x}$$

• Tableau de variations de g

x	$-\infty$		1		2
g'(x)		+	0	-	‖
g(x)	$+\infty$	↘	0 $-\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖

2) $h'(x)=2-e^{x-1}+\dfrac{-2}{4-2x}=2-e^{x-1}-\dfrac{1}{2-x}$

$$=2-e^{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

$h''(x)=-e^{x-1}+(\dfrac{-1}{(x-2)2})=\ -e^{x-1}-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

3.a) Comme : $\forall x\in]-\infty\ ;\ 2[$; $h''(x)<0\Rightarrow$

h' est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2[$.

$h'(1)=2-1-1=0$.

b) Tableau de variations de h

x	$-\infty$		α		1		β		2
h'(x)		+			0	-			‖
h(x)	$-\infty$	↗	0	↗	$\ln 2$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(f-g)=-\infty-\infty=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(f-g)=f(2)-\infty=-\infty$;

$h(1)=f(1)-g(1)=\ln 2$.

Sujet 2003 /Séries : C & TMGM / Session normale

Exercice 1

1) f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

$D_f =]\,1\,;+\infty[$;

- Limites aux bornes :

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

x = 1 est AV et y = 0 est AH.

- Dérivée et sens de variation

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2} > 0 \ \forall x\in\,]\,1\,;+\infty[\ ;$$

- Tableau de variations

x	1	+∞
f ’ (x)	-	
f (x)	+∞ ↘	0

2.a) $\forall\ t > 1$; $0 < \ln t$ (1) On pose :

$\varphi(t) = t - 1 - \ln t$ pour $t > 1$;

$\varphi'(t) = 1 - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t-1}{t} > 0$; pour tout $t > 1$ d'où le tableau de variations de φ :

t	1	+∞
φ’(t)	+	
φ (t)	0 ↗	+∞

Donc $\forall\ t > 1$; $\varphi(t) > 0$ d'où $\ln t < t - 1$ (2) ;

De (1) et (2) on trouve : $\forall\ t > 1$; $0 < \ln t < t - 1$.

D'après la double inégalité précédente on a :

$\dfrac{1}{\ln t} > \dfrac{1}{t-1}$; d'une part et d'autre part en intégrant sur l'intervalle : [x ; 2x] tel que x > 1 on obtient : $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t}dt > \int_x^{2x} \frac{1}{t-1}dt$; d'où

$$g_2(x) > [\ln(t-1)]_x^{2x} \Leftrightarrow g_2(x) > \ln\frac{2x-1}{x-1}$$

b) On peut écrire $g_n(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt + \int_{2x}^{nx} f(t)dt$;

d'où $g_n(x) = g_2(x) + \displaystyle\int_{2x}^{nx} f(t)dt$; $\forall n \geq 2$.

Or f est positive et puisque $nx \geq 2x$ $\forall n \geq 2$; on a alors : $\displaystyle\int_{2x}^{nx} f(t)dt \geq 0$ d'où $\forall n \geq 2$; $g_n(x) \geq g_2(x)$.

On a : $g_2(x) > \ln\dfrac{2x-1}{x-1} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} g_2(x) > \lim\limits_{x\to 1^+} \ln\dfrac{2x-1}{x-1}$

Or $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\dfrac{2x-1}{x-1} = +\infty$; d'où $\lim\limits_{x\to 1^+} g_2(x) = +\infty$.

3.a) f étant décroissante sur tout intervalle de son D_f, en particulier sur [x ; 2x] tel que x > 1 et n ≥2 ;

On a donc $\forall t\in[x\,;nx]$:

$$\frac{1}{\ln(nx)} \leq f(t) \leq \frac{1}{\ln(x)} \text{ ; en intégrant on a}$$

$$\int_x^{nx} \frac{1}{\ln(nx)}dt \leq \int_x^{nx} f(t)dt \leq \int_x^{nx} \frac{1}{\ln(x)}dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\ln(nx)}\int_x^{nx} dt \leq g_n(t) \leq \frac{1}{\ln(x)}\int_x^{nx} dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\ln(nx)}[t]_x^{nx} \leq g_n(t) \leq \frac{1}{\ln(x)}[t]_x^{nx} \text{ d'où}$$

$$\frac{(n-1)x}{\ln(nx)} \leq g_n(t) \leq \frac{(n-1)x}{\ln(x)}$$

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(n-1)x}{\ln(nx)} = +\infty$ alors

$\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$; Puis

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(n-1)x}{\ln(nx)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n-1}{\ln(nx)} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(n-1)x}{\ln(x)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n-1}{\ln(x)} = 0$$

$$\text{d'où } 0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{g_n(x)}{x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{g_n(x)}{x} = 0.$$

4.a) $g_n(x) = \displaystyle\int_x^{nx} f(t)dt \Rightarrow g'_n(x) = nf(nx) - f(x) \Rightarrow$

$g'_n(x) = n\dfrac{1}{\ln(nx)} - \dfrac{1}{\ln x}$; alors $\forall x > 1$;

$g'_n(x) = \dfrac{n\ln(x) - \ln(nx)}{\ln(nx)\ln(x)}$.

Soit $g'_n(x) = 0 \Rightarrow n\ln(x) - \ln(nx) = 0$; $x > 1 \Rightarrow \ln(x)^n = \ln(nx) \Rightarrow x^n = nx$; $x > 1 \Rightarrow x^{n-1} = n \Rightarrow$

$x = \sqrt[n-1]{n}$ .Posons $x_n = n^{\frac{1}{n-1}}$ et $y_n = g_n(n^{\frac{1}{n-1}})$; alors d'après 3.a) on obtient un encadrement de y_n qui donne après calcul :

b) En utilisant la relation (1) on a :

$$\frac{(n-1)^2 n^{\frac{-n+2}{n-1}}}{\ln(n)} \le y_n \le \frac{(n-1)^2 n^{\frac{1}{n-1}}}{\ln(n)} \quad .$$

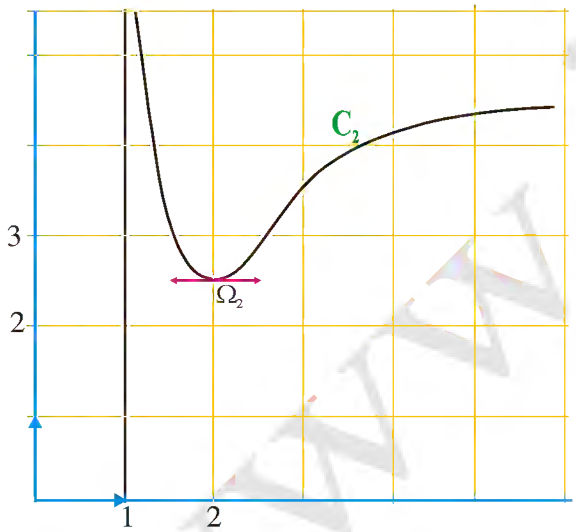
- Tableau de variations

x	1		x_n		$+\infty$
$g_n(x)$		-	0	+	
$g'_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	y_n	$\nearrow$	$+\infty$

b) Le point Ω_2 de (C_2) en lequel la tangente à (C_2) est parallèle à l'axe des abscisses et de coordonnées : $x_2 = 2$ et d'ordonnée y_2 qui vérifie : $\frac{1}{\ln(2)} \le y_2 \le \frac{2}{\ln(2)}$; On peut prendre la valeur moyenne $\frac{1}{2} \times \frac{3}{\ln(2)}$ comme valeur approximative de cette ordonnée ce qui donne :

$y_2 \approx \frac{1}{2} \times \frac{3}{\ln(2)} \approx \frac{1}{2} \times \frac{30}{6} = 2{,}5.$

- **L'allure de C_2**



Exercice 2

1.a) $W_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$; On pose $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; $x > 0$; φ est décroissante sur $[p\ ;\ p+1]$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Donc $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$; $\varphi(p+1) \le \varphi(t) \le \varphi(p)$ en intégrant on trouve : $\frac{1}{p+1}\int_p^{p+1} dt \le \int_p^{p+1} \varphi(t)dt \le \frac{1}{p}\int_p^{p+1} dt$

d'où $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{p+1} \le \ln(p+1) - \ln p \le \frac{1}{p}$ $\quad$ (1)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \le \ln(2) - \ln 1 \le 1 \\ \frac{1}{3} \le \ln(3) - \ln 2 \le \frac{1}{2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln n \le \frac{1}{n} \end{cases}$$

En additionnant membre à membre on trouve :

$\sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p} \le \ln(n+1) \le \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$;

On peut écrire :

$-1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} + \frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) \le \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ d'où

$-1 + W_n + \frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) \le W_n.$

On a d'une part: $\ln(n+1) \le W_n$;

et d'autre part : $-1 + W_n + \frac{1}{n+1} \le \ln(n+1)$ d'où

$W_n + \frac{1}{n+1} \le 1 + \ln(n+1)$; Or $W_n \le W_n + \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$W_n \le 1 + \ln(n+1)$;

Donc: $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$; $\ln(n+1) \le W_n \le 1 + \ln(n+1)$ $\quad$ (2)

D'après (2) et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$

on en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty$.

2.a) On a : $0 \le x \le 1 \Rightarrow e^0 \le e^x \le e^1$ d'où $1 \le e^x \Rightarrow$

$2 \le 1 + e^x \Rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{1+e^x}$; D'autre part : $1 \le e^x \Rightarrow$

$1 + e^x \le 2e^x \Rightarrow \frac{1}{1+e^x} \ge \frac{1}{2e^x} \Rightarrow \frac{1}{1+e^x} \ge \frac{e^{-x}}{2}.$

Donc $\forall\ x \in [0\ ;\ 1]$; $\frac{e^{-x}}{2} \le \frac{1}{1+e^x} \le \frac{1}{2}.$ $\quad$ (3)

b) Nous avons :

$\int_0^1 e^{-nx}dx = \frac{-1}{n}\left[e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{-e^{-n} + e^0}{n} = \frac{1-e^{-n}}{n} = V_n$

On a : $\frac{e^{-(n+1)x}}{2} \le \frac{e^{-nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{-nx}}{2}$ en intégrant on obtient : $\frac{1}{2}V_{n+1} \le U_n \le \frac{1}{2}V_n$.

c) De b) on a $\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty} V_{n+1} \le \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \le \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$. D'autre part on a :

$\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty} nV_{n+1} \le \lim\limits_{n\to+\infty} nU_n \le \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to+\infty} nV_n$;et puisque

$\lim\limits_{n\to+\infty} nV_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-e^{-n}) = 1$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} nV_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}(1-e^{-n-1}) = 1$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n = \frac{1}{2}$.

3.a) En remarquant que : $\forall\, p>0 \Rightarrow p \ge 1 \Rightarrow$

$\frac{1}{p} \le 1 \Rightarrow \frac{e^{-p}}{p} \le e^{-p}$ on peut écrire :$\forall\, p>0$;

$\sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \le \sum_{p=1}^{n} e^{-p}$; Or $\sum_{p=1}^{n} e^{-p}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de 1^{er} terme e^{-1} et de raison e^{-1}.

D'où : $\sum_{p=1}^{n} e^{-p} = e^{-1}\frac{1-(e^{-1})^n}{1-e^{-1}} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} - \frac{e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}}$

$$= \frac{1}{e-1} - \frac{e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}} \le \frac{1}{e-1}$$

Donc $0 \le \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \le \frac{1}{e-1}$.

b) On a : $V_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ et $T_n = \sum_{p=1}^{n} V_p$;

$T_n = \sum_{p=1}^{n} V_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p}$; d'où

$T_n = W_n - \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p}$ de la relation précédente

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$ on en déduit que:

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

D'après 3.a) En multipliant dans (3) par -1 on obtient :

$-\frac{1}{e-1} \le -\sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \le 0$; d'où

$W_n - \frac{1}{e-1} \le W_n - \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \le W_n \Rightarrow$

$W_n - \frac{1}{e-1} \le T_n \le W_n \Rightarrow$

$\frac{W_n}{\ln(n)} - \frac{1}{(e-1)\ln(n)} \le \frac{T_n}{\ln(n)} \le \frac{W_n}{\ln(n)}$

En utilisant (2) : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

$\ln(n+1) \le W_n \le 1 + \ln(n+1) \Rightarrow$

$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \le \frac{W_n}{\ln(n)} \le \frac{1}{\ln(n)} + \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \le \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_n}{\ln(n)} \le \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)} + \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_n}{\ln(n)} = 1$; d'après le théorème des Gendarmes.

c) On a $S_n = \sum_{p=1}^{n} U_p$ et $\frac{1}{2}V_{n-1} \le U_n \le \frac{1}{2}V_n$;d'où

$\frac{1}{2}\sum_{p=2}^{n+1} V_p \le \sum_{p=1}^{n} U_p \le \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} V_p \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\left[\sum_{p=2}^{n+1} T_{n+1} - V_1\right] \le S_n \le \frac{1}{2}T_n ;\Rightarrow$

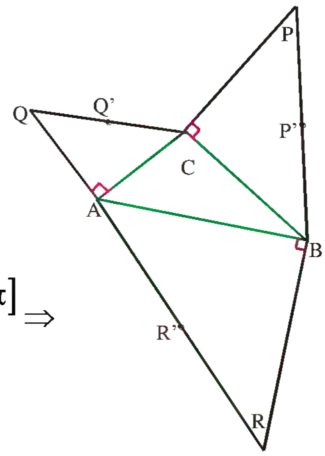
$\frac{1}{2}T_{n+1} \le S_n \le \frac{1}{2}T_n$, Or $\lim\limits_{x\to\infty} T_n = +\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to\infty} S_n = +\infty$.

Problème

Partie A

1.a) Figure illustrant les données :



2.a) Le triangle P'CB est directe rectangle isocèle en P' donc

$\begin{cases} (\overrightarrow{P'C}\ ;\ \overrightarrow{P'B}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ P'C = P'B \end{cases} \Rightarrow$

$\frac{p'-b}{p'-c} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$

$p'-b = i(p'-c) \Rightarrow (1-i)p' = b - ic \Rightarrow p' = \frac{b-ic}{1-i}$.

De façon analogue en utilisant les triangles Q'AC et R'BA on obtient :

$q' = \frac{c-ia}{1-i}$ et $r' = \frac{a-ib}{1-i}$.

b) $p' + q' + r' = \dfrac{b - ic}{1 - i} + \dfrac{c - ia}{1 - i} + \dfrac{a - ib}{1 - i}$

$= \dfrac{(1 - i)(a + b + c)}{1 - i} = a + b + c.$

Le centre de gravité du triangle ABC a pour affixe le nombre $\dfrac{a + b + c}{3}$,

Le centre de gravité du triangle P'Q'R'a pour affixe le nombre $\dfrac{p' + q' + r'}{3}$,

Puisque $a + b + c = p' + q' + r'$,
alors les triangles ABC et P'Q'R'ont même centre de gravité G d'affixe $g = \dfrac{a + b + c}{3}$.

3) Le triangle CBP est direct rectangle isocèle en C

donc : $\begin{cases} (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CP}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ CB = CP \end{cases} \Rightarrow \dfrac{p - c}{b - c} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$

$p - c = i(b - c) \Rightarrow p = ib + (1 - i)c.$

- De façon analogue en utilisant les triangles ACQ et BAR rectangles et isocèles respectivement en A et B on obtient :
  $q = ic + (1-i)a$; $r = ia + (1 - i)b$.

Le centre de gravité du triangle PQR a pour affixe le nombre $\dfrac{p + q + r}{3}$ et on a :

$\dfrac{p + q + r}{3} = \dfrac{ib + (1 - i)c + (1 - i)a + ia + (1 - i)b}{3}$

$= \dfrac{a + b + c}{3}.$

Donc les triangles ABC et PQR ont même centre de gravité G.

Partie B

1.a) Le triangle CQA estdirect rectangle isocèle en A

D'où $\begin{cases} (\overrightarrow{CQ}\ ;\ \overrightarrow{CA}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \\ \dfrac{CA}{CQ} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Donc la similitude directe S_1 de centre C

Transforme Q en A, elle a pour angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient : $\begin{cases} (\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CP'}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \\ \dfrac{CP'}{CB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow S_1(B) = P'.$

- De façon analogue en utilisant le triangle AQ'Q direct rectangle isocèle en A on obtient :

$\begin{cases} (\overrightarrow{AQ'}\ ;\ \overrightarrow{AQ}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \\ \dfrac{AQ}{AQ'} = \sqrt{2} \end{cases}$

Donc le rapport de la similitude S_2 de centre A transformant Q en Q' est $\sqrt{2}$ et son angle est $\dfrac{\pi}{4}$.

On a $\begin{cases} (\overrightarrow{AR'}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \\ \dfrac{AB}{AR'} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S_2(R') = B$

2.a) La composée ($\sigma = S_1 \circ S_2$) de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des deux rapports et d'angle la sommes des deux angles.

Comme le rapport issu des deux rapport est égal à 1 ; donc σ est un déplacement, mais comme son angle est $\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit qu'il s'agit d'une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b) On a : $\left.\begin{matrix} Q' \xrightarrow{S_2} Q \xrightarrow{S_1} A \\ R' \to B \to P' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} Q' \xrightarrow{\sigma} A \\ R' \to P' \end{cases}$

et comme σ est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, alors

$\begin{cases} P'A = R'Q' \\ (\overrightarrow{R'Q'}\ ;\ \overrightarrow{P'A}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

c) En utilisant les affixes on a :

$\dfrac{a - p'}{q' - r'} = \dfrac{a - \dfrac{b - ic}{1 - i}}{\dfrac{c - ia}{1 - i} - \dfrac{a - ib}{1 - i}} = \dfrac{\dfrac{(1 - i)a - b + ic}{1 - i}}{\dfrac{c - ia - a + ib}{1 - i}}$

$$\frac{a-p'}{q'-r'}=\frac{(1-i)a-b+ic}{-(1+i)a+ib+c}=\frac{(1-i)a-b+ic}{-i\left[(1-i)a-b+ic\right]}$$

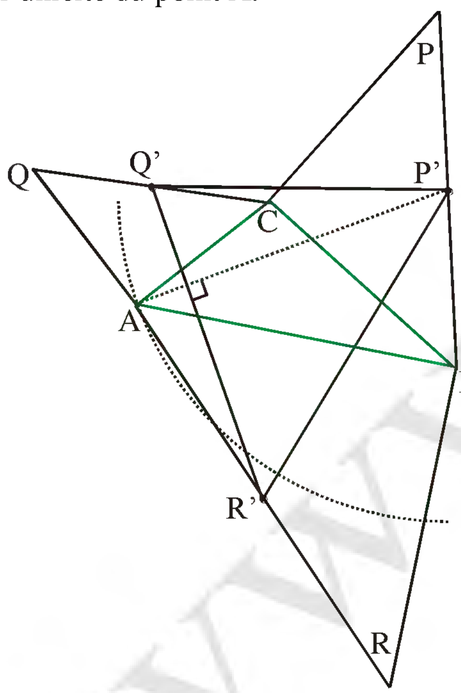
$$\frac{a-p'}{q'-r'}=-\frac{1}{i}=i\Rightarrow\begin{cases}P'A=R'Q'\\(\overrightarrow{R'Q'}\ ;\ \overrightarrow{P'A})=\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$$

d) On peut en déduire les relations suivantes :

$$\begin{cases}R'B=Q'P'\\(\overrightarrow{Q'P'}\ ;\overrightarrow{R'B})=\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}\text{ et }\begin{cases}Q'C=P'R'\\(\overrightarrow{P'R'}\ ;\overrightarrow{Q'C})=\frac{\pi}{2}[2\pi].\end{cases}$$

3.a) Comme P'A = R'Q' ; alors le point A appartient au cercle de centre P' et de rayon R'Q' et comme $(\overrightarrow{R'Q'}\ ;\ \overrightarrow{P'A})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$, alors le point A appartient a une demi-droite passant par P' et perpendiculaire à (R'Q').

L'intersection d'un cercle et une demi-droite dont l'origine est le centre de ce cercle est unique d'où l'unicité du point A.



b) Pour construire les points B et C à partir des points A ; P' ; Q' et R' :

On remarque que le triangle AR'B est direct rectangle isocèle en R' d'où B est l'image de A par la rotation de centre R' et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Aussi le triangle ACQ' est direct rectangle isocèle en Q' d'où C est l'image de A par la rotation de centre Q' et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

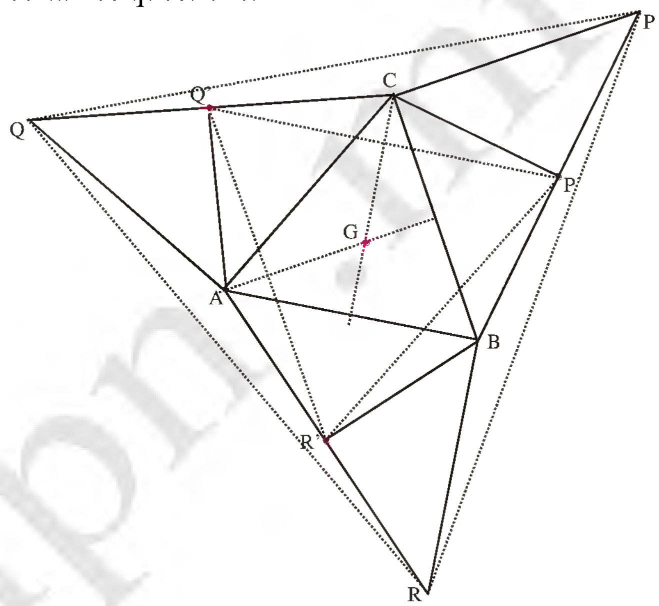
c) Etant donné :

- l'existence et l'unicité de A à partir des points P' ; Q' et R' ;
- l'existence et l'unicité des points B et C à partir des points A ; P' ; Q' et R',

on en déduit l'existence et l'unicité du triangle ABC solution du problème à partir d'un triangle P'Q'R' donné.

Partie C

1) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions.



2.a) On considère la rotation r(G ; $\frac{2\pi}{3}$) où G est le centre de gravité du triangle ABC.

ABC est équilatéral donc r(B) = C et r(C)= A.

Posons P''= r(P') ; la rotation r(G ; $\frac{2\pi}{3}$) transforme le triangle BP'C direct isocèle rectangle en P' en un triangle CP''A direct isocèle rectangle en P''.

Puisque CQ'A est un triangle direct isocèle rectangle en Q', alors P'' coïncide avec Q' d'où r(P') = Q'.

De la même façon on démontre que r(Q') = R'.

$$\begin{cases}Q'C=Q'A\\(\overrightarrow{Q'C}\ ;\ \overrightarrow{Q'A})=-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}\text{ et}$$

$$\begin{cases}R'A=R'B\\(\overrightarrow{R'A};\overrightarrow{R'B})=-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}\text{ avec }\begin{matrix}r\\C\to A\\A\to B\end{matrix}\Rightarrow r(Q')=R'$$

b) Les deux triangles BPC et CQA sont isométriques de même sens avec r(B) = C et r(C) = A, alors r(P) = Q.
De même, les deux triangles CQA et ARB sont isométriques de même sens avec r(C) = A et r(A) = B, alors r(Q) = R.
c) On montre facilement que : r(R') = P'et r(R) =P donc :

$r(G\ ;\ \frac{2\pi}{3})$	$r(G\ ;\ \frac{2\pi}{3})$
$P' \to Q'$	$P \to Q$
$Q' \to R'$	$Q \to R$
$R' \to P'$	$R \to P$

Chacun des deux triangles P'Q'R' et PQR est globalement invariant par $r(G\ ;\frac{2\pi}{3})$ dont le centre est leur centre de gravité ; donc ces triangles sont équilatéraux.

3.a) Calcul de GP' : Soit A' le milieu de [BC] ; puisque P'B = P'C alors P' et un point de la médiatrice de [BC] donc les points G ; A' ; P' sont alignés et A'∈[GP'] donc :

$$GP' = GA'+A'P' = \frac{1}{3}AA' + A'B = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}a$$

$$GP' = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}\right)a = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)a.$$

- Caractérisation de σ_1

  La similitude σ_1 de centre G transforme (B ; C ; A) en (P' ; Q' ; R') ;

σ_1

$G \to G$

$B \to P'$ • le rapport de σ_1 est $k_1 = \frac{GP'}{GB}$

$C \to Q'$

$A \to R'$

$$k_1 = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{6}a}{\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$k_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

- L'angle θ_1 de σ_1 est :

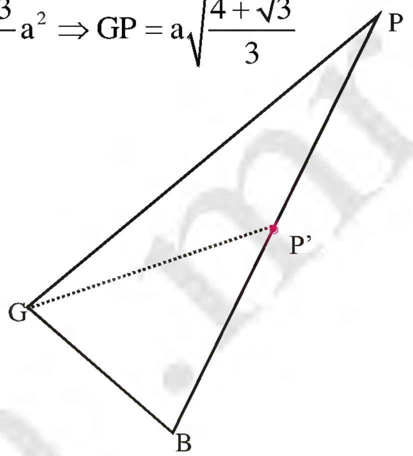
$$\theta_1 = (\overrightarrow{GB}\ ;\ \overrightarrow{GP'}) = (\overrightarrow{GB}\ ;\ \overrightarrow{GA'}) = \frac{\pi}{3}.$$

b) Calcul de GP: D'après le théorème de la médiane et puisque P' est le milieu de [BP] on a :

$$2GP'^2 = GP^2 + GB^2 - \frac{BP^2}{2} \Rightarrow$$

$$GP^2 = 2\times\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^2 a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a^2 + \frac{2a^2}{2} \Rightarrow$$

$$GP^2 = \frac{4+\sqrt{3}}{3}a^2 \Rightarrow GP = a\sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{3}}$$



- Caractérisation de σ_2

La similitude directe σ_2 de centre G transforme (B ; C ; A) en (P ; Q ; R) ;

σ_2

$G \to G$

$B \to P$ • le rapport de σ_2 est

$C \to Q$

$A \to R$

$$k_2 = \frac{GP}{GB} = \frac{a\sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{3}}}{\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a\sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \text{ d'où}$$

$$k_2 = \sqrt{4+\sqrt{3}}.$$

- L'angle θ_2 de σ_2 est: $\theta_2 = (\overrightarrow{GB}\ ;\ \overrightarrow{GP})$;

$$\cos(\overrightarrow{GB}\ ;\ \overrightarrow{GP}) = \frac{GB^2 + GP^2 - BP^2}{GB.GP} \text{ d'où}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{GB^2 + GP^2 - BP^2}{GB.GP} \text{ donc}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\frac{1}{3}a^2 + \frac{4+\sqrt{3}}{3}a^2 - 2a^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}a.\sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{3}}a} \Rightarrow$$

$$\cos\theta_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{4+\sqrt{3}}}.$$

c) Aires des triangles PQR et P'Q'R' en fonction de celle du triangle ABC :

- Puisque la similitude directe σ_1 de rapport $k_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ transforme le triangle ABC en P'Q'R' ; alors :

  Aire (P'Q'R') = $(\frac{1+\sqrt{3}}{2})^2$ Aire (ABC)
- Puisque la similitude directe σ_2 de rapport $k_2 = \sqrt{4+\sqrt{3}}$ transforme le triangle ABC en PQR ; alors :

  Aire (PQR) = $(\sqrt{4+\sqrt{3}})^2$ Aire (ABC)

D'où : Aire (PQR) = $(4+\sqrt{3})$ Aire (ABC)

4) $f = \sigma_1 \circ r$; c'est la composée de deux similitude directe qui est une similitude directe.

- σ_1 et r ont même centre G donc c'est le centre de f.
- Rapport de f c'et celui de σ_1, donc il est égal à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
- L'angle θ de f est la somme des angles de σ_1 et r, donc $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$.

On n'en déduit donc, que f est l'homothétie de centre G et de rapport $k' = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

On peut utiliser le schéma suivant pour déterminer les images par f des points demandés :

$$\begin{array}{lll} \quad r \quad \sigma & & \quad f \\ A \to B \to P' & & A \to P' \\ B \to C \to Q' & \text{donc} & B \to Q' \\ C \to A \to R' & & C \to R' \end{array}$$

$$\text{Aire (P'Q'R')} = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \text{Aire(ABC)}$$

$$= \left(2+\sqrt{3}\right) \times \text{Aire(ABC)}.$$

On peut remarquer que :

- Pour une autre raison (P' ; Q' ; R') est un triangle équilatéral.
- G ; A ; P' sont alignés
- G ; B ; Q' sont alignés
- G ; C; R' sont alignés
- (AB) // (P'Q'); (BC) // (Q'R'); (AC) // (P'R') car les triangles ABC et P'Q'R' sont homothétiques.

Sujet 2003/ Séries : C et TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

1) $Z^2 - (4\cos t)Z + 4 + 5\sin^2 t = 0$ où $t \in [\,0\,;\,\pi]$.

$\Delta = (4\cos t)^2 - 4(4 + 5\sin^2 t\,) = 16\cos^2 t - 16 - 20\sin^2 t$

$= 16(\cos^2 t - 1) - 20\sin^2 t = -36\sin^2 t = (6i\sin t)^2$.

Les solutions de l'équation (E) sont :

$$Z_1 = \frac{4\cos t + 6i\sin t}{2} = 2\cos t + 3i\sin t.$$

$$Z_2 = \frac{4\cos t - 6i\sin t}{2} = 2\cos t - 3i\sin t.$$

2.a) $M_1(x\,;\,y)$ et $M_2\,(x\,;\,y)$ les affixes de Z_1 et Z_2 resp.

$$\text{Alors}\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases};\, t \in [0\,;\,\pi] \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \cos t \\ \dfrac{y}{3} = \sin t \end{cases};\, t \in [0\,;\,\pi] \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2} = \cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{3^2} = \sin^2 t \end{cases};\, t \in [0\,;\,\pi] \Leftrightarrow \left\{ \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \right.$$

Donc lorsque t décrit $\in[\,0\,;\,\pi]$ le point M1 décrit une branche Γ_1 (d'ordonnées positives) de l'ellipse Γ d'équation cartésienne : $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$.

Comme $Z_2 = \overline{Z_1}$; alors M_2 est le symétrique de M_1 par rapport à l'axe des abssisses, d'où M_2 décrit l'autre branche Γ_2 de l'éllipse Γ.

b) Eléments caractéristiques de Γ dans le repère : $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

- Equations cartésienne : $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$
- Centre O(0 ; 0).
- Sommets:A(2 ; 0) ; A'(-2 ; 0) ; B(0 ; 3) ; B'(-3 ; 0),
- Axe focal : (Oy)
- Foyers : F(0 ; $\sqrt{5}$) ; F'(0 ; -$\sqrt{5}$)
- Excentricité : e = $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

3.a) f est l'application définie par :

$$f : Z_{M'x;y)} \to Z'_{M(x';y')} \text{ telle que} : Z' = \frac{5Z + \overline{Z}}{4}$$

A partir de l'expression de f on a :

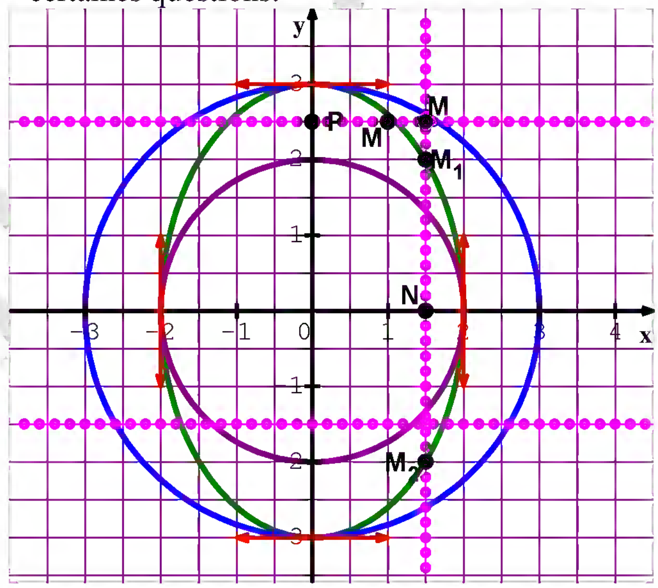
$$x' + iy' = \frac{5(x+iy) + (x-iy)}{4} \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{2}x \\ y' = y \end{cases}$$

b) D'après 3.a) on a $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}x' \\ y = y' \end{cases}$ en remplaçant dans l'équation de Γ on trouve $\dfrac{(\frac{2}{3}x')^2}{2^2} + \dfrac{y'^2}{3^2} = 1$, d'où

$x'^2 + y'^2 = 9 \Rightarrow \Gamma' = \mathscr{C}_{(O\,;\,3)}$.

- Figure illustrant les données et répondant à certaines questions.



c) On prend un point M'(x' ; y') du cercle Γ'.

Soient N et P ses projetés orthogonaux respectifs sur les axes (Ox) et (Oy). On peut construire le point M(x ; y) antécédent de M'(x' ; y') par l'application f par deux méthodes :

Méthode 1 :

Puisque $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}x' \\ y = y' \end{cases}$ alors M(x ; y) est le point du segment [QM'] qui vérifie : $\overline{QM} = \dfrac{2}{3}\overline{QM'}$.

Méthode 2 :

Utilisation des deux cercles Γ' et Γ'' de centre O et de rayons respectifs 3 et 2.

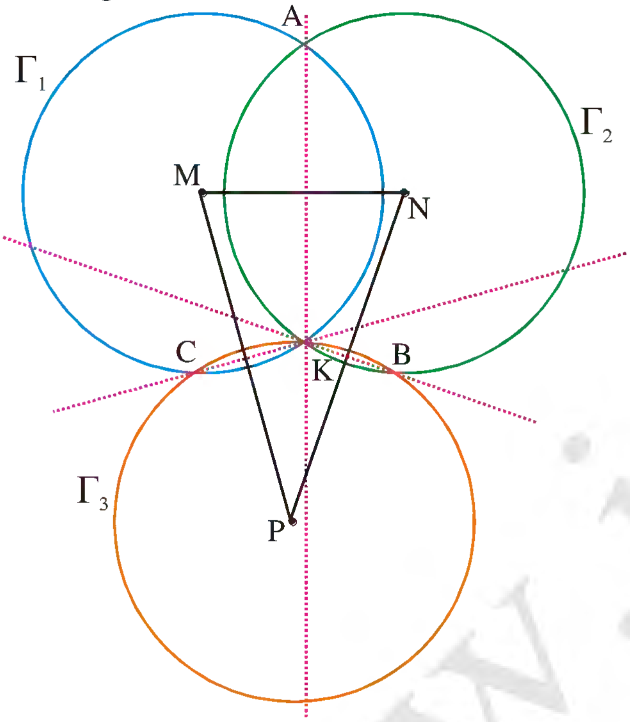
Soient D la droite passant par P et orthogonale à

(Oy) et D' la droite passant par le point d'intersection de Γ'' et de [OM] et orthogonale à (Ox). Alors M(x ; y) est le point d'intersection des droites D et D'.

Puisque $\begin{cases} x = \frac{2}{3}x' \\ y = y' \end{cases}$ alors M(x ; y) est le point du segment [QM'] qui vérifie : $\overline{QM} = \frac{2}{3}\overline{QM'}$.

Exercice 2

1.a) Figure illustrant les données



2. a) On a : $r_1 = S_{(KB)} \circ S_{(KA)}$; $r_2 = S_{(KP)} \circ S_{(KC)}$; et $f = S_{(KB)} \circ S_{(KA)} \circ S_{(KC)}$.

Chacune des transformations r_1 et r_2 est un déplacement car c'est la composée de deux antidéplacements.

r_1 et r_2 sont deux rotations de même centre K.

b) $r_1(M) = S_{(KB)}(S_{(KA)}(M)) = S_{(KB)}(N) = P$;

$r_2(M) = S_{(KP)}(S_{(KC)}(M)) = S_{(KP)}(P) = P$.

On Remarque que :

$r_1(M) = r_2(M)$ d'une part et d'autre part r_1 et r_2 ont même centre K donc $r_1 = r_2$.

c) Comme $r_1 = r_2$; on obtient :

$S_{(KB)} \circ S_{(KA)} = S_{(KP)} \circ S_{(KC)}$ d'où

$S_{(KB)} \circ S_{(KA)} \circ S_{(KC)} = S_{(KP)}$; donc f est une réflexion d'axe (KP).

3.a) On remarque que les droites (KA) ; (KB) et (KC) sont les médiatrices respectives des segments [MN] ; [NP] et [PM] ; en plus on peut écrire :

$(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KB}) = (\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KC}) + (\overrightarrow{KC} ; \overrightarrow{KP}) + (\overrightarrow{KP} ; \overrightarrow{KB})[\pi]$

et on a : $(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KC}) = (\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KM}) + (\overrightarrow{KM} ; \overrightarrow{KC})[\pi]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{KN} ; \overrightarrow{KM}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{KM} ; \overrightarrow{KP})[\pi]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{KN} ; \overrightarrow{KP})[\pi]$

$(\overrightarrow{KP} ; \overrightarrow{KB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KP} ; \overrightarrow{KN})[\pi] \Rightarrow$

$(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KN} ; \overrightarrow{KP}) + (\overrightarrow{KC} ; \overrightarrow{KP}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{KP} ; \overrightarrow{KN})[\pi]$

d'où $(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KB}) = (\overrightarrow{KC} ; \overrightarrow{KP})[\pi]$ (1)

De façon analogue on obtient les deux relations suivantes :

$(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KC}) = (\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KM})[\pi]$ (2)

$(\overrightarrow{KC} ; \overrightarrow{KA}) = (\overrightarrow{KB} ; \overrightarrow{KN})[\pi]$ (3)

b) On a : $(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KB}) + (\overrightarrow{KB} ; \overrightarrow{BC})[\pi]$

Comme $(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KB}) = (\overrightarrow{KC} ; \overrightarrow{KP})[\pi]$ et

$(\overrightarrow{KB} ; \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PK} ; \overrightarrow{PC}) = (\overrightarrow{KP} ; \overrightarrow{PM})[\pi]$,

alors en sommant on obtient :

$(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KB}) + (\overrightarrow{KB} ; \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{KC} ; \overrightarrow{PM})[\pi]$

Or, $(\overrightarrow{KC} ; \overrightarrow{PM}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$; alors

$(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ (1')

c) On démontre de même façon que :

- $(\overrightarrow{KB} ; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ (2')
- $(\overrightarrow{KC} ; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ (3')

D'après (1') ; (2') et (3') on en déduit que le point K est l'orthocentre du triangle ABC .

4) Γ_4 et Γ_5 les deux cercles circonscrit aux triangles ABC et MNP. Pour montrer que les cinq cercles Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 ; Γ_4 et Γ_5 sont de même rayon ; on note r le rayon des cercles Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 ; et r' celui de Γ_4. D'une part, parce que le point K appartient aux cercles Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 de même rayon r et de centres respectifs M ; N et P ; alors : MK = NK= PK = r donc les points M ; N et P appartiennent au même cercle de centre K et de rayon r autrement dit le cercle Γ_5 circonscrit au triangle MNP ; d'où les cercles Γ_2 ; Γ_3 ; Γ_4 et Γ_5 sont de même rayon r.

D'autre part, utilisons les propriétés du rayon d'un cercle circonscrit :

Dans le triangle BKC on a : $BC = 2r\sin B\hat{K}C$ où r est le rayon du cercle Γ_3 de centre P passant par B ; K et C.

Dans le triangle ABC on a : $BC = 2r'\sin B\hat{A}C$ où r' est le rayon du cercle Γ_4 circonscrit au triangle ABC.

Soit K' le symétrique du point K orthocentre du triangle ABC : par rapport à (BC), alors $K' \in \Gamma_4$.

Comme : $\sin B\hat{A}C = \sin B\hat{K'}C$ et

$\sin B\hat{K'}C = \sin B\hat{K}C$; alors $\sin B\hat{A}C = \sin B\hat{K}C$ d'où r = r' et par conséquent Γ_4 et Γ_3 sont de même rayon.

Conclusion : Les cinq cercles Γ_1 ; Γ_2 ; Γ_3 ; Γ_4 et Γ_5 sont de même rayon.

Problème

Partie A

Etude et représentation graphique de la fonction f_1.

f est la fonction définie par :

$f_1(x) = f(x) = (2 + \sin x)e^{1+x}$

1.a) On peut écrire : $\forall\ x \in \mathbb{R}$;

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) \Rightarrow$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) \text{ d'où}$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

b) $f'(x) = (2 + \sin x + \cos x)e^{1+x}$ Or d'après 1.a) on en déduit que : $f'(x) = \left(2 + \sqrt{2}\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)e^{1+x}$.

On a : $\forall\ x \in \mathbb{R}$; $\left(2 + \sqrt{2}\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) \geq 2 - \sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ d'où f est strictement croissante.

2.a) On a : $\forall\ x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin x \leq 3$

d'où : $\forall\ x \in \mathbb{R}$: $e^{1+x} \leq f(x) \leq 3e^{1+x}$ (1)

b) Calcul de limites

- comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1+x} = 0$ et selon (1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1+x} = +\infty$ et selon(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{1+x}}{x} = +\infty$ et selon (1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Interprétation géométrique :

- La courbe représentative de f admet une demi-asymptote horizontale d'équation y = 0 au voisinage de $-\infty$.
- La courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).

3) Tableau de variations de f

x	$-\infty$ $+\infty$
f'(x)	+
f (x)	0 ↗ $+\infty$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [0 ; +\infty[$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) On a : $f'(x) = (2 + \sin x + \cos x)e^{1+x}$; d'où

$f''(x) = (-\sin x + \cos x)e^{1+x} + (2 + \sin x + \cos x)e^{1+x}$

$f''(x) = (2 + 2\cos x)e^{1+x}$ d'où

$f''(x) = 2(1 + \cos x)e^{1+x}$; $\forall\ x \in \mathbb{R}$

5.a) D'après (1); $\forall\ x \in \mathbb{R}$; $e^{1+x} \leq f(x) \leq 3e^{1+x}$

D'où C_1 est située entre les courbes Γ_1 et Γ_2 représentatives respectivement g et h définies par :

$g(x) = 3e^{1+x}$; $h(x) = e^{1+x}$; et comme

$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$; alors Γ_1 est au dessus de Γ_2 .

b) Pour déterminer les points de contact de (C_1) avec Γ_1 ; il suffit de résoudre l'équation :

$g(x) = f(x) \Leftrightarrow 3e^{1+x} = (2 + \sin x)e^{1+x} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow$

$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ d'où les point de contact de (C_1) avec Γ_1 sont de type :

$M_k\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi \ ; 3e^{1+\frac{\pi}{2}+k2\pi}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour déterminer les points de contact de (C_1) avec Γ_2; il suffit de résoudre l'équation :

$h(x) = f(x) \Leftrightarrow e^{1+x} = (2 + \sin x)e^{1+x} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow$

$x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$; d'où les points de contact de (C_1) avec Γ_2 sont de type :

$N_k\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi \ ; e^{1-\frac{\pi}{2}+k2\pi}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- Nous savons que deux courbes sont tangentes en un point si elles admettent la même tangente en ce point.

On a : $\forall\ x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = (2 + \sin x + \cos x)e^{1+x}$ d'où

$f'(-\frac{\pi}{2}+k2\pi)=e^{1-\frac{\pi}{2}+k2\pi}$ Puis :

$\forall x\in\mathbb{R}\,;\ g'(x)=3\,e^{1+x} \Rightarrow$

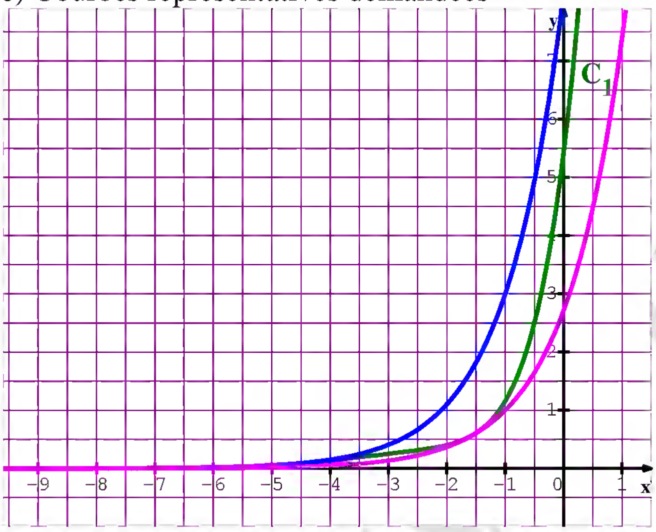
$g'(+\frac{\pi}{2}+k2\pi) = 3e^{1-\frac{\pi}{2}+k2\pi}$

Puisque $f'(-\frac{\pi}{2}+k2\pi) = h'(-\frac{\pi}{2}+k2\pi)$, alors les deux tangentes ont le même coefficient directeur et passent par le même point

$N_k(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ ;e^{1-\frac{\pi}{2}+k2\pi})$ donc les deux tangentes sont confondues , d'où les courbes (C_1) et Γ_2 sont tangentes en leur point de contact.

De façon analogue on démontre que les courbes (C_1) et Γ_1 sont tangentes en leur point de contact.

6) Courbes représentatives demandées



7) Calcul d'aire :

Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 0 et x = 1.

Alors : $A = \int_0^1 f(x)dx$ u.a

$A=\int_0^1(2+\sin x)e^{1+x}dx=\int_0^1 2e^{1+x}dx+\int_0^1(\sin x)\,e^{1+x}dx$

$A=\left[2e^{1+x}\right]_0^1+\int_0^1(\sin x)\,e^{1+x}dx$ (1)

On utilise une intégration par parties pour calculer $\int_0^1(\sin x)\,e^{1+x}dx$:

On pose : $\begin{cases}u(x)=\sin x\\ v'(x)=e^{1+x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=\cos x\\ v(x)=e^{1+x}\end{cases}$ d'où

$\int_0^1(\sin x)\,e^{1+x}dx = \left[(\sin x.)e^{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{1+x}\cos x dx$ (2)

On utilise une deuxième intégration par parties pour calculer : $\int_0^1\cos xe^{1+x}dx$ en posant :

$\begin{cases}u(x)=\cos x\\ v'(x)=e^{1+x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=-\sin x\\ v(x)=e^{1+x}\end{cases}$ d'où

$\int_0^1\cos xe^{1+x}dx = \left[\cos xe^{1+x}\right]_0^1+\int_0^1\sin xe^{1+x}dx$ (3) On remplace dans (2) on trouve :

$\int_0^1(\sin x)\,e^{1+x}dx=\left[(\sin x.)e^{1+x}\right]_0^1-\left[(\cos x)e^{1+x}\right]_0^1-\int_0^1\sin xe^{1+x}dx$

D'où $2\int_0^1(\sin x)\,e^{1+x}dx=\left[(\sin x.)e^{1+x}\right]_0^1-\left[(\cos x)e^{1+x}\right]_0^1$

$\int_0^1(\sin x)\,e^{1+x}dx=\frac{1}{2}\left[(\sin x.)e^{1+x}-(\cos x)e^{1+x}\right]_0^1$

$\int_0^1(\sin x)\,e^{1+x}dx=\frac{1}{2}\left[(\sin 1-\cos 1)e^2-(\sin 0-\cos 0)e^1\right]$

$\int_0^1(\sin x)\,e^{1+x}dx=\frac{1}{2}\left[(\sin 1-\cos 1)e^2+e\right]$

On remplace dans (1) on trouve :

$A=\left[2e^{1+x}\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[(\sin 1-\cos 1)e^2+e\right]\Rightarrow$

$A=2e^2-2e+\frac{1}{2}\left[(\sin 1-\cos 1)e^2+e\right]$ d'où

$A=\frac{1}{2}\left[(4+\ \sin 1-\cos 1)e^2-3e\right]$

Partie B

Calcul d'une intégrale

1) On a : $A_n=\int_0^1 f_n(x)dx\ =\int_0^1(2+\sin nx)e^{1+nx}dx$

$A_n=\frac{2}{n}e^{1+n}-\frac{2}{n}e+\int_0^1\sin nxe^{1+nx}dx$

2.a) $I_n=\int_0^1(\sin nx)e^{1+nx}dx$ et $J_n=\int_0^1(\cos nx)e^{1+nx}dx$

On utilise une intégration par parties :

- Pour I_n ; on pose

$\begin{cases}u(x)=\sin nx\\ v'(x)=e^{1+nx}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=n\cos nx\\ v(x)=\frac{1}{n}e^{1+nx}\end{cases} \Rightarrow$

En remplaçant par l'expression de I_n, on trouve

$I_n=\left[\frac{1}{n}\sin nxe^{1+x}\right]_0^1-\int_0^1\cos nxe^{1+nx}$

En remplaçant on obtient la relation :

$I_n=\frac{\sin n}{n}e^{1+n}-J_n$ (1)

- Pour J_n ; on pose :

$$\begin{cases} u(x) = \cos nx \\ v'(x) = e^{1+nx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -n\sin nx \\ v(x) = \frac{1}{n}e^{1+nx} \end{cases} \Rightarrow$$

$$J_n = \frac{\cos n}{n}e^{1+n} - \frac{e}{n} + I_n \quad (2)$$

b) De a) on obtient le système :

$$\begin{cases} In + J_n = \frac{\sin n}{n}e^{1+n} & (1) \\ -I_n + J_n = \frac{\cos n}{n}e^{1+n} - \frac{e}{n} & (2) \end{cases}$$

$$(1 - 2) \Rightarrow I_n = \frac{1}{2n}\left[(\sin n - \cos n)e^{1+n} + e\right]$$

$$(1 + 2) \Rightarrow J_n = \frac{1}{2n}\left[(\sin n + \cos n)e^{1+n} - e\right]$$

3. a) D'après B. 1) on a :

$$A_n = \frac{2}{n}e^{1+n} - \frac{2}{n}e^1 + \int_0^1 (\sin nx)e^{1+nx}dx \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{2}{n}e^{1+n} - \frac{2}{n}e^1 + I_n$$

$$A_n = \frac{2}{n}e^{1+n} - \frac{2}{n}e^1 + \frac{1}{2n}\left[(\sin n - \cos n)e^{1+n} + e\right]$$

$$A_n = \int_0^1 (2)e^{1+nx}dx + \int_0^1 (\sin nx)e^{1+nx}dx \Rightarrow$$

$$A_n = \left[\frac{2e^{1+nx}}{n}\right]_0^1 + \int_0^1 (\sin nx)e^{1+nx}dx$$

d'où $A_n = \frac{2}{n}e^{1+n} - \frac{2}{n}e^1 + \int_0^1 (\sin nx)e^{1+nx}dx$

$A_n = \frac{1}{2n}\left[(\sin n - \cos n)e^{1+n} + 4e^{1+n} - 4e + e\right]$ d'où

$$A_n = \frac{1}{2n}\left[(4 - \sin n - \cos n)e^{1+n} - 3e\right]$$

b) Calcul de A_1 :

D'après le résultat précédent :

$A_1 = \frac{1}{2}\left[(4 - \sin 1 - \cos 1)e^2 - 3e\right]$ et c'est le même résultat trouvé en A-7.

Sujet 2002 /Séries : C & TMGM / Session normale

Exercice 1

1) BED et CHF sont équilatéraux car leur côtés sont des diagonales du carré.

2) Les points I et J sont les centres de gravités respectifs des triangles BED et CHF.

a) Le point I est le centre de gravité du triangle BED d'où : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$ Or

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

J est le centre de gravité du triangle CHF d'où :

$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF} = 3\overrightarrow{GJ}$ Or

$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DA}$ donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$.

b) Nous avons que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$ d'où $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$

Donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JG}$ .D'autre part :

$$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GJ})$$

$$= (-\frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}) + (\frac{1}{2}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AG})$$

d'où $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0} \Rightarrow$ O est le milieu de $[IJ]$.

3.a) On a f = $S_1 \circ S_2$ d'axes séquents (non confondus) donc c'est une rotation .

De plus $f(G) = S_1 \circ S_2 (G) = S_1(G) = G$ et

$f(A) = S_1 \circ S_2 (A) = S_1(A) = A$

On n'en déduit que f est une rotation d'axe (AG).

b) Calculons : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$.

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AG}\ (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG})\overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG})\overrightarrow{AE}$$

$$= -AB^2 + AE^2 = 0$$

Car AB = AE nous en déduisons que $(AG) \perp (BE)$.

Donc la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BED) car elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.

D'autre part, (BED) et (CHF) sont parallèles car :

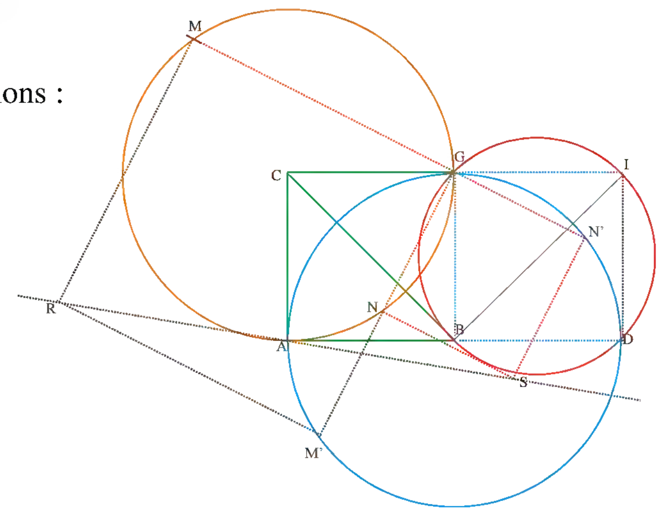
$\begin{cases} (BE) // (CF) \\ (BD) // (FH) \end{cases}$ « Deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre. »

c) Cmme f est une rotation d'axe (AG) perpendiculaire aux deux plans (BED) et (CHF) donc ces deux plans sont globalement invariant par f.

d) Les plans (BED) et (CHF) étant parallèles et invariants par f on en déduit que f est une rotation d'axe (AG) et d'angle π.

Exercice 2

1.a) Figure illustrant les données
et répondant à certaines questions :



b) ABCD est un carré (car c'est un losange ayant un angle droit).

D'où r est la rotation de centre G car :

$$\begin{cases} GA = GD \\ (\overrightarrow{GA}\ ;\ \overrightarrow{GD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

2. a) S est la similitude directe transformant M en R et N en S.

Les quadrilatères M'GMR et N'GNS étant des carrés nous en déduisons que S est la similitude de centre G ; de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

b) Noous savons que (MN) passe par un point fixe qui est C car M et N appartiennenet à Γ et MNG rectangle en G.

De plus , on a S(MN) = (RS) donc (RS) passe par un point fixe qui est le point S(C) , Or S(C) = A car le triangle (GCA) est rectangle isocèle en C,

Donc (RS) passe par C.

3. a) On a : S' $\begin{cases} D \to B \\ B \to C \\ I \to I \end{cases}$; alors le rapport de S est :

$k = \frac{BC}{BD} = \sqrt{2}$; son angle a une mesure

$\alpha = (\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{4}.$

b) On a : $\begin{cases} (\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IB}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \\ (\overrightarrow{GD}\ ;\ \overrightarrow{GB}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases} \Rightarrow$

$(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{GD}\ ;\ \overrightarrow{GB})[\pi];$

Comme $(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IB}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Rightarrow$

$(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{IB}\ ;\ \overrightarrow{IC})$

$= -\frac{\pi}{2}$; Or $(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi].$

Donc $(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AC})[\pi].$

c) On a : $(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{GD}\ ;\ \overrightarrow{GB})[\pi] \Rightarrow$

$I \in$ au cercle circonscrit à (BDG).

$(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$

$I \in$ au cercle circonscrit à (ACD).

Donc I appartient à l'intersection des cercles circonscrit respectivement à (BDG) et à (ACD).

Nous avons $(\overrightarrow{ID}\ ;\ \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AC})$

$= \frac{\pi}{2}$

Donc (ACID) est un rectangle.

4) f est une homothétie de rapport 2 car son rapport est celui du produit du rapport de S par celui de S'

(c'est - à - dire $(\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2)$).

En plus on a f(D) = S(B) =D donc le centre de f est D.

Problème

1. Etude de la continuité et de la dérivabilité à droite de 0.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 = f(0) \Leftrightarrow$

  f est continue à droite de 0.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\ln x} - 0}{x}$

  $= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x \ln x} = -\infty \Rightarrow$

  f n'est dérivable à droite de 0.

Limite aux bornes de D_f

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =) -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln x = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0^+$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$

Dérivée et sens de variation de f

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2} < 0.$$

2) Tableau de variations

x	0	1	+∞
f ' (x)	-	‖	-
f (x)	0 ↘ -∞	‖	+∞ ↘ 0

3) Il s'agit de calculer f''(x) et d'étudier son signe:

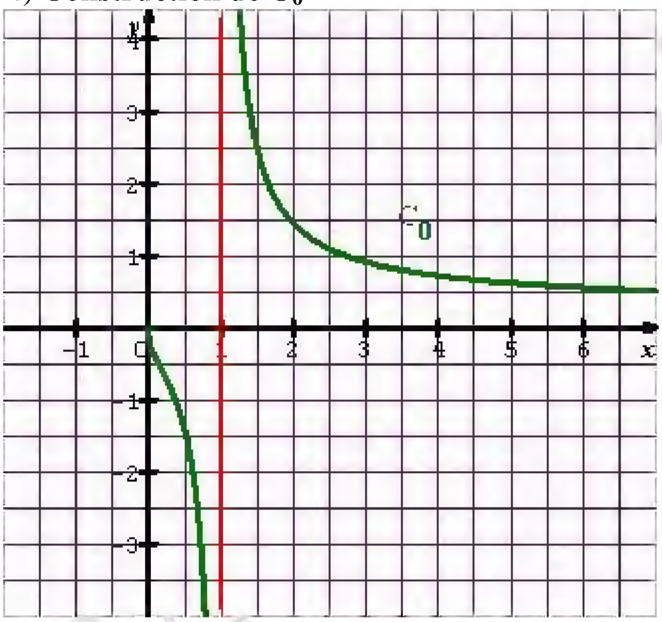
$$f''(x) = -\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)' = \frac{(2+\ln x)\ln x}{x^2(\ln x)^4}$$

Tableau de signe

x	0	$\frac{1}{e^2}$		1	+∞
2 + lnx	-	0	+	‖	+
Lnx	-	|	-	‖	+
f''(x)	+	0	-	‖	+

Le point d'abscisse $\frac{1}{e^2}$ est un point d'inflexion de C_0

4) **Construction de C_0**



Partie B

1) Soit $M_n(x' ; y') \in C_n$ d'où $y' = \frac{e^n}{-n + \ln x'} = \frac{e^n}{\ln \frac{x'}{e^n}}$

D'où $\frac{1}{e^n} y' = \frac{1}{\ln(\frac{x'}{e^n})}$; Onpose : $\begin{cases} x = \frac{1}{e^n} x' \\ y = \frac{1}{e^n} y' \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x' = e^n x \\ y' = e^n y \end{cases}$;

Donc $M_n(x' ; y') \in C_n$ est l'image du point $M(x ; y) \in C_0$ par l'homothétie h_n de centre O et de rapport e^n.

2) Tableau de variations de f_n

Etant donné la propriété de l'homothétie, nous en déduisons le tabeau de variations de f_n comme suit :

x	0	e^n	+∞
f ' (x)	-	‖	-
f (x)	0 ↘ -∞	‖	+∞ ↘ 0

3) On a : $f_{n+1}(x) = \frac{e^{n+1}}{-n + \ln x} = e^1 \times \frac{e^n}{-n + \ln x} \Rightarrow$

$f_{n+1}(x) = e^1 \times f_n(x) \Rightarrow C_{n+1} = h_{(O;e)}(C_n)$.

4.a) On pose : $f_{n+1}(x) = f_n(x) \Leftrightarrow$

$\frac{e^{n+1}}{-n - 1 + \ln x} = \frac{e^n}{-n + \ln x} \Leftrightarrow e(-n + \ln x)$

$= -n - 1 + \ln x \Leftrightarrow$

$(e-1)\ln x = n(e-1) - 1 \Leftrightarrow$

$\ln x = n - \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow x = e^{n - \frac{1}{e-1}}$.

$d'où\ y_n = \frac{e^n}{-n + n - \frac{1}{e-1}} = -e^n(e-1) \Rightarrow$

$M_n(e^{n-\frac{1}{e-1}} ; -e^n(e-1)) \in C_n \cap C_{n+1}$

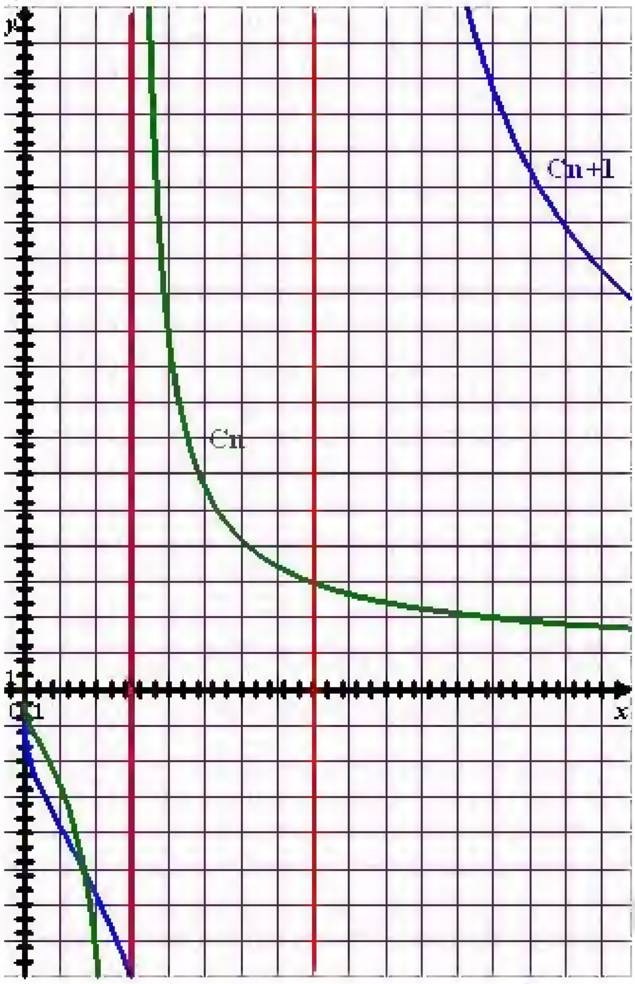
b) Comme $M_n(e^{n-\frac{1}{e-1}} ; -e^n(e-1))$ on a :

$x_n = e^{n-\frac{1}{e-1}} \Leftrightarrow e^n = x_n e^{\frac{1}{e-1}}$;

Donc $y_n = (1-e)e^{\frac{1}{e-1}} x_n$

On en déduit que M_n appartient à la droite fixe d'équation : $y = (1-e)e^{\frac{1}{e-1}} x$; elle passe par O.

c) Allure de C_{n+1} et C_n



Le tableau suivant donne la position relative de C_{n+1} et C_n

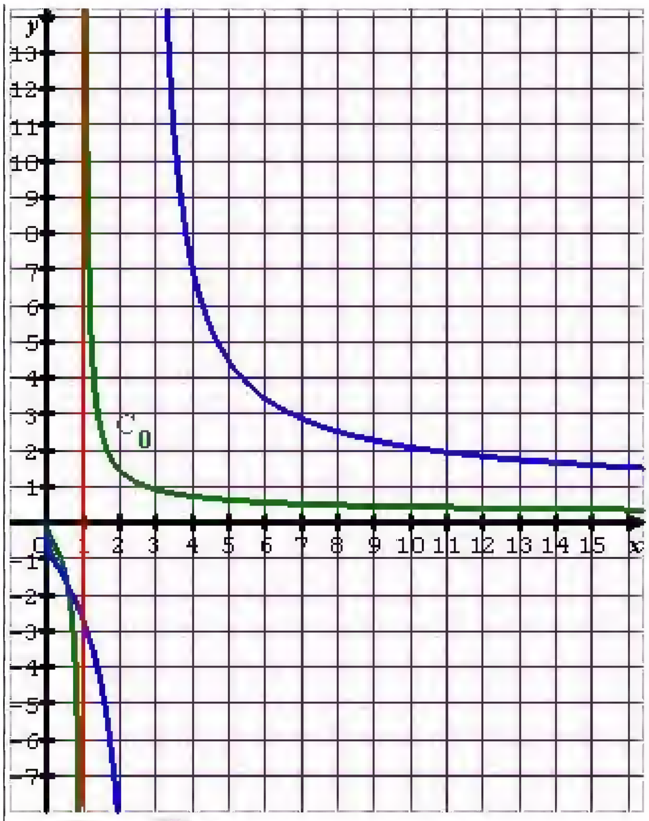
x	0 x_n	e^n	e^{n+1}	$+\infty$
Position de Cn et Cn+1	C_n / C_{n+1}	C_{n+1} / C_n	C_n / C_{n+1}	C_{n+1} / C_n

5) On a : $g(x) = \dfrac{e}{-1+\ln x} = e \times f_0(x)$ d'où

$\Gamma = h_{(O\,;e)}(C_0)$ (c'est à-dire que Γ est l'image de C_0 par l'homothétie de centre O et de rapport e).

$$\frac{e}{-1+\ln x} = e \times f_0(x)$$

On en déduit donc la construction de Γ à partir de celle de C_0 facilement.



Partie C

1) Soit $u(x) = e^{x-1} - x$; on a $u'(x) = e^{x-1} - 1$; d'où le tableau variations de u(x) :

x	1 $+\infty$
u ' (x)	+
u (x)	0 $\nearrow$ $+\infty$

On en déduit donc que : pour $x \geq 1$; $e^{x-1} \geq x$.

D'autre part la fonction f définit au départ est continue sur $[x\,;e^{x-1}]$ d'où l'existance de F(x) pour $x \geq 1$.

2.a) Pour $x > 1$ on a : $x \leq t \leq e^{x-1} \Leftrightarrow$

$$\ln x \leq \ln t \leq x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x} \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{e^{x-1}} \frac{1}{x-1}dt \leq \int_x^{e^{x-1}} \frac{1}{\ln t}dt \leq \int_x^{e^{x-1}} \frac{1}{\ln x}dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x-1}\left[t\right]_x^{e^{x-1}} \leq F(x) \leq \frac{1}{\ln x}\left[t\right]_x^{e^{x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{x-1} - x}{x-1} \leq F(x) \leq \frac{e^{x-1} - x}{\ln x} \to *$$

b) On pose $p(x) = e^{x-1} - x$ d'où p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $p'(x) = e^{x-1} - 1$.

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{p(x)-p(1)}{x-1}=p'(1)=0$

  De même

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{p(x)-p(1)}{x-1}\times\dfrac{x-1}{\ln x}$

  $=p'(1)\times\dfrac{1}{\ln'1}=0.$

Donc $\lim\limits_{x\to 1}F(x)=0=F(1)$; d'où la continuité de F en $x=1$.

3) Calcul de G'(x) et G''(x) sur [2 ; $+\infty$[.

Soient F et G deux primitives de f sur [2 ; $+\infty$[donc on a : $G(x)=\left[F(t)\right]_x^{e^{x-1}}=F(e^{x-1})-F(x)$ d'où

$G'(x)=e^{x-1}f(e^{x-1})-f(x)$;

Donc $G'(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ et

$$G''(x)=\frac{e^{x-1}(x-1)-e^{x-1}}{(x-1)^2}-\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\Leftrightarrow$$

$$G''(x)=\frac{e^{x-1}(x-2)}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\geq 0\text{ ; car } x\geq 2.$$

Variations de G'

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
G'' (x)	+
G' (x)	(e – 1) / ln2 $\nearrow$ $+\infty$

Or G'(2) = (e – 1) / ln2 d'après (*) donc $\forall$ x $\geq$2 ; G'(x) > 0.

b) D'après * $\dfrac{e^{x-1}-x}{x-1}\leq G(x)$ et d'autre part

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}-x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\times\frac{\frac{1}{e}-\frac{x}{e^x}}{1-\frac{1}{x}}=+\infty\text{ , donc}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)==+\infty$. De même $\dfrac{e^{x-1}-x}{x(x-1)}\leq\dfrac{G(x)}{x}$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-1}-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\times\frac{\frac{1}{e}-\frac{x}{e^x}}{1-\frac{1}{x}}=+\infty,\text{ d'où}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{G(x)}{x}=+\infty.$

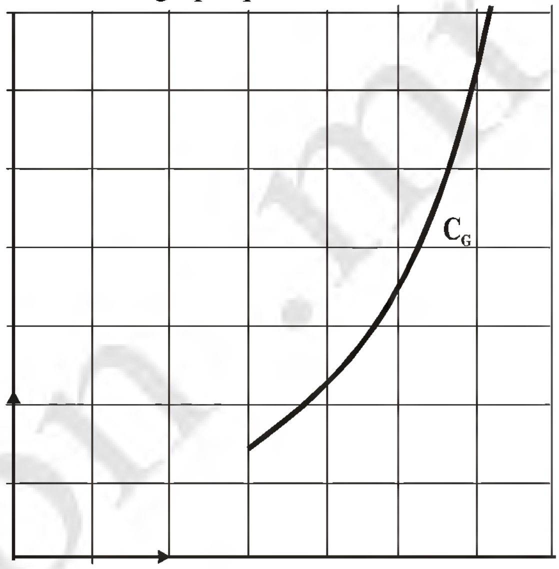
Il en résulte que lma courbe de G admet une branche parabolique de direction (Oy).

c) Tableau de variations

x	2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
G' (x)	+
G (x)	G(2) $\nearrow$ $+\infty$

Avec G(2) $\leq$ e -2.

Représentation graphique de G



Sujet 2002 /Séries : C & TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

1) Résolution de l'équation : $Z^2 - (8\cos\theta)Z + 16 - 7\sin^2\theta = 0$

$\Delta = (8\cos\theta)^2 - 4(16 - 7\sin^2\theta) = -36\sin^2\theta$

$= (i6\sin\theta)^2$

$$\text{d'où } \begin{cases} Z_1 = 4\cos\theta + i3\sin\theta \\ Z_2 = 4\cos\theta - i3\sin\theta \end{cases}$$

2.a) M_1 et M_2 les affixes respectives de Z_1 et Z_2.

On a $M(x\,;\,y) \in \Gamma$ signifie que : $\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = -3\sin\theta \end{cases}$

Dans les deux cas on en déduit que :

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ et c'est bien l'équation cartésiènne de Γ.

b) Γ est une ellipse d'éléments caractéristiques :

- centre O, origine du repère $(O;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$
- sommets : $S_1(4\,;\,0)$; $S_2(-4\,;\,0)$; $S_3(0\,;\,3)$; $S_4(0\,;\,-3)$;
- excentricité $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

  (car $e = \dfrac{c}{a}$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7}$) ;
- foyers : $F_1(\sqrt{7}\ ;0)$; $F_2(-\sqrt{7}\ ;\ 0)$.

3.a) $A(0\,;\,1)$ et M un point de Γ ; G barycentre du système $\{(A\,;\,-3)\,;\,(M\,;\,1)\}$.

On a : $-3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow$

$G = h_{(A\,;\,\frac{-1}{2})}(M)$.

Exprimons cette homothétie analytiquement :
Soit $G(x'\,;\,y')$; $M(x\,;\,y)$.

$$G = h_{(A\,;\,\frac{-1}{2})}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x \\ y' = -\dfrac{1}{2}y + \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x' \\ y = -2y' + 3 = -2(y' - \dfrac{3}{2}) \end{cases}$$

D'où $h_{(A\,;\,\frac{-1}{2})}(\Gamma) = \Gamma'$.

d'équation $\dfrac{4x'^2}{16} + \dfrac{4(y' - \frac{3}{2})}{9} = 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{(y' - \frac{3}{2})}{\frac{9}{4}} = 1.$

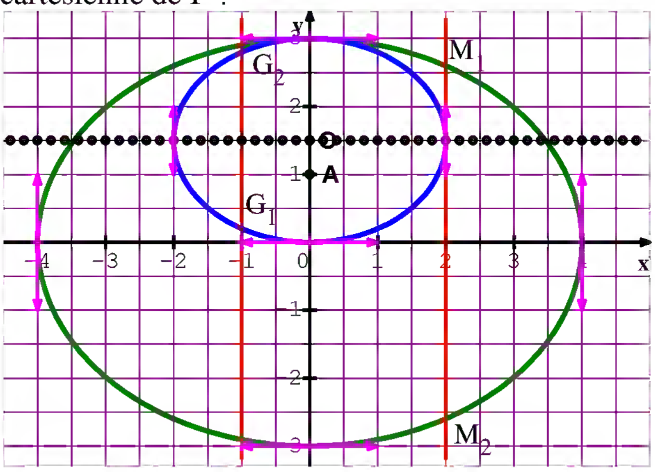
Donc Γ' est l'ellipse d'éléments caractéristiques :

- centre $O'(0\,;\,\dfrac{3}{2})$, dans le repère $(O;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$
- sommets : $S_1(2\,;\,0)$; $S_2(-2\,;\,0)$; $S_3(0\,;\,0)$; $S_4(0\,;\,3)$.
- excentricité $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

  (car $e = \dfrac{c}{a}$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$) ;
- foyers : $F_1(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\ ;0)$; $F_2(-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\ ;\ 0)$.

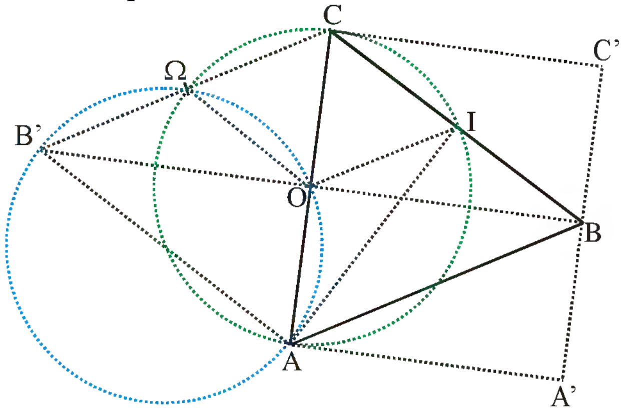
b) Comme l'équation de Γ' est $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{(y' - \frac{3}{2})}{\frac{9}{4}} = 1$

Il en résulte que cette formule est équivalente à : $9x'^2 + 16y'^2 - 48y = 0$ et c'est l'équation cartésienne de Γ'.



Exercice 2

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



b) Nous avons que : $CI = CO = OI = \frac{1}{2}AB$ ce qui signifie que le triangle IOC est équilatéral.

Puis on a $f(C)= t\circ r(C)= t(B') = O$ d'où $f(C)= O$.

c) f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ car elle est la composée de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{3}$ suivie de la translation t. De plus f(C)= O ; f(A)= A' et f(B)= C' donc le centre de f est le point I ;

f(A) = A' et f est une rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc le triangle IAA' est équilatéral.

2) S la similitude directe telle que : S(O)= A et S(C) = I.

On a ICO est équilatéral, de plus S transforme un triangle équilatéral en un triangle équilatéral d'où S(I) = A' car S(OCI) = AIA'.

L'angle de S est : $\theta = (\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{AI}) = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$;

son rapport est k est égal à $\frac{AI}{OC} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}AC}{\frac{1}{2}AC} = \sqrt{3}$

3.a) Soit Ω le centre de S. On a S(C) = I d'où

$(\overrightarrow{\Omega C}\ ;\ \overrightarrow{\Omega I}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$; Or $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AI}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

c'est à dire que : $(\overrightarrow{\Omega C}\ ;\ \overrightarrow{\Omega I}) = (\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AI})\ [2\pi]$.

Donc les points Ω ; I ; C et A sont cocycliques.

Puis nous avons : S(O) = A d'où

$(\overrightarrow{\Omega O}\ ;\ \overrightarrow{\Omega A}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$; Or $(\overrightarrow{B'O}\ ;\ \overrightarrow{B'A}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

c'est à dire que : $(\overrightarrow{\Omega O}\ ;\ \overrightarrow{\Omega A}) = (\overrightarrow{B'O}\ ;\ \overrightarrow{B'A})\ [2\pi]$

Donc les points Ω ; A ; O et B' sont cocycliques.

b) Ω est le deuxième point d'intersection des deux cercles circonscrits respectivement aux triangles AIC et AOB'.

4.a) On a AΩB' est un triangle rectangle en Ω ; le triangle ACB' est équilatéral d'où Ω est le milieu de [CB'], on en déduit que :

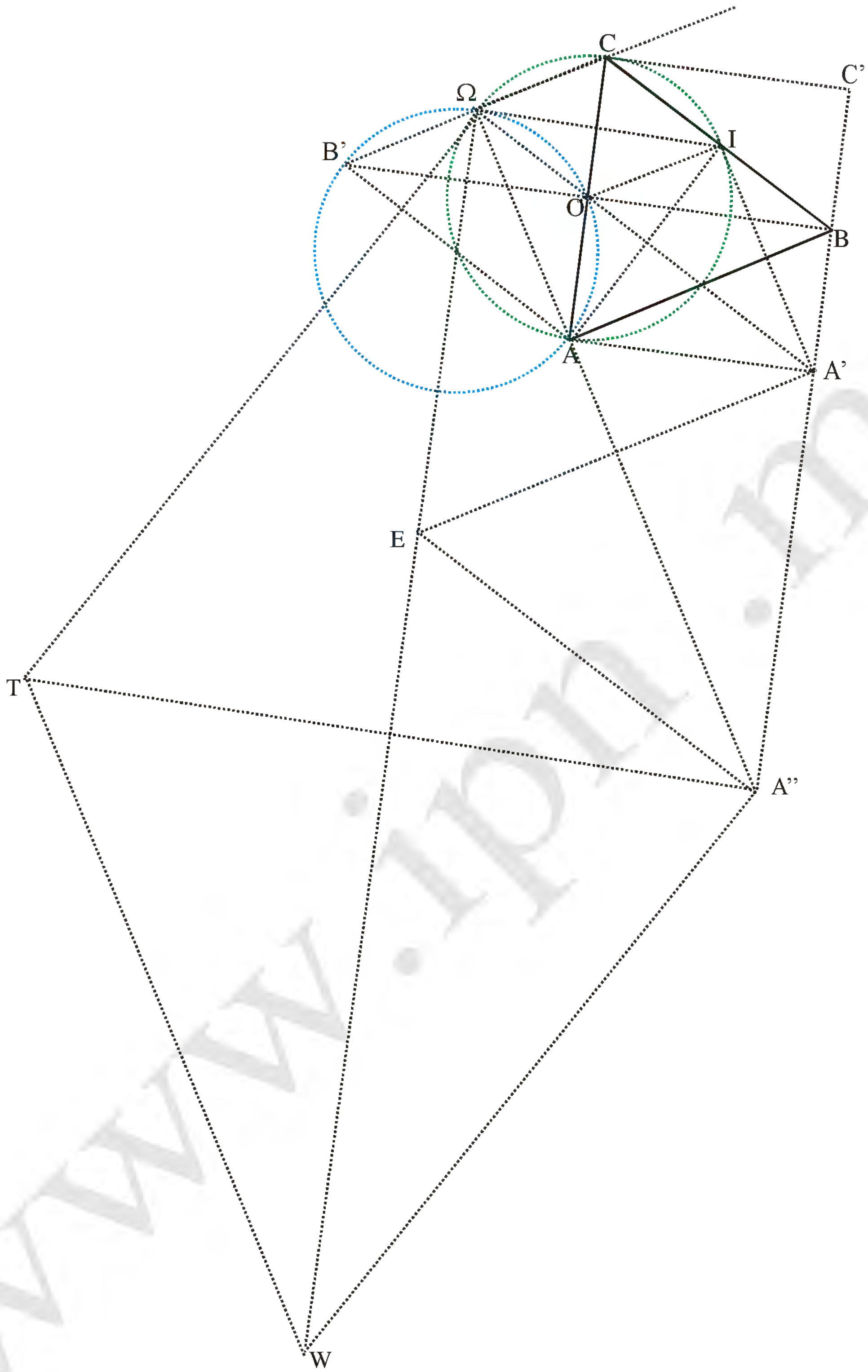
$O\Omega = \frac{1}{2}AB' = IC = OI = C\Omega$;

D'où ΩOIC est un losange.

b) Programme de construction : il suffit de savoir que la grande diagonale du losange ΩOIC est le côté du losange suivant (son image par S) ce qui nous permet de construire un losange constitué de deux traingles équilatéraux et ainsi de suite…

c) S^6 est la similitude d'angle $6 \times (\frac{-\pi}{6}) = -\pi$

De rapport $\left(\sqrt{3}\right)^6 = 27$ et de centre Ω donc elle devienne l'homothétie $h_{(\Omega\ ;\ -27)}$.


C
C'
Ω
I
B'
O
B
A
A'
E
T
A''
W

Problème

I. Etude d'une fonction auxiliaire

1.) $f(x) = \dfrac{x}{1+x+x^2}$.

- $Df = \mathbb{R}$;
- Limites aux bornes de D_f

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ est une AH.

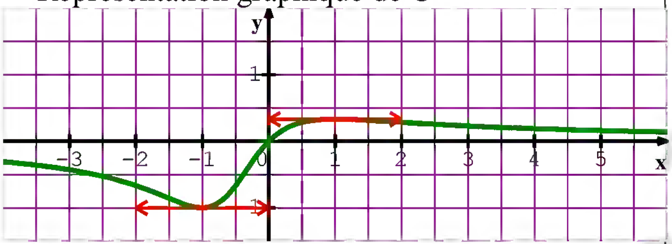
- Dérivée de f

$$f(x)' = \frac{-x^2+1}{(1+x+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x+x^2)^2}$$

- Tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f ' (x)		-	0	+	0	-	
f (x)	0	↘	-1	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0

- Représentation graphique de C



2) Discussion graphique des nombre de solutions de l'équation : $mx^2 +(m-1)x + m = 0$.
Cette équation est équivalente à $f(x) = m$ autrement dit l'intersection de la courbe C avec la droit d'équation $y = m$. D'après le graphique on a :

- Si $m \in]-\infty\,;\,-1[$, alors l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
- Si $m= -1$, alors l'équation $f(x) = m$ admet $x= -1$ comme solution ;
- Si $m \in]-1\,;\,0[$, alors l'équation $f(x) =m$ admet eux solutions négatives de $\mathbb{R}$;
- Si $m = 0$, alors l'équation $f(x) = m$ admet $x= 0$ comme solution ;
- Si $m \in]0\,;\,\frac{1}{3}[$, alors l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions positives de $\mathbb{R}$;
- Si $m = \frac{1}{3}$, alors l'équation $f(x) = m$ admet $x= 1$ comme solution.
- Si $m \in]\frac{1}{3}\,;\,+\infty[$, alors l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

II. Etude des tangente à une courbe

1.a) g est la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = (x+1)e^{\frac{-1}{x}} \quad ; x > 0. \end{cases}$$

g est le produit (plus la composée) de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ donc elle est dérivable sur cet intervalle et par conséquent elle admet une tangente en tout point de cet intervalle ($x> 0$).

En particulier, étudions sa tangente en O (abscisse $x = 0$).

$$\text{On a : } \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} (1+\frac{1}{x})e^{\frac{-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{-1}{x}}) = 0.$$

Donc $g'_d(0) = 0$, d'où Γ admet l'axe des abscisses comme demi tangente.

- Limites aux bornes de Dg

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{-1}{x}} = +\infty$$

- Dérivée et sens de variation de g

  $g'(x) = \left((x+1)e^{\frac{-1}{x}}\right)'$; après calcul et simplification elle donne :

$$g'(x) = \frac{x^2+x+1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{f(x)}e^{-\frac{1}{x}}.$$

$\forall\, x \geq 0$; $g'(x) \geq 0$, car $f(x) \geq 0$ et $e^{-\frac{1}{x}} > 0$.

b) Tableau de variations

x	0		$+\infty$
f ' (x)	0	+	
f (x)	0	↗	$+\infty$

2.a) On détermine d'abord les équations des deux tangentes : T_a et $T_{\frac{1}{a}}$ ($a > 0$ et $a \neq 1$)

T_a : $y = g(a)'(x- a) + g(a) \Rightarrow T_a$ coupe (Ox) au point d'abscisse $x_0 = -\dfrac{g(a)}{g'(a)} + a$ d'où

$$x_0 = -\frac{(a+1)e^{-\frac{1}{a}}}{\frac{a^2+a+1}{a^2}e^{-\frac{1}{a}}} + a = \frac{a}{a^2+a+1} = f(a).$$

$T_{\frac{1}{a}}$: $y = g'(\frac{1}{a})\,(x - \frac{1}{a}) + g(\frac{1}{a}) \Rightarrow T_{\frac{1}{a}}$ coupe (Ox) au point d'abscisse $x_1 = -\dfrac{g(\frac{1}{a})}{g'(\frac{1}{a})} + \dfrac{1}{a}$ d'où

$$x_1 = -\frac{(\frac{1}{a}+1)e^{-a}}{\dfrac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}+1}{\frac{1}{a^2}}e^{-a}} + \frac{1}{a} = -\frac{\frac{a+1}{a}}{a^2+a+1} + \frac{1}{a}$$

$$= \frac{a}{a^2+a+1} = f(a).$$

Donc, T_a et $T_{\frac{1}{a}}$ coupent (Ox) au point d'abscisse $f(a) = \dfrac{a}{a^2+a+1}$.

b) D'après le le T.V de f on a : $0 \le f(a) \le \dfrac{1}{3}$ $(\forall a > 0)$, Or toute les tangentes T_a et $T_{\frac{1}{a}}$ coupent Γ au point d'abscisse $f(a)$ tel que: $f(a) = \dfrac{a}{a^2+a+1}$.

Donc toute les tangentes à Γ coupent le segment [OB].

c) On a vu que les deux tangentes T_a et $T_{\frac{1}{a}}$ coupent [OB] en un même point d'abscisse $f(a) = \dfrac{a}{a^2+a+1}$. d'autre part l'équation $f(x) = m$ avec $m \in]0 ; \frac{1}{3}[$ admet deux solutions distinctes, alors par chaque point A(m ; 0) du segment [OB] privé de O, passent deux tangentes distinctes à Γ.

d) On a : $g'(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{f(x)} e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow g''(x) = \dfrac{-x+1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$

$g''(x) = \dfrac{-x+1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}$ Donc g''(x) s'annule en changeant de signe au point d'abscisse 1 ce qui démontre que c'est un point d'inflexion.

Soit T_1 la tangente en ce point d'abscisse 1.

T_1 : $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$; Or $g(1)' = \dfrac{3}{e}$ et $g(1) = \dfrac{2}{e}$ c'est –à- dire que : $T_1 : y = \dfrac{3}{e}x - \dfrac{1}{e}$.

T_1 coupe (Ox) au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$.

3.a) h la fonction définie par : $h(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$

On a $h'(t) = te^{-t}$; $t \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le e^{-t} \le 1 \Leftrightarrow$
$0 \le te^{-t} \le t \Leftrightarrow 0 \le h'(t) \le t$.

En intégrant cette double inégalité membre à membre on trouve : $0 \le h(t) \le \dfrac{t^2}{2}$.

b) $x > 0$; $x - g(x) = x - (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$

Nous savon que : $t > 0$; $h(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$

en posant : $t = \dfrac{1}{x}$ on trouve $h(\frac{1}{x}) = 1 - (1+\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$

d'où $xh(\frac{1}{x}) = x - (x+1)e^{-\frac{1}{x}} = x - g(x)$ Or

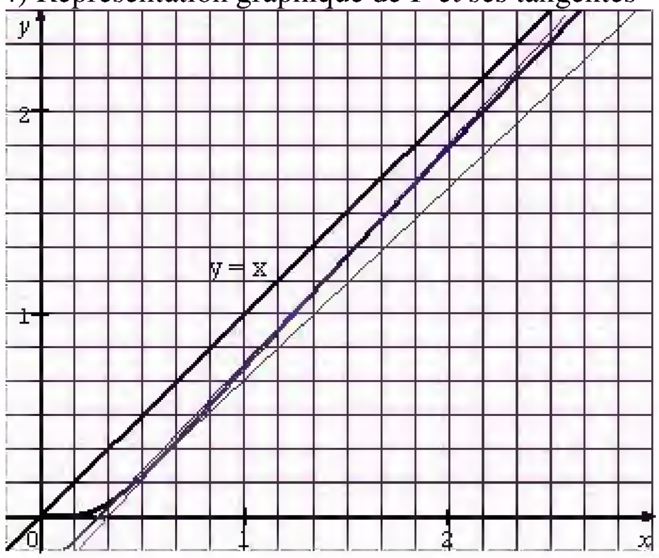
$0 \le h(t) \le \dfrac{t^2}{2}$ c'est - à dire

$0 \le h(\frac{1}{x}) \le \dfrac{1}{2x^2}$ en multipliant par x on trouve :

$0 \le xh(\frac{1}{x}) \le \dfrac{1}{2x}$, d'où $0 \le x - g(x) \le \dfrac{1}{2x}$.

Ce résultat veut dire que la droite d'équation $y = x$ est une asymptôte oblique pour la courbe de g, elle est positionnée en dessus de cette courbe.

4) Représentation graphique de Γ et ses tangentes



III. Etude d'une suite

1) $\forall x \in [0;1]$: $x^{n+1} \le x^n$ d'où

$$\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2} \le \frac{x^n}{1+x+x^2} ;\Rightarrow U_{n+1} \le U_n \Rightarrow$$

(U_n) est décroissante.

$\forall x \in [0;1]$: $0 \le \frac{1}{1+x+x^2} \le 1$ d'où

$$0 \le \frac{x^n}{1+x+x^2} \le x^n ;\Rightarrow$$

En intégrant membre à membre

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx \le \int_0^1 x^n dx$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* ;\ 0 \le U_n \le \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0.$

2.a) On pose : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2} \Rightarrow \\ v'(x) = x^n \end{cases}$

Donc $U_n = \dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\varphi(x)dx.$

b) On a : $\varphi(x) = \dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$, elle a pour dérivée

$$\varphi'(x) = \frac{-6x(1+x)}{(1+x+x^2)^3}.$$

D'où φ est décroissante sur [0 ; 1] ; Or $\varphi(0) \ge \varphi(x) \ge \varphi(1)$.

Donc, $\frac{1}{3} \le \varphi(x) \le 1$; $\forall x \in [0 ; 1]$.

3) On a $\forall x \in [0 ; 1]$; $\frac{1}{3} \le \varphi(x) \le 1$ en multipliant par x^{n+1} et en intégrant on trouve :

$$\frac{1}{3(n+2)}\left[x^{n+2}\right]_0^1 \le \int_0^1 x^{n+1}\varphi(x)dx \le \frac{1}{(n+2)}\left[x^{n+2}\right]_0^1$$

En multipliant par $\frac{1}{(n+1)}$ et en ajoutant $\frac{1}{3(n+1)}$

On trouve :

$$\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(n+2)} \le \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)}\int_0^1 x^{n+1}\varphi(x)dx \le \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

d'où $\dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{3(n+1)(n+2)} \le U_n \le \dfrac{1}{3(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

donc $\dfrac{n+3}{3(n+1)(n+2)} \le U_n \le \dfrac{n+5}{3(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow \dfrac{n(n+3)}{3(n+1)(n+2)} \le nU_n \le \dfrac{n(n+5)}{3(n+1)(n+2)}.$

On en déduit que : $\lim\limits_{n\to\infty} nU_n = \frac{1}{3}$, selon les règles de calcul de limite et le théorème des Gendarmes.

Sujet 2001 /Séries : Séries C & TMGM / Session normale

Exercice 1

1) Etant donné l'expression complexe donnant f_θ :

$Z' = (1 - i\cos\theta)Z - \cos\theta$ avec $\theta \in \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Qui est de la forme $Z' = aZ + b$ tels que :
$a = 1 - i\cos\theta$ et $b = -\cos\theta$.

Alors f_θ est une similitude directe d'éléments caractéristiques :

- Rapport : $\lambda = |1 - i\cos\theta| = \sqrt{1+\cos^2\theta}$
- Centre : Ω C'est l'image du point invariant par f_θ,

  il est donné par : $\frac{b}{1-a} = \frac{-\cos\theta}{i\cos\theta} = i$;

2.a) Les points Ω ; M et M' ont pour affixes respectivesment : i Z et Z'on a donc :

$$\frac{Z_M - Z_\Omega}{Z_M - Z_{M'}} = \frac{Z-i}{i\cos\theta Z + \cos\theta} = \frac{Z-i}{i(Z-i)\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{i\cos\theta} = -\frac{1}{\cos\theta}i.$$

On endéduit que $\left(\overrightarrow{MM'}\ ;\ \overrightarrow{M\Omega}\right) = -\frac{\pi}{2}$; d'où

le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M et

de sens indirect.

b) f_θ étant une similitude transformant M en M', alors

$$\frac{\Omega M'}{\Omega M} = |\mathbf{a}| = \sqrt{1+(\cos^2\theta)} < \sqrt{2};\ \theta \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[;$$

d'où $\frac{\Omega M}{\Omega M'} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, D'autre part le triangle

$\Omega MM'$ est rectangle en M donc

$$\cos\alpha = \frac{\Omega M}{\Omega M'} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{1+(\cos\theta)^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On en déduit que : $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}\ ;\frac{\pi}{4}\right[$.et puisque

$\Omega MM'$ est indirect alors $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}\ ;0\right[$.

3.) A est un point fixé du plan différents de Ω.

$\Gamma_1 : \{M/\ \ f_\theta(A) = M\}$ et tel que : θ varie dans

$\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$. $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow f_\theta(A) = M \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{\Omega A}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M}\right) = \alpha(2\pi)\\ \Omega M = \sqrt{1+(\cos\theta)^2}\,\Omega A\end{cases}$$

Or $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{4}\ ;\ 0\right[$ et $(\overrightarrow{A\Omega}\,;\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

On en déduit que M trace le segment $[AA_1]$ privé de ses extrêmités de même longueur que $[A\Omega]$ lorsque θ varie dans $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Le triangle ΩAA_1 sera alors isocèle en A_1.

D'où $\Gamma_1 = [A\ A_1] \setminus \{A\ ;\ A_1\}$.

b) $\Gamma_2 : \{M/\ \ f_\theta(M) = A\} \Leftrightarrow$

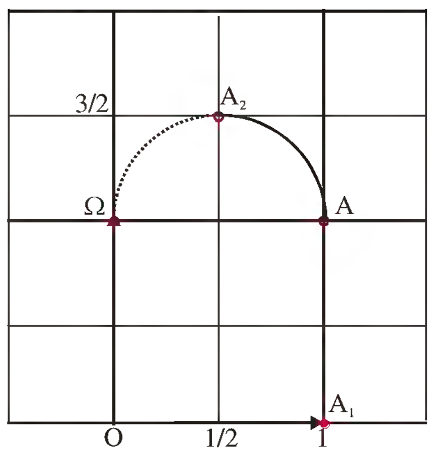
$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega A}\right) = \alpha(2\pi)\\ \Omega A = \sqrt{1+(\cos\theta)^2}\,\Omega M\end{cases} \text{avec } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ 0\right[$$

et $\left(\overrightarrow{M\Omega}\ ;\ \overrightarrow{MA}\right) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

On en déduit que M trace l'arc AA_2 du cercle de diamètre $[\Omega A\ ]$ privé de ses extrêmités.

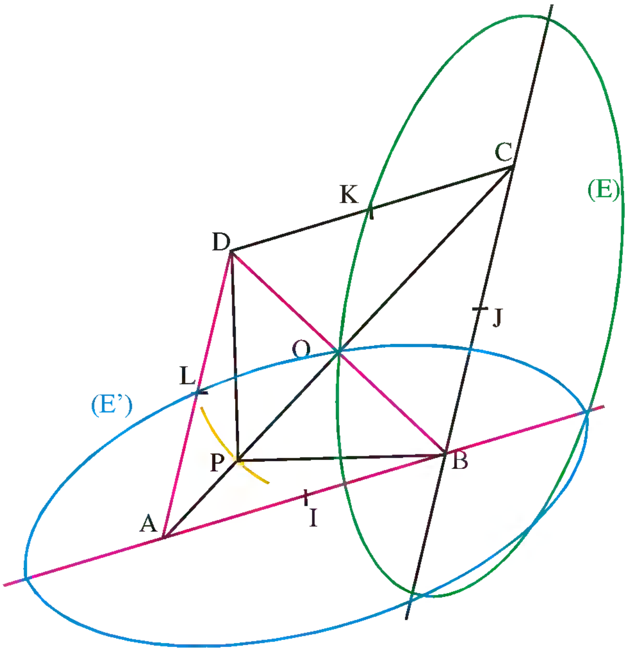
4) Dans le cas ou A(1 ; 1) on aura $A_1(1\ ;\ 0)$ et $A_2(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2})$.

La figure ci-dessous illustre les données et les constructions demandées.



Exercice 2

1.a) Figure illustrant les données



b) D'après 1 : AB = AD = DB on en déduit que :

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{DB}\ ;\ \overrightarrow{DA}\right)=-\frac{\pi}{3}(2\pi) \\ DB=DA\end{cases}\Rightarrow r_1(B)=D;\ ccccccc$$

et comme $\begin{cases}\left(\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{DB}\right)=-\frac{\pi}{3}(2\pi) \\ DC=DB\end{cases}$ alors, $r_1(C)=B$;

sachant que $r_2(B)=B.\ \ r_2(C)=A\ ;\ S_1(C)=A.$

2.a) $g(B)=r_1\circ S_2(B)=r_1(B)=A$;

$g(C)=r_1\circ S_2(C)=r_1(C)=B.$

b) g est le composé d'un déplacement et un antidéplacement donc c'est un antidéplacement et parce que les segments [BA] et [CB] n'ont pas la même médiatrice alors g est une symétrie glissée.

Ecrivons g sous sa forme réduite :

$g(B)=r_1\circ S_2(B)=r_1(B)=A$;

$g(C)=r_1\circ S_2(C)=r_1(C)=B.$

$$g=r_1\circ S_2=S_{DB}\circ S_{DJ}\circ S_{BC}$$
$$=S_{DB}\circ S_{KJ}\circ S_{IJ}=t_{\overrightarrow{CO}}\circ S_{IJ}.$$

Levecteur $\overrightarrow{CO}$ est un vecteur directeur de l'axe (IJ) on en déduit que g est le gliseur de vecteur $\overrightarrow{CO}$,d'axe (IJ).

3.a) (E) est une ellipse de foyers C et B passant par le point O. son plus grand axe mesure 2a.

(E) étant l'ensemble des points M du plan qui vérifient la relation MC + MB = 2a on en déduit que : OB + OC = 2a. Or d'après la figure KC= OB et KB = OC d'où KC + KB = 2a , donc K $\in$(E).D'autre part nous savons que le triangle DPB est isocèle rectangle en P donc l'angle $\widehat{PBD}$ mesure $\frac{\pi}{4}$ radian . On en déduit donc que le triangle OPB est également isocèle rectangle en O donc OP = OB, d'où : CP = CO + OP = CO + OB = 2a.

b) Les deux sommets de l'ellipse sont l'intersection de (E) avec le grand axe (BC) et (E) ; c'est aussi l'intersection de (BC) avec le cercle $\mathscr{C}_1$(J ; r) où r = 0,5CP = a ; les deux sommets sont l'intersection de (E) avec son petit axe (médiatrice de BC) ou \ et par rapport à J (centre de l'ellipse).

4.a) Nous savons que chacune des isométries r_1 ; r_2 ; S ; g transforme une ellipse en une ellipse isométrique ; il suffit donc de déterminer les images des deux foyers par chacune de ces isométries. D'après 1.b) et 2.a) $r_1(B)$ = A et $r_1(C)$ = B ; $r_2(B)$ = B et $r_2(C)$ = A ; $S_1(B)$ = B et $S_1(C)$ = A. g(B) = A et g(C) = B. On constate que les quatre isométries transforment le segment [BC] en [BA] ; il s'ensuit que les quatre courbes E_1 ; E_2 ; E_3 et E_4 se confondent à l'ellipse (E') de foyers A ; B passant par O.

Calculons l'image de K par chacune des transformations r_1 ; r_2 ; S_1 et g.

$r_1(K)=K_1=O$; $r_2(K)=K_2=L'$; $S_1(K)=K_3=L$; $g(K)=r_1o\ S_1(K)=r_1(L)=O$. avec $L'=S_{[AB]}(L)$.

Nous constantans en fin que les quatre points appartiennent à (E').

Problème

Partie A

1) $\forall\ x\in\mathbb{R}$; $g_m(x)=x^2+2x-2m$;où m est un paramètre réel non nul.$g_m(x)=x^2+2x-2m=0$; on a : $\Delta'=1+2m$

- $\Delta'<0\Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}$; l'équation n'admet pas de solution;
- $\Delta'=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$;l'équation admet une solution double ;
- $\Delta'>0\Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$;l'équation admet deux solutions différentes x' et x" avec x' < x".

2) D'après 1) $x' = -1-\sqrt{1+2m}$;

$x'' = -1+\sqrt{1+2m}$,donc pour

$m<0 \Leftrightarrow 2m<0 \Rightarrow 2m+1<1 \Rightarrow$

$-1+\sqrt{1+2m} < 0$ et $-1-\sqrt{1+2m} > -2$

d'où $-2< x' < x''$.

$m>0 \Leftrightarrow 2m>0 \Rightarrow 2m+1>1 \Rightarrow$

$-1-\sqrt{1+2m} < -2$ et $-1+\sqrt{1+2m} > 0$

d'où $x' < -2< 0 < x''$.

Dans la suite du problème on considère m > 0 et que le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J) avec unité de mesure 1 cm.

Partie B :

Etude d'une famille de fonctions

$f_m(x) = x + m\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|$;

1 .a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\ ;\ 0\}$

Calcul de limites aux bornes

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} f_m(x) = -\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-2^+} f_m(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} f_m(x) = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to0^+} f_m(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$.

b) $$f'm(x) = 1 + m\frac{\frac{x-x-2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}} = 1 + m\frac{-2}{x^2}\times\frac{x}{x+2}$$

$$= 1 + m\frac{-2}{x(x+2)} = \frac{x^2+2x-2m}{x(x+2)}.$$

On remarque : $f'_m(x) == \frac{g_m(x)}{x(x+2)}$.

Où $g_m(x)$ est celle définie dans la partie A.

Comme m> 0 ; on a $g_m(x) \le$ si $x \in [x' ; x'']$ il est positif ailleurs. D'où le tableau de variations de f_m:

x	$-\infty$ x'	-2	0	x''	$+\infty$
g_m (x)	+	-	-	-	+
x(x+ 2)	+	+	-	+	+
f_m '(x)	+	-	+	-	+
f_m (x)	$-\infty \nearrow$ y'	y' $\searrow -\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow$ y''	y'' $\nearrow +\infty$

2.a) $\forall m > 0$;$I(x_0 ; y_0) \in C_m \Leftrightarrow \forall m > 0$, $f_m(x_0) = y_0$

$\Leftrightarrow \forall m > 0$, $x_0 + m\ln\left|\frac{x_0+2}{x_0}\right| = y_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall m > 0$, $x_0 + m\ln\left|\frac{x_0+2}{x_0}\right| - y_0 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\ln\left|\frac{x_0+2}{x_0}\right| = 0\\ x_0 - y_0 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left|\frac{x_0+2}{x_0}\right| = 1\\ x_0 = y_0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_0+2 = x_0 \text{ ou } x_0+2 = -x_0\\ x_0 = y_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0 = -1\\ y_0 = -1\end{cases};$$

D'où I(-1; -1).

Ce point vérifie bien : $f_m(2a - x) = 2b - f_m(x)$ où (a ; b) = (-1 ; -1) car :

$f_m(-2-x) = -2 - x + m\ln\left|\frac{-2-x+2}{-2-x}\right|$

$= -2 - x + m\ln\left|\frac{-x}{-2-x}\right| \Leftrightarrow$

$-2 - x + m\ln\left|\frac{-x}{-2-x}\right| = -2 - f_m(x)$.

Donc le point I (-1 ; -1) est bien un centre de symétrie de toutes les courbes C_m.

b) D'après le tableau de variation de f_m sa courbe représentative Cm possède deux asymptôtes verticales d'équations respectives x = 0 ; x = -2.

Calculons les coefficients de l'équation de son asymptôte oblique Δ :

- $a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_m(x)}{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x + m\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} (1 + \frac{m\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|}{x}) = 1$

- $b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f_m(x) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} m\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| = 0.$

On a donc l'équation de Δ : y = x.

Déterminons la position relative de C_m par rapport à Δ pour cela étudions le signe de f(x) – x.

$f(x) - x = m\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|$;$m > 0$ et $m\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| \ge 0 \Leftrightarrow$

$\left|\dfrac{x+2}{x}\right| \geq 1$.On a trois cas :

- $x \in \left]-\infty\ ;-2\right[\Rightarrow x < x+2 < 0;$ donc

  $0 < \dfrac{x+2}{x} < 1$ d'où $\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right| < 0$

- $x \in \left]0\ ;+\infty\right[\Rightarrow \dfrac{x+2}{x} > 1;$ donc

  $\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right| > 0$ on en déduit que :

  $x \in \left]-\infty\ ;2\right[\ \Rightarrow f_m(x) - x < 0$ donc Δ est au dessus de C_m : $x \in \left]0\ ;+\infty\right[\Rightarrow f_m(x) - x > 0;$

  donc Δ est au dessous de C_m.

- $x \in \left]-2\ ;0\right[$ on distinct deux cas :

  1) $-2 < x < -1 \Rightarrow 0 < x+2 < 1 < -x \Rightarrow$

  $-1 < \dfrac{1}{x} < \dfrac{x+2}{x} < 0$ d'où $\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right| < 0;$

  donc $f_m(x) - x < 0$ d'où Δ est au dessus de C_m;

  2) $-1 < x < 0 \Rightarrow 1 < x+2 < 2 \Rightarrow \dfrac{2}{x} < \dfrac{x+2}{x} < \dfrac{1}{x} < -1$

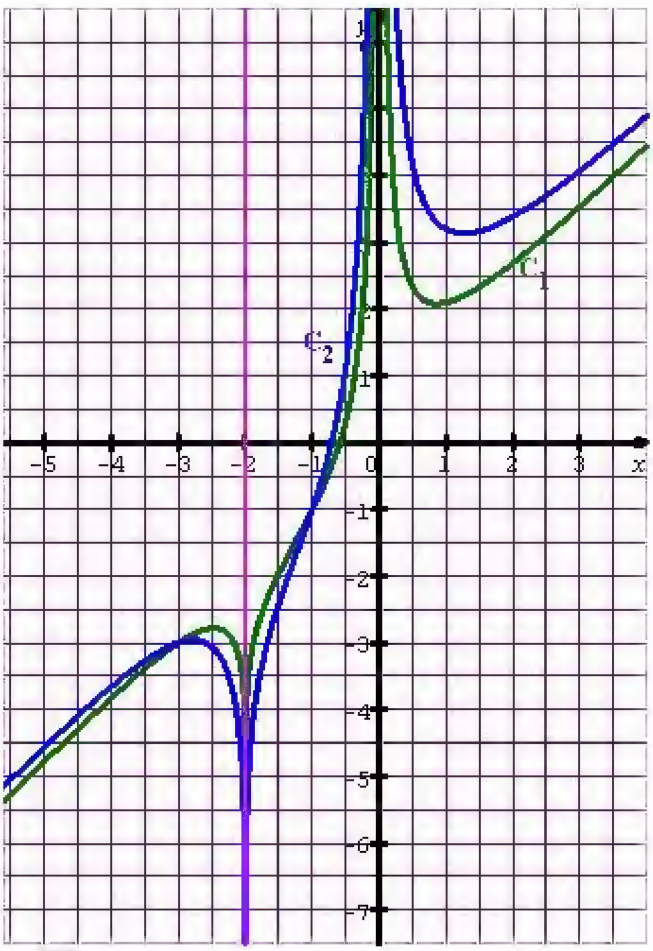
  d'où $1 < \left|\dfrac{1}{x}\right| < \left|\dfrac{x+2}{x}\right|$; on en déduit que : $\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right| > 0$

  d'où $f_m(x) - x > 0;$ Donc; Δ est au dessous de C_m.

On résume la position relative dans le tableau suivant :

x	$-\infty$ … -2	-2 … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
$f_m(x) - x$	-	-	0 +	+
Position Relative	Δ / C	Δ / C	C / Δ	C / Δ

- Représentation graphique de C_1 et C_2 ci-contre :



Partie C

$\varphi_m : M(Z) \to M'(Z')$ tel que : $Z' = \dfrac{1}{2}\left[(1+m)+(1-m)i\right]Z + \dfrac{1}{2}\left[(1-m)+(1-m)i\right]\overline{Z}$;

où $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $\overline{Z}$ est le conjugué de Z.

$\varphi_m(M) = (M') \Leftrightarrow x'+iy' = \dfrac{1}{2}\left[(1+m)+(1-m)i\right](x+iy) + \dfrac{1}{2}\left[(1+m)+(1-m)i\right](x+iy)(x-iy) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(2x) \\ y' = (1-m)x + my \end{cases}$$

b) l'ensemble des points invariants par φm est l'ensemble vérifiant : $\varphi_m(M) = M$.

$$\varphi_m(M)=M \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(2x) \\ y=(1-m)x+my \end{cases} \quad \text{avec } m\neq 1 \Leftrightarrow y=x \Leftrightarrow M\in\Delta.$$

c) $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x-x \\ (1-m)x+my-y \end{pmatrix}=\overrightarrow{MM}\begin{pmatrix} 0 \\ (1-m)(x-y) \end{pmatrix}$ puisque $M\notin\Delta$ et $m\neq 1$ alors $\overrightarrow{MM}$ est colinéaire à $\vec{j}$ d'où (MM') est parallèle à $(y'Oy)$;

d) $\overrightarrow{M_0M'}=\overrightarrow{M_0M}+\overrightarrow{MM'}=(y-x)\vec{j}+(1-m)(x-y)\vec{j}=(1+m-1)(y-x)\vec{j}=m\overrightarrow{M_0M}.$

2.a) $f_1(x)=x+\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right|$ et $\varphi_m(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}(2x) \\ y'=(1-m)x+my \end{cases}$ d'où $y'=x'+m\ln\left|\dfrac{x'+2}{x'}\right|=f_m(x')\Leftrightarrow$

$M(x';y')\in C_m \Leftrightarrow \varphi_m(C_1)=C_m.$

On en déduit que pour construire C_m il suffit de prendre un point $M(x;y)$ de C_1 et son projeté $M_0(x_0;y_0)$ sur Δ parallèlement à $(y'Oy)$;

M' sera alors le point de la droite (M_0M) qui vérifie : $\overrightarrow{M_0M'}=m\overrightarrow{M_0M}$

b) Construction de C_2 (Voir la représentation faite dans la partie B.)

Partie D : Etude de la convergence d'une suite numérique

1) Parce que $0<\lambda<1$ et $\lambda<x<1$, alors $\displaystyle\int_\lambda^1 \ln\left|\frac{x+2}{x}\right|dx=\int_\lambda^1 \ln\frac{x+2}{x}dx$;

$x>0\Rightarrow \dfrac{x+2}{x}>1\Rightarrow \ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right|>0$, il s'en suit que pour $m>0$, $x+(m+1)\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right|>x+m\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right|$ donc

$f_{m+1}(x)>f_m(x)$; On en déduit que : $\displaystyle A_\lambda=\int_\lambda^1 (f_{m+1}(x)-f_m(x))dx=\int_\lambda^1 \ln\left|\frac{x+2}{x}\right|dx=\int_\lambda^1 \ln\frac{x+2}{x}dx.$

Posons $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln\dfrac{x+2}{x} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{-2}{x(x+2)} \end{cases}\Rightarrow$

$$A_\lambda=\left[x\ln\frac{x+2}{x}\right]_\lambda^1+\int_\lambda^1\frac{2}{x(x+2)}dx=\ln 3+2\ln 3-\left[\lambda\ln\frac{\lambda+2}{\lambda}+2\ln(\lambda+2)\right].$$

$$=3\ln 3-(\lambda+2)\ln(\lambda+2)+\lambda\ln\lambda.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0^+}A_\lambda=\lim_{\lambda\to 0^+}(3\ln 3-(\lambda+2)\ln(\lambda+2)+\lambda\ln\lambda)=3\ln 3-2\ln 2=\ln\frac{27}{4}.$

2.a) Pour $x > 0, h(x) = \ln(1+\frac{2}{x})$; $h'(x) = \frac{x - x - 2}{x_2} \times \frac{x}{x+2} = \frac{-2}{x(x+2)} < 0$, on en déduit que h est décroissante sur $]0\ ;\ 1]$. Pour $1 \le P \le n-1$ nous avons $x \in \left[\frac{P}{n}\ ;\ \frac{P+1}{n}\right] \Rightarrow h(\frac{P+1}{n}) \le h(x) \le h(\frac{P}{n}) \Rightarrow$

$$\int_{\frac{P}{n}}^{\frac{P+1}{n}} h(\frac{P+1}{n})dx \le \int_{\frac{P}{n}}^{\frac{P+1}{n}} h(x)dx \le \int_{\frac{P}{n}}^{\frac{P+1}{n}} h(\frac{P}{n})dx \Rightarrow \frac{1}{n}h(\frac{P+1}{n}) \le \int_{\frac{P}{n}}^{\frac{P+1}{n}} h(x)dx \le \frac{1}{n}h(\frac{P}{n}).$$

b) On en déduit que : $\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} h(\frac{P+1}{n}) \le \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\int_{\frac{P}{n}}^{\frac{P+1}{n}} h(x)dx \le \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} h(\frac{P}{n}) \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} h(\frac{P+1}{n}) \le \int_{\frac{1}{n}}^{1} h(x)dx \le S_n$; Or

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} h(\frac{P+1}{n}) = S_n - \frac{1}{n}h(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}h(\frac{n+1}{n}) \ge S_n - \frac{1}{n}h(\frac{1}{n}).$$

Donc $S_n - \frac{1}{n}h(\frac{1}{n}) \le A(\frac{1}{n}) \le S_n$; ils'en suit que $A(\frac{1}{n}) \le S_n$ et $S_n \le A(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}h(\frac{1}{n})$;

Soit $A(\frac{1}{n}) \le S_n \le A(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}h(\frac{1}{n})$.

c) Posons $\lambda = \frac{1}{n}$ si $n \to +\infty \Leftrightarrow \lambda \to 0^+$ d'où $\lim_{n\to+\infty} A(\frac{1}{n}) = \ln\frac{27}{4}$.

En passant à la limite l'inégalité(1) se conserve d'où : $\ln\frac{22}{4} \le \lim_{n\to+\infty} S_n \le \ln\frac{22}{4} + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}h(\frac{1}{n})$;

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}h(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(1+2n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+2n)}{1+2n}\frac{1+2n}{n} = 0\times 2 = 0.;\ \text{d'où}\ \lim_{n\to+\infty} S_n = \ln\frac{22}{4}.$$

Sujet 2001 /Séries : Séries C & TMGM / Session complémentaire

Exercice 1

1 .a) Le calcul donne $P(i) = 0$; $P(2i) = 0$.

b) Soit $P(Z) = (Z^2-3iZ-2)(Z^2+aZ+b)$ tels que a et b des nombres complexes à déterminer.

Soit $P(Z) = (Z^2-3iZ-2)(Z^2+aZ+b) =$

$Z^4 +(a-3i)Z^3 -(3ia -b +2)Z^2 + (-3ib -2a)Z -2b \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a-3i=-2-6i \\ -3ia+b-2=-12+9i \\ -3ib-2a=13+9i \\ -2b=2-6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2-3i \\ b=-1+3i \end{cases} \Rightarrow$$

$P(Z) = (Z^2-3iZ-2)(Z^2+-(2+3i)Z-1+3i)$

Résolvons l'équation : $P(Z) = 0 \Leftrightarrow$

$(Z^2-3iZ-2)(Z^2+-(2+3i)Z-1+3i) = 0$

$\Delta = (2+3i)^2 - 4(-1+3i) = 4 -9 +12i +4 -12i = i2$.

D'où $Z' = \dfrac{2+3i-i}{2} = 1+i$ et $Z'' = \dfrac{2+3i+i}{2} = 1+2i$

Donc les solutions de l'équation donnée sont :

$Z_1 = i$; $Z_2 = 1 + i$; $Z_3 = 2i$; $Z_4 = 1 + 2i$.

2.a) $\sum_{k=1}^{4} p_k = \sum_{k=1}^{4} t|Z_k|^2 = 1 \Leftrightarrow t(1+2+4+5) = 1 \Leftrightarrow$

$t = \dfrac{1}{12}$; $p_1 = \dfrac{1}{12}|i|^2 = \dfrac{1}{12}$

b) $p_2 = \dfrac{1}{12}2 = \dfrac{1}{6}$; $p_3 = \dfrac{1}{12}\times 4 = \dfrac{1}{3}$; $p_4 = \dfrac{1}{12}\times 5 = \dfrac{5}{12}$

c) $X(\Omega) = \{4\ ;\ 5\}$.

$X(\Omega)$	4	5
$P(X= xi)$	$\dfrac{9}{12}$	$\dfrac{3}{12}$

Exercice 1 (Uniquement pour la série TMGM)

1) (E) $y'' - 4y' +5y = 0$;

Comme l'équation associée à (E) est : $r^2 - 4r + 5 = 0$ admet deux solutions complexes (conjuguées) $2 + i$ et $2 - i$.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions :

$x \mapsto e^{2x}(A\cos x + B\sin x) \setminus A$ et $B \in \mathbb{R}$.

2.a) On a : $g(x) = (ax + b)e^x$

$g'(x) = (a + b + ax)e^x$

$g''(x) = (2a + b+ax)e^x$

Comme g(x) est solution de (E'), on a :

$g''(x) - 4g'(x) +5g(x) = (-x + 1)e^x \Leftrightarrow$

$(2a + b+ax)e^x - 4(a + b + ax)e^x +5(ax + b)e^x =$

$(-x + 1)e^x \Leftrightarrow$

$(-2a + 2b +2ax)e^x = (-x + 1)e^x \Leftrightarrow$

$(-2a + 2b +2ax) = (-x + 1)$

$$\begin{cases} 2a=-1 \\ -2a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = 0 \cdot$$

Donc $g(x) = (-\dfrac{1}{2}xe^x)\cdot$

b) $[g(x) + h(x)]'' - 4[g(x) + h(x)]' +5[g(x) + h(x)] =$

$[g(x)]'' - 4[g(x)]' + 5[g(x)] + [h(x)]'' - 4[h(x)]' +5[h(x)] =$

$(-x + 1)e^x + 0 = (-x + 1)e^x$

D'où g(x) + h(x) est une solution de l'équation (E').

3) On a: $f(x) = g(x) + h(x)$ et $f'(x) = g'(x) + h'(x)$;

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}e^x - \dfrac{1}{2}xe^x + 2e^{2x}[(2A + B)\cos x +(2B-A)\sin x]$

D'après les données et 2.a) on a:

$f(0) = g(0) + h(0) = 0 + A = 0 \Rightarrow A = 0$

$f'(0) = g'(0) + h'(0) = -\dfrac{1}{2} + 2(2A + B) = -1 \Rightarrow B = -\dfrac{1}{4}$

Donc la fonction cherchée est :

$f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}xe^x - (\dfrac{1}{4}\sin x)e^{2x}$

Exercice 2

1) $f_1(x) = xe^{1-x}$; $Df_1 = \mathbb{R}$;

- Limites aux bornes :
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.
- Dérivée : $f'_1(x) = e^{1-x}(1 - x)$.
- Tableau de variations

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'_1(x)$		+	0	-	
$f_1(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

2. a) Pour tout n non nul $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$; On pose

$$\begin{cases} u(x) = x^n \Rightarrow u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = e^{1-x} \Rightarrow v(x) = -e^{1-x} \end{cases} \Rightarrow$$

$U_n = -\left[x^n e^{x-1}\right]_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1}e^{1-x}dx \Rightarrow$

$U_n = \int_0^1 f_n(x)dx = -1 + nU_{n-1}$; Pour $n = 1$ on a :

$$U_1=\int_0^1 f_0(x)dx = \left[-xe^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}dx$$

$$=\left[-(1+x)e^{1-x}\right]_0^1 = -2+e.$$

b) on a pour tout n de $\mathbb{N}$; et x de]0 ; 1[:
$x^n \le x^n e^{1-x} \le e\ x^n$ d'où :

$$\int_0^1 x^n dx \le \int_0^1 x^n e^{x-1}dx \le \int_0^1 e x^n dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n+1} \le Un \le \frac{e}{n+1}.$$

c) D'après la relation trouvée en 2. a) on a :
$U_n = nU_{n-1} - 1$ d'où $U_{n+1} = (n+1)\, U_n - 1$.

3.a) $\forall n$ de $\mathbb{N}$; $V_{n+1} = (n+1)\,!e - U_{n+1}$
$V_{n+1} = (n+1)!e - (n+1)\, U_n + 1$ d'où
$V_{n+1} = (n+1)[n!\, e - U_n] + 1 = (n+1)V_n + 1$.

b) On constate que :

- $V_1 = e - U_1 = e - (-2+e)$ d'où
  $V_1 = e + 2 - e = 2$ qui est de $\mathbb{N}$.
- On suppose que V_n de $\mathbb{N}$
- On démontre que : V_{n+1} est de $\mathbb{N}$, ; Or
  $V_{n+1} = (n+1)V_n + 1$ d'après l'hypothèse de récurrence V_n de $\mathbb{N}$ et par conséquent V_{n+1} est la somme de deux entiers naturels ce qui prouve l'appartenance de (V_n) à $\mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Nous savons que pour $n \ge 2$;

$\frac{1}{3} \le U_n \le \frac{e}{3}$; donc $U_n \notin \mathbb{N}$; Or $\forall\ n \in \mathbb{N}$

On en déduit que : $n!e = (Un + Vn) \notin \mathbb{N}$.

4.a) $n \ge q \Rightarrow n\,!$ est un multiple de q soit
$n\,! = dq$; d'où : $\frac{n!p}{q} = \frac{dqp}{q} = dp \in \mathbb{N}$.

b) Supposons que e est un rationnel :

$e = \frac{p}{q}$ avec p de $\mathbb{N}^*$et q de $\mathbb{N}^*$.

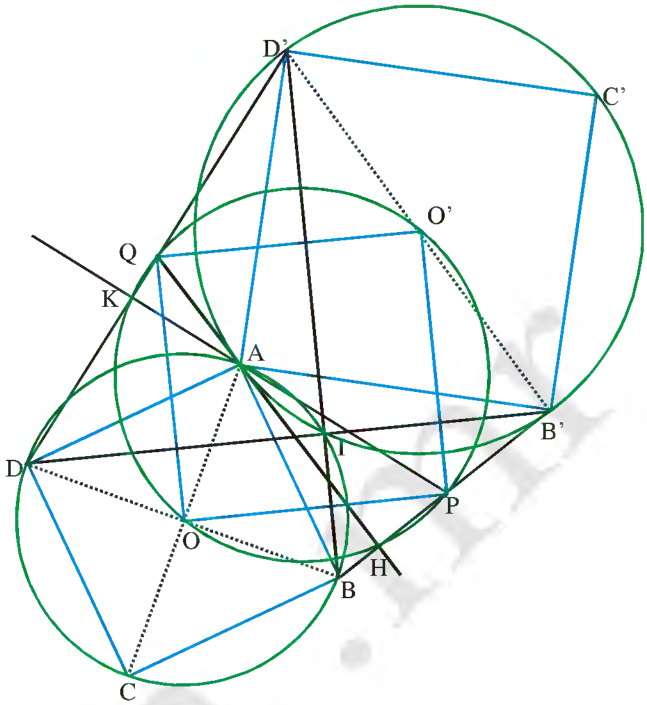
Soit $n \ge q$; alors d'près 4. a) $\frac{n!p}{q} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n!e \in \mathbb{N}$.

Ce qui est en contradiction avec le résultat en 3. c)
Donc e n'est pas rationnel.

Problème

Partie A

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :
(Voir figure ci-contre)



b) On considère la rotation : $r(A\ ;\ \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$
$r(D) = B$ et $r(B') = D'$.Donc ; $DB' = BD'$et

$(\overrightarrow{DB'}\ ;\ \overrightarrow{BD'}) = \frac{\pi}{2}(2\pi)$; d'où $BD' = BD'$ et $(B'D) \perp (BD')$.

En appliquant plusieurs fois le théorème de la droite des milieux, dans les triangles DBB'. DB'D'. BB'D'. DBD' et en tenant compte la relation

$DB' = BD'$ et $(\overrightarrow{DB'}\ ;\ \overrightarrow{BD'}) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que OPO'Q est un carré.

2. a) Les deux triangles BAD et BID sont rectangles, d'hypoténuse commune BD, on en déduit que le cercle de diamètre BD passe par A et I donc OA = OI. De même O'A = O'I.
On en déduit donc que O' et O appartiennent à la médiatrice de [AI] d'où A et I sont symétrique par rapport à (OO').

b) Soit $S_{(OO')}$ la symétrie axiale d'axe (OO') ; d'après 1.b) et 2.a) : $S_{(OO')}(A) = I$ et $S_{(OO')}(Q) = P$.
$S_{(OO')}$ étant une isomètre involutive on en déduit que : AQ = IP et AP = IQ.
D'autre part on sait que les triangles BIB' et DID' sont rectangles en I ; on en déduit que :

$IP = \frac{BB'}{2}$ et $IQ = \frac{DD'}{2}$; d'où $AQ = IP = \frac{BB'}{2}$

et $AP = IQ = \frac{DD'}{2}$.

3.a) $\overrightarrow{AQ}\,.\,\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD'}).(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B'A})$

$$=\frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA}}_{0}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{BA}-\underbrace{\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{B'A}}_{0})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{B'A}).$$

Et comme la rotation $r(A\ ;\ \frac{\pi}{2})$ transforme A en A ; D en B et B' en D' et elle conserve le produit scalaire alors : $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB'}$; donc

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{B'A})=0$; d'où $\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{BB'}=0.$

De la même façon on démontre que :

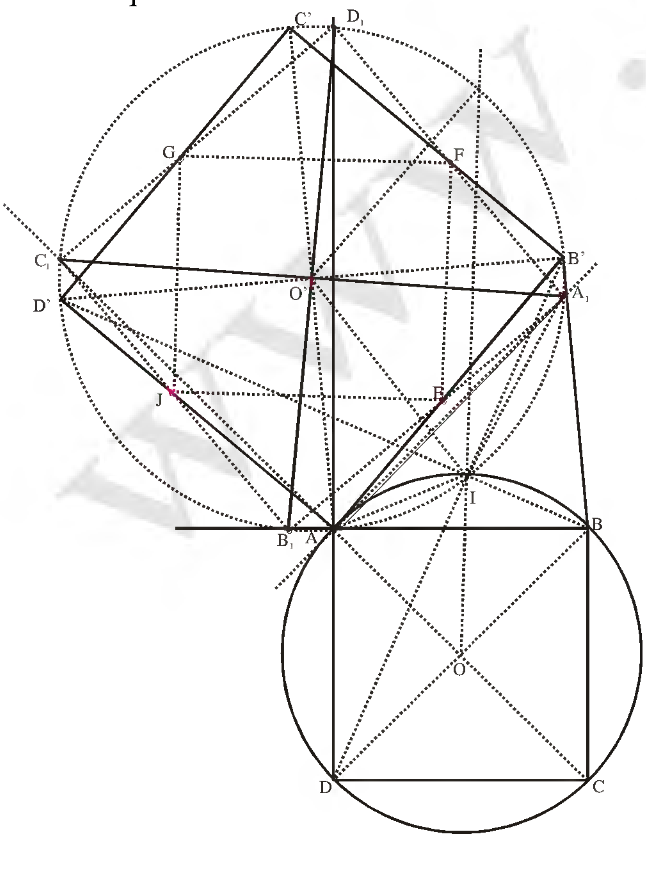
$\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{DD'}=0.$ On en déduit que les droites (AQ) et (AP) sont respectivement des hauteurs dans les triangles ABB' et ADD'.

b) O ; O' ; P et Q sont évidement des points du cercle circonscrit au carré OPO'Q.

Les triangles PHQ et PKQ ont pour cercle circonscrit le cercle de diamètre PQ c'est-à dire le même cercle circonscrit au carré OPO'Q. On en déduit que O ; O' ; P ; Q ; H et K sont cocycliques.

Partie B

1.a) Figure illustrant les données et répondant à certaines questions :



b) S est une similitude directe de centre I transformant O(centre du cercle Γ) en O' (centre du cercle Γ'). Comme I est un point invariant commun aux deux cercles Γ et Γ' alors S(Γ)= Γ'.

D'autre part, S conserve les angles orientés donc : $(\overrightarrow{IO}\ ;\ \overrightarrow{IA})=(\overrightarrow{IO'}\ ;\ \overrightarrow{IA_1})\ (2\pi).$ Il suffit alors de tracer la droite passant par I faisant avec (IO') un angle orienté égal à $(\overrightarrow{IO}\ ;\ \overrightarrow{IA})$, l'intersection de cette droite avec Γ' est le point A_1 cherché.

2. a) Soit $M\in\Gamma\setminus A$, On a :

$$\begin{cases}S(I)=I\\ S(O)=O'\\ S(M)=M_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\overline{OI}\ ;\ \overline{OM})=(\overline{O'I}\ ;\ \overrightarrow{O'M_1})\,(2\pi)\\ (\overline{AM}\ ;\ \overline{AM_1})=(\overline{AM}\ ;\ \overrightarrow{AI})+(\overrightarrow{AI}\ ;\overrightarrow{AM_1}\ )(2\pi)\end{cases}$$

D'autre part

$(\overline{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM_1})=(\overline{AM}\ ;\ \overrightarrow{AI})+(\overrightarrow{AI}\ ;\overrightarrow{AM_1}\ )=$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OI}\,)+\frac{1}{2}(\overrightarrow{O'I}\,;\overrightarrow{O'M_1}\ )=0(\pi).$

Donc A ; M ; M_1 sont alignés.

b) On en déduit que M_1 est l'intersection de (AM) avec Γ'\ A.

3.a) On utilise ce procédé pour construire les points B_1 ; C_1 ; D_1 images respectives de B ; C ; D de la même façon A_1 sera le point d'intersection de (AA') avec Γ'\A ; autrement dit la tangente en A au cercle Γ.

b) Comme la similitude conserve les angles et le barycentre alors les points A_1 ; B_1. C_1. D_1 constituent les sommets du carré (image de ABCD par S) inscrit dans le cercle Γ. Son centre est évidement O'.

4) La rotation $r(O';\frac{\pi}{2})$ transforme A_1 en D_1 ; B_1 en A_1 ; C_1 en B_1 ; D_1 en C_1.En plus

$r: A\to B'\ ;B'\to C'\ ;C'\to D'\ ;D'\to A'.$

D'autre part r conserve l'intersection donc :

$r: E\to F\ ;F\to G\ ;G\to J\ ;J\to E,$ et

$$(\overrightarrow{O'E}\ ;\ \overrightarrow{O'F})=(\overrightarrow{O'E}\ ;\ \overrightarrow{O'G}\,)$$
$$=(\overrightarrow{O'G}\ ;\ \overrightarrow{O'J}\,)=(\overrightarrow{O'J}\ ;\ \overrightarrow{O'E}\,).$$

Donc EFGJ est un carré de centre O.

Partie C

α est l'angle de la similitude directe S :

$\beta=(\overrightarrow{B_1A_1}\ ;\ \overrightarrow{AB'})\ (2\pi).$

1.a) D'après les propriétés évidentes de la configuration on a :

$\alpha = (\overrightarrow{IO}\ ;\ \overrightarrow{IO'}) = -(\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AO'})$

$= -\left[(\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AB'}\ ;\ \overrightarrow{AO'})\right]\ (2\pi)$

$\Rightarrow \alpha = -(\frac{\pi}{4} + \theta + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \alpha = -\theta - \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \rightarrow 1$

D'autre part :

$\alpha = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{A_1B_1}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AB'}\ ;\ \overrightarrow{A_1B_1'})(2\pi),$

$\Rightarrow \alpha = \theta - (\overrightarrow{A_1B_1}\ ;\ \overrightarrow{AB'})\ (2\pi) \Rightarrow$

$\alpha = \theta - (\overrightarrow{B_1A_1}\ ;\ \overrightarrow{AB'})\ + \pi(2\pi)$

$\alpha = \theta - \beta\ + \pi\ (2\pi) \rightarrow 2$

Soustrayons 1 de 2 il vient $\beta = 2\theta - \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

2.a) Les triangles O'JE ; EJA ; EJB_1 sont rectangles de même hypoténuse [JE] donc les points O' ; J ; A ; E ; B_1 sont cocycliques, d'où

$(\overrightarrow{O'B_1}\ ;\ \overrightarrow{O'A}) = (\overrightarrow{EB_1}\ ;\ \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{A_1B_1}\ ;\ \overrightarrow{B'A})$

$= (\overrightarrow{B_1A_1}\ ;\ \overrightarrow{AB'}) = \beta(2\pi).$

b) l'octogone AA $B'D_1C'C_1D'B_1$ formé par les sommets des deux carrés AB'C'D' et $A_1B_1C_1D_1$ est régulier dans le cas où

$\beta = (\overrightarrow{O'B_1}\ ;\ \overrightarrow{O'A}) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

c'est-à-dire que : $\beta = -\frac{\pi}{4}$.

c) $\beta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\theta - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}(2\pi) \Rightarrow$

$2\theta = \frac{\pi}{4}(2\pi) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8}(\pi)$, soit $\theta = \frac{\pi}{8}$ ou $\theta = \frac{9\pi}{8}$.

Or θ est un angle aigu donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ est la solution retenue et c'est celle qui fait de l'octogone précédent un octogone régulier.

3. Notons $\mathscr{A}$ l'aire demandée:

$\mathscr{A}(AB'C'D') = (AB')^2 = a^2$

$= 4\,\mathscr{A}(AEJ) + \mathscr{A}(EFGJ)$

$\mathscr{A}(AB'C'D') = a^2 = 4\frac{1}{2} \times AE \times EB' + A(EFGJ) \Leftrightarrow$

$\mathscr{A}(EFGJ) = a^2 - 2 \times AE \times EB'$

$= a^2 - 2EJ\cos\frac{\pi}{8} \times EJ\sin\frac{\pi}{8}$

$= a^2 - (EJ)^2\cos\frac{\pi}{8} \times EJ\sin\frac{\pi}{8}$

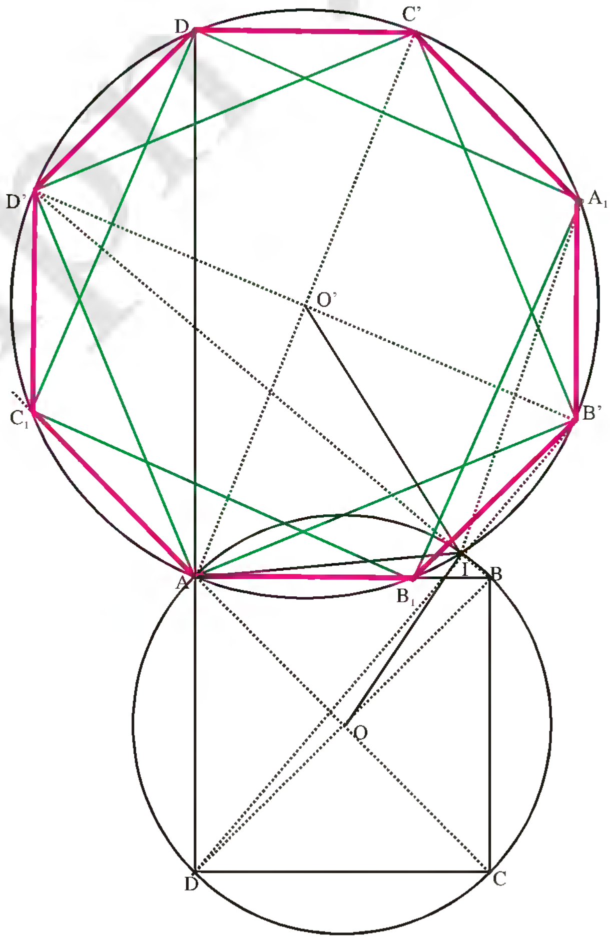
$= a^2 - (EJ)^2 \times 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$

$= a^2 - (EJ)^2 \times \sin\frac{\pi}{4}$

$= a^2 - (EJ)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = (EJ)^2$ d'où

$(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})(EJ)^2 = a^2 \Leftrightarrow (EJ)^2 = \frac{a^2 \times 2}{2 + \sqrt{2}}$;

Soit $\mathscr{A}(EFGJ) = \frac{a^2 \times 2}{2 + \sqrt{2}}$.



Sujet 2000 /Séries : Séries C & TMGM / Session normale

Exercice 1

1) x solution réelle de f(Z) = 0 $\Leftrightarrow$

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + (6-2i)x + 3 - 2i = 0 \Leftrightarrow$

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 3 + i(-2x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 3 = 0 \\ -2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

donc $Z_0 = -1$.

-1	1	4	6	6-2 i	3-2i
		-1	-3	-3	-3+2i
	1	3	3	3-2i	0

D'où: $Q(Z) = Z^3 + 3Z^2 + 3Z + 3 - 2i$.

2) $Q(i) = -i - 3 + 3i + 3 - 2i = 0$;

i	1	3	3	3-2 i
		-i	-1+3i	2i-3
	1	3+i	2+3i	0

Donc: $\varphi(Z) = (Z - i)(Z^2 + (3 + i)Z + 2 + 3i) = 0$;

$f(Z) = 0 \Leftrightarrow (Z+1)(Z - i)(Z^2 + (3 + i)Z + 2 + 3i) = 0$;

$Z^2 + (3 + i)Z + 2 + 3i = 0$;

$\Delta = (3 + i)^2 - 4(2+3i) = -6i = (\sqrt{3}(1 - i))^2 \Rightarrow$

$$Z = \frac{-3 - i - \sqrt{3} + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}) \text{ ou}$$

$$Z = \frac{-3 - i + \sqrt{3} - i\sqrt{3}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} + i(\frac{-\sqrt{3} - 1}{2})$$

Donc les solutions de l'équation f(Z) = 0 sont :

$$\left\{ -1 ; i ; \frac{-3 - \sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}) ; \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} + i(\frac{-\sqrt{3} - 1}{2}) \right\}$$

3) $$Z_1 - Z_2 = i + \frac{3 + \sqrt{3}}{2} - i(\frac{\sqrt{3} - 1}{2})$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i(\frac{3 - \sqrt{3}}{2})$$

$$Z_3 - Z_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2} + i(\frac{-\sqrt{3} - 1}{2}) + \frac{3 + \sqrt{3}}{2} - i(\frac{\sqrt{3} - 1}{2})$$

$$= \sqrt{3} - i\sqrt{3}$$

$$Z_1 - Z_3 = i + \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + i(\frac{\sqrt{3} + 1}{2})$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + i(\frac{3 + \sqrt{3}}{2})$$

Calcul de longueur des côtés du triangle $M_1M_2M_3$:

$$M_1M_2 = \sqrt{\frac{9 + 3 + 6\sqrt{3} + 3 + 9 - 6\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{6};$$

$$M_2M_3 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{6} ;$$

$$M_1M_3 = \frac{\sqrt{9 + 3 - 6\sqrt{3} + 3 + 9 + 6\sqrt{3}}}{4} = \sqrt{6} ; \Rightarrow$$

Donc le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

De plus on a : $$\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{3} = \frac{-\frac{6}{2} + i(0)}{3} = \frac{-3}{3} = -1 = Z_0 .$$

Donc M_0 est le centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$.

Problème

Partie A

1.a) $f_0(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

• $D_{f0} = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

• Limites aux bornes de D_{f0}

$\lim_{x \to -\infty} f_0(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = 1$

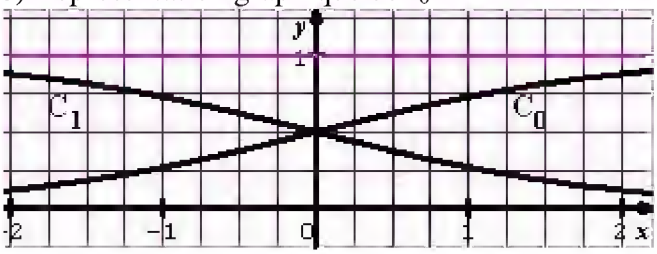
• Dérivée de f_0 et sens de variation

$$f_0'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} > 0$$

• Tableau de variations de f_0

x	0	+∞
$f_0'(x)$	+	
$f_0(x)$	0 ↗	1

b) Représentation graphique de f_0



Avec $\Omega(0 ; \frac{1}{2})$ on a : $2(0) - x \in D_f \ \forall x \in D_f$;

$f(2(0) - x) + f(x) = f_0(-x) + f_0(x)$

$$= \frac{1}{1 + e^x} + \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1 + e^x}{1 + e^x} = 1 = 2(\frac{1}{2}).$$

Donc $\Omega(0 ; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de C.

c) $f_0(-x) = \dfrac{1}{1+e^{x}} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = f_1(x)$; donc f_1 est l'image de f_0 par la réflexion d'axe (Oy).

2.a) $f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^{x}}{e^{x}(1+e^{-x})} = \dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$

$$U_0+U_1 = \int_0^1 (f_0(x)+f_1(x))dx = \int_0^1 \frac{(1+e^{-x})}{(1+e^{-x})}dx = \int_0^1 dx = 1$$

b) $$U_n + U_{n-1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}+e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}dx = \int_0^1 e^{-(n-1)x}dx$$

$$U_n + U_{n-1} = \left[\frac{1}{1-n}e^{-(n-1)x}\right]_0^1 = \frac{e^{1-n}-1}{1-n}$$

$$= \frac{1-e^{1-n}}{n-1}.$$

c) $$U_1 = 1 - U_0 = 1 - \int_0^1 \frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx = 1 - \Big[\ln(1+e^{x})\Big]_0^1$$

$$= 1 - \ln(e+1) + \ln 2$$

- $U_2 + U_1 = \dfrac{1-e^{-1}}{1} = 1-e^{-1} = 1-e^{-1} \Rightarrow$

  $U_2 = 1 - e^{-1} - 1 + \ln(e+1) - \ln 2.$

d) Comme $\forall x \in [0 ; 1] : f_n(x) > 0$ d'où : $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $U_n > 0 \Rightarrow \forall\, n \geq 2 ; 0 \leq U_n \leq U_n + U_{n-1} \Rightarrow$

$\forall\, n \geq 2 ; 0 \leq U_n \leq \dfrac{1-e^{1-n}}{n-1}$; Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-e^{1-n}}{n-1} = 0$;

Donc d'après le théorème des Gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0.$

Partie B

1.a) Continuité de g_n :

- g_0 est la somme de deux fonctions continues sur [0 ; 1] donc g_0 est continue sur [0 ; 1].
- $n \neq 0$; g_n est la somme de deux fonctions continues sur [0 ; 1] ; donc g_n est continue sur [0 ; 1].

Dérivabilité de g_n

- $n \neq 0$; g_n est la somme de deux fonctions dérivables sur [0 ; 1[, Donc g_n est dérivable sur [0 ; 1[.

b) $g_0(x) = \sqrt{1-x} + \dfrac{1}{1+e^{-x}} = h_0(x) + f_0(x)$

$n \neq 0$; $$g_n(x) = \frac{x^n\sqrt{1-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}(x^n\sqrt{1-x}+e^{-(n-1)x})}{1+e^{-x}}$$

$$= \frac{x^n\sqrt{1-x}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$$

$$= x^n\sqrt{1-x} + \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = h_n(x) + f_n(x).$$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $g_n(x) = f_n(x) + h_n(x)$.

2.a) $h'_n(x) = nx^{n-1}\sqrt{1-x} - \dfrac{x^n}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2nx^{n-1}(1-x)-x^n}{2\sqrt{1-x}}$ n

$$h'_n(x) = \frac{x^{n-1}(2n-x(2n+1))}{2\sqrt{1-x}}$$

$\neq 0$; $h_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^{n-1}(2n-x(2n+1))}{2\sqrt{1-x}} = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ou $x = \dfrac{2n}{2n+1}$

- Tableau de variations de h_n

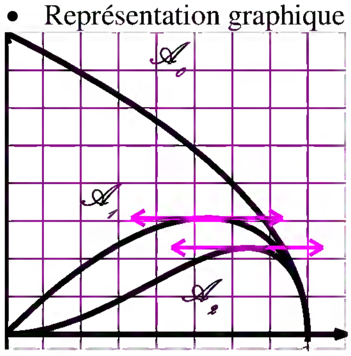
x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
$h_0'(x)$	0	+	0	-	‖
$h_0(x)$		↗	$h_n(\frac{2n}{2n+1})$	↘	‖

$n = 0$; $h'_0(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0 \Rightarrow$

- Tableau de variations de h_0

x	0		1
$h_0'(x)$		-	‖
$h_0(x)$	1	↘	0 ‖

- Représentation graphique de $\mathcal{C}_0$; $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$



3.a) $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$; On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^n \Rightarrow u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}) \Rightarrow v(x) = -\dfrac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$J_n = \left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)dx$$

$$= \frac{2n}{3}(J_{n-1} - J_n) \Rightarrow J_n\left(1+\frac{2n}{3}\right) = \frac{2n}{3}J_{n-1} \Rightarrow$$

$$J_n = \frac{2n}{2n+3}J_{n-1}.$$

b) $J_1 = \frac{2}{5}J_0$

$J_1 = \frac{2}{5}J_0$

.

.

.

$J_n = \frac{2n}{2n+3}J_{n-1}$

— — — — — — — — — — — — —

Par produit membre à membre et après identification on a :

$$J_n = \frac{2\times4\times6\times\cdots\times2n}{5\times7\times9\times\cdots\times(2n+3)}J_0 \Rightarrow$$

$$J_n = \frac{2^n n!(2\times3\times4\times\cdots\times(2n+2))}{(2n+3)!}J_0 \Rightarrow$$

$$J_n = \frac{3\times2^{n+2}\times2^n(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!}J_0 \Rightarrow$$

$$J_n = \frac{3\times2^{2n+2}\times(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!}J_0.$$

c) $I_n = \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx + \int_0^1 h_n(x)\,dx$

$= U_n + J_n.$

Donc : $I_n + I_{n-1} = J_n + J_{n-1} + U_n + U_{n-1} \Rightarrow$

$$I_n + I_{n-1} = \left[\frac{3\times2^{2n+2}\times(n+1)(n!)^2}{(2n+3)!} + \frac{3\times2^{2n}\times(n)(n-1)!^2}{(2n+1)!}\right]J_0 + \frac{1-e^{1-n}}{n-1}$$

d) $\forall x \in [0\,;\,1]\,;\ 0 \le 1-x \le 1 \Rightarrow \sqrt{1-x} \le 1 \Rightarrow$

$x^n\sqrt{1-x} \le x^n \Rightarrow \int_0^1 h_n(x)\,dx \le \int_0^1 x^n dx \Rightarrow$

$J_n \le \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$ d'où $J_n \le \frac{1}{n+1}$.

e) On a : $\forall n > 1\,;\ I_n = J_n + U_n$; Or, $J_n \le \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$I_n \le \frac{1}{n+1} + \frac{1-e^{1-n}}{n-1}$ Or $\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n-1} \le \frac{2}{n-1} \Rightarrow$

$I_n \le \frac{2}{n-1} + \frac{1-e^{1-n}}{n-1} \Rightarrow I_n \le \frac{3-e^{1-n}}{n-1}.$