ANNALE Mathématiques BAC D

Élaboré par :

* : **Professeur au lycée d'Excellence de NKT**

* : **Inspecteur de Maths à l'I.G.E.S.T**

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE **Série : Sciences de la nature**
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE **Épreuve : Mathématiques**
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION **Durée : 4heures**
SERVICE DES EXAMENS **Coefficient : 6**

Baccalauréat 2005 session normale

1 (3points)

Un jeu de tir est formé d'un dispositif lançant, de façon aléatoire, une flèche en direction d'une cible sous la forme d'un ruban constitué de 30cases identiques, dont certaines portent des chiffres et d'autres sont vides, comme l'indique la figure ci-dessous.

									0	0	0	1	1	2	2	1	1	0	0	0									

(On ne demande pas de reproduire la figure sur la copie).

On admet que lors de chaque tire, la flèche atteint toujours une case et une seule de la cible et que les cases ont la même probabilité d'être atteint par la flèche

Si la flèche atteint une case portant le chiffre 2, alors le joueur gagne 2700UM

Si la flèche atteint une case portant le chiffre 1, alors le joueur gagne 900UM

Si la flèche atteint une case portant le chiffre 0, alors le joueur ne gagne rien et ne perd rien

Si la flèche atteint une case vide (blanche), alors le joueur perd n Ouguiya où n est un réel strictement positif.

1°soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tir ce que le joueur gagne, compté négativement quand il perd.

a) Déterminer l'ensemble de valeurs de X et donner sa loi de probabilité

b) Calculer n pour que le jeu soit équitable, c'est –à –dire que l'espérance mathématique E(X) soit nulle.

2°Un joueur est considéré comme gagnant s il a obtenu un gain strictement positif.

a) Montrer que la probabilité qu'un joueur gagne est 0,2

b) un joueur joue 10parties consécutives et indépendantes, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « le joueur gagne exactement deux fois »

B : « le joueur gagne au moins une fois »

(5points)

On considère le plan complexe muni d'un repère ortho normal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) soit le polynôme P tel que pour tout z de C

$p(z) = z^3 - z^2 + 2z + 4$ **où z est un nombre complexe**

a) calculer $P(-1)$

b) Déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z :

$p(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$

2) soient A ; B et C les points d'affixes respectives $z_{1;}z_2\ etz_3$

$z_1 = -1,\ \ z_2 = 1 + i\sqrt{3}\ et\ z_3 = 1 - i\sqrt{3}$

a) Calculer le module et un argument des nombres $z_1;z_2\ etz_3$

b) Représenter les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

3a) Calculer le module du nombre complexe $\frac{z_3+1}{z_2+1}$

b) En déduire la nature du triangle ABC

c) Déterminer l'affixez_4 du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme placer D sur la figure

d) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que :

$$\left|\frac{z - 1 - i\sqrt{3}}{z + 1}\right| = 1$$

12points)

Partie A

On considère la numérique g définie sur $]-1,+\infty[$ par :$g(x) = 2x + ln(x + 1)$

1) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) Calculer $g'(x)$ où g' est la dérivée de g .Dresser le tableau de variation de g.

3) Calculer$g(0)$, en déduire le signe de g(x)

4) pour tout $x > -1$; on pose $u(x) = (x + 1)ln(x + 1)$

a) Calculer $u'(x)$ et montrer que pour tout $x > -1$ on a $g(x) = u'(x) + 2x - 1$

b) En déduire la primitive G de la fonction g sur $]-1,+\infty[$ qui vérifie $G(0) = -1$

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur : $[-1,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 1 + (x + 1)ln(x + 1) : x > -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$$

1)a) Montrer que f est continue à droite du point d'abscisse $x_0 = -1$

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$, interpréter ce résultat

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ interpréter graphiquement

3° a) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f .

Vérifier que pour tout $x > -1$ $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction définie dans la partie A

b) Dresser le tableau de variation de f.

4a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-1,+\infty[$exactement deux solutions que l'on note αet β avec $\alpha < \beta$

b) Vérifier que $-1 < \alpha < 0 < \beta < 1$et donner un encadrement de α et deβ d'amplitude 0,5

c) Vérifier que :$f'(\beta) = \frac{\beta^2+3\beta+1}{\beta+1}$

5a) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $a_0 = e - 1$

b) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les axes de coordonnées.

c) Tracer (T) et (C) dans le repère$(O,\vec{i},\vec{j})$

Partie C

Soit h la restriction de f sur $I = [\beta,+\infty[$

1a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}

c) Calculer $h^{-1}((e-1)^2)$ et $(h^{-1})'((e-1)^2)$; (On pourra utiliser B. 5a))

d) En utilisant B.2) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h^{-1}(x)}{x}$

e) Tracer (C') courbe de h^{-1} , dans le repère précédant

2a) en utilisant une intégration par parties calculer $\int_1^{e-1} (x+1)ln(x+1)dx$

b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e - 1$

FIN

Corrigé Baccalauréat 2005 session normale

Exercice 1

1a) $X(\Omega) = \{0, 900, 2700, -n\}$

On a 6 cases portent le chiffre 0, 4 cases portent le chiffre 1, 2 cases portent le chiffre 2 et 18 cases vides.

$p(X = 0) = p(la\ case\ porte\ le\ \text{chiffre } 0) = \frac{6}{30}$

$p(X = 900) = p(la\ case\ porte\ le\ \text{chiffre } 1) = \frac{4}{30}$

$p(X = 2700) = p(la\ case\ porte\ le\ \text{chiffre } 2) = \frac{2}{30}$

$p(X = -n) = p(la\ case\ est\ blanche) = \frac{18}{30}$

x_i	0	900	2700	−n
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{18}{30}$

$$E(X) = \frac{3600 + 5400 - 18n}{30} = \frac{-18n + 9000}{30}$$

$E(X) = 0 \Rightarrow \frac{-18n+9000}{30} = 0$

$\Rightarrow -18n + 9000 = 0$

$\Rightarrow 18n = 9000$

$\Rightarrow n = \frac{9000}{18} = 500$

2) un joueur est considéré gagnant s'il obtient un gain strictement positif c'est-à-dire $X \in \{900, 2700\}$

a) $p(X > 0) = p(X = 900) + p(X = 2700)$

$p(X > 0) = \frac{4}{30} + \frac{2}{30}$

$p(X > 0) = \frac{6}{30}$

$p(X > 0) = \frac{1}{5}$

$p(X > 0) = 0,2$

b) On considère la variable aléatoire Yégale au nombre de fois ou le joueur gagne.

La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres : $n = 10$, $p = 0,2$

$P(Y=k)=C_{10}^{k}(0,2)^{k}(0,8)^{10-k}$ tel que $k\in\{0,1,2,\dots\dots,10\}$

$P(A)=P(Y=2)=C_{10}^{2}(0,2)^{2}(0,8)^{8}=45\times 0,04\times 0,1677721\cong 0,301989888$

$P(B)=1-P(Y=0)=1-(0,8)^{10}\cong 0.892625817$

Exercice 2

1) $p(z)=z^3-z^2+2z+4$

a) $p(-1)=-1-1-2+4=0$

b) $p(z)=(z+1)(z^2+az+b)$

$p(z)=z^3+az^2+bz+z^2+az+b$

$p(z)=z^3+(a+1)z^2+(b+a)z+b$

Par identification on: $\Rightarrow\begin{cases}a+1=-1\Rightarrow a=-2\\ b+2a=2\\ b=4\end{cases}$

$\Rightarrow p(z)=(z+1)(z^2-2z+4)$

c) $p(z)=0\Rightarrow(z+1)(z^2-2z+4)=0$

$\Rightarrow z+1=0\Rightarrow z_1=-1$

Où $z^2-2z+4=0$

$\Delta=4-16=-12=12i^2=\left(i2\sqrt{3}\right)^2$

$z_2=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$

$z_3=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$

S=$\{-1,1+i\sqrt{3},1-i\sqrt{3}\}$

2a) $z_1=-1\Rightarrow|z_1|=1$ et $argz_1=arg(-1)=\pi$

$|z_2|=|1+i\sqrt{3}|=2$

$\begin{cases}cos\theta_1=\frac{1}{2}\\ sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\ \theta_1=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]\Rightarrow\ \arg z_1=\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

$|z_3|=|z_2|=2$

$\arg z_3=-\arg z_2=-\frac{\pi}{3}$

3° a)

$\left|\dfrac{z_3+1}{z_2+1}\right|=\left|\dfrac{1-i\sqrt{3}+1}{1+i\sqrt{3}+1}\right|=\left|\dfrac{2-i\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}\right|=1$

b)

$\left|\dfrac{z_3+1}{z_2+1}\right|=1\Rightarrow\ \left|\dfrac{z_3-(-1)}{z_2-(-1)}\right|=1$

$\Rightarrow\left|\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right|=1$

$\Rightarrow\frac{AC}{AB}=1$ donc le triangle ABC est isocèle en A

c)

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow Z_D-Z_A=Z_C-Z_B$

$\Leftrightarrow Z_D=Z_A+Z_C-Z_B$

$=-1+1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}$

$Z_D=-1-2i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow$ **D (-1,-2$\sqrt{3}$)**

d)

$$\left|\frac{z-1-i\sqrt{3}}{z+1}\right| = 1$$

$\Rightarrow$

$$\left|\frac{z-(1+i\sqrt{3})}{z-(-1)}\right| = 1$$

$\Rightarrow$

$$\left|\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A}\right| = 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{BM}{AM} = 1$$

ℾest La médiatrice du segment $[AB]$

Problème

Partie A

$g(x) = 2x + ln(x+1)$

$D_g =]-1, +\infty[$

1) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} g(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} 2x + ln(x+1) = -2 - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x + ln(x+1) = +\infty + \infty = +\infty$

2) $g'(x) = 2 + \frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow$ **g est strictement croissante sur** $]-1, +\infty[$

3) $g(0) = 0$
Signe de g

4) $u(x) = (x+1)ln(x+1)$
a) $u'(x) = ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \times (x+1) = ln(x+1) + 1$
$u'(x) = 1 + ln(x+1)$
$g(x) = 2x + ln(x+1) = 2x - 1 + 1 + ln(x+1) = 2x - 1 + u'(x)$
$g(x) = u'(x) + 2x - 1$
b) $g(x) = u'(x) + 2x - 1 \Rightarrow \quad G(x) = u(x) + x^2 - x + c$
$G(0) = -1 \Rightarrow u(0) + c = -1 \Rightarrow c = -1$ **car** $u(0) = 0$
$G(x) = u(x) + x^2 - x + c = (x+1)ln(x+1) + x^2 - x - 1$
Partie B

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 1 + (x+1)ln(x+1) : x > -1 \\ \qquad\qquad f(-1) = 1 \end{cases}$$

1)a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} x^2 - x - 1 + (x+1)ln(x+1) =$

On pose $t = x + 1 \begin{cases} si\,; x \to (-1)^+ \\ \quad t \to 0^+ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} x^2 - x - 1 + (x+1)ln(x+1)$

$= \lim\limits_{t\to 0^+} (t-1)^2 - (t-1) - 1 + tlnt$
$= 1 + 1 - 1 = 1 = f(-1)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = f(-1) \;\Rightarrow$ **f est continue à droite du point d'abscisse** $x_0 = -1$

b) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{x^2 - x - 1 + (x+1)\ln(x+1) - 1}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{x^2 - x - 2 + (x+1)\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} + \ln(x+1)$

$= \lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} + \ln(x+1) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} (x-2) + \ln(x+1)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 3 - \infty = -\infty$

$\Rightarrow$ **La courbe C admet une demi-tangente verticale à droite du point d'abscisse** $x_0 = -1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x - 1 + (x+1)ln(x+1)$

$= \lim_{x\to+\infty} x(x-1-\frac{1}{x}) + (x+1)ln(x+1)$
$= (+\infty)(+\infty - 1 - 0) + (+\infty)(+\infty) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-1+(x+1)ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{1}{x}+\frac{(x+1)ln(x+1)}{x}$$
$= +\infty - 1 - 0 + \infty = +\infty$

$\Rightarrow$ La courbe C admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de $+\infty$

3° a) $f(x) = G(x) \Rightarrow f'(x) = G'(x) = g(x)$

b) TV de f

4° a) f est continue et décroissante de $]-1,0]$ vers $[-1,1[$ et $0\epsilon[-1,1[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1,0]$.

f est continue et croissante de $[0,+\infty[$ vers $[-1,+\infty[$ et $0\epsilon[-1,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution βdans $[0,+\infty[$.

b) $f(-1) = 1 > 0$et $f(0) = -1 < 0$ $f(-1)\times f(0) < 0 \Rightarrow -1 < \alpha < 0$
$\Rightarrow -1 < \alpha < -0{,}5$

$f(0) = -1 < 0, f(1) \approx 0{,}4 > 0,\ f(0)\times f(1) < 0 \Rightarrow 0 < \beta < 1$
$\Rightarrow 0{,}5 < \beta < 1$

c) $f'(\beta) = 2\beta + ln(\beta+1)$

on a $f(\beta) = 0 \Rightarrow \beta^2 - \beta - 1 + (\beta+1)ln(\beta+1) = 0$
$\Rightarrow (\beta+1)ln(\beta+1) = -\beta^2+\beta+1$
$\Rightarrow ln(\beta+1) = \frac{-\beta^2+\beta+1}{\beta+1}$

$$f'(\beta) = 2\beta + ln(\beta+1) = 2\beta + \frac{-\beta^2+\beta+1}{\beta+1} = \frac{2\beta^2+2\beta-\beta^2+\beta+1}{\beta+1}$$

$$f'(\beta) = \frac{\beta^2+3\beta+1}{\beta+1}$$

$5a)\ a_0 = e-1$
$y = f'(e-1)(x-e+1) + f(e-1)$
$f'(e-1) = 2(e-1) + ln(e-1+1) = 2e-2+1 = 2e-1$
$f(e-1) = (e-1)^2 - (e-1) - 1 + (e-1+1)ln(e-1+1)$
$= (e-1)^2 - e + 1 - 1 + elne$
$f(e-1) = (e-1)^2 - e + 1 - 1 + e$
$f(e-1) = (e-1)^2$
$y = (2e-1)(x-e+1) + (e-1)^2$

b) Intersection avec (OY), $f(0) = -1$

Intersection avec (OX) α et β

c)

Partie C

1a) h est continue et croissante de $I = [\beta, +\infty[$ vers $J = [0, +\infty[$ donc h réalise une bijection de I vers J
b) TV de h^{-1}

$$h(e-1) = (e-1)^2 \Rightarrow h^{-1}((e-1)^2) = e-1$$

$$(h^{-1})'((e-1)^2) = \frac{1}{h'(h^{-1}((e-1)^2)} = \frac{1}{h'(e-1)} = \frac{1}{2e-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{h^{-1}(x)}{x} = 0$$

2a)

$$\int_1^{e-1} (x+1)ln(x+1)dx$$

$$\begin{cases} u = ln(x+1) \Rightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v'(x) = (x+1) \Rightarrow v = \dfrac{(x+1)^2}{2} \end{cases}$$

$$\int_1^{e-1} (x+1)ln(x+1)dx = \left[\frac{(x+1)^2}{2} ln(x+1)\right]_1^{e-1} - \int_1^{e-1} \frac{1}{x+1} \times \frac{(x+1)^2}{2} dx$$

$$\int_1^{e-1}(x+1)ln(x+1)dx=\frac{e^2}{2}-2ln2-\frac{1}{2}\int_1^{e-1}(x+1)dx$$

$$\int_1^{e-1}(x+1)ln(x+1)dx=\frac{e^2}{2}-2ln2-\frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_1^{e-1}$$

$$\int_1^{e-1}(x+1)ln(x+1)dx=\frac{e^2}{2}-2ln2-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2-4}{2}\right)$$

$$\int_1^{e-1}(x+1)ln(x+1)dx=\frac{2e^2-e^2+4}{4}-2ln2$$

$$\int_1^{e-1}(x+1)ln(x+1)dx=\frac{e^2}{4}+1-2ln2$$

$$A=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}\right]_1^{e-1}-\int_1^{e-1}(x+1)ln(x+1)dx$$

$$A=\frac{(e-1)^3}{3}-\frac{(e-1+1)^2}{2}-\frac{1}{3}+2-\left(\frac{e^2}{4}+1-2ln2\right)$$

$$A=\frac{(e-1)^3}{3}-\frac{e^2}{2}+\frac{5}{3}-\frac{e^2}{4}-1+2ln2$$

$$A=\left(\frac{(e-1)^3}{3}-\frac{3e^2}{4}+\frac{2}{3}+2ln2\right)cm^2$$

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2005 session complémentaire

Exercice 1 (5points)

On pose : $Z_1=\frac{-1+5i}{3-2i}$ et $Z_2=\frac{4i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

1. Montrer que $Z_1=-1+i$ et $Z_2=\sqrt{3}+3i$
2. Donner l'écriture trigonométrique de Z_1 et Z_2
3. On pose $Z_3=\frac{Z_1}{Z_2}$

a) Donner une écriture algébrique de Z_3

b) Donner une écriture trigonométrique de Z_3

c) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$

Exercice 2 (4points)

On considère la fonction numérique f définie sur I= $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to0^+}f(x)$ puis interpréter graphiquement.
2. Montrer que f est décroissante et dresser son tableau de variation.

3. Construire (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ unité 4cm

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $U_n = f(n)$

a) Calculer u_1 et u_2 puis les représenter sur l'axes des abscisses

b) Prouver que (u_n) est décroissante et positive puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

c) pour tout $n \geq 1$ on pose $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ donner l'expression de s_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$

Problème (11points)

Partie A

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{x-1} - 1$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm

1. Pour tout réel x on pose $u(x) = x^2 + 3x + 2$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $u(x)=0$

b) Étudier le signe de u(x)

2a) Calculer les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis les interpréter graphiquement

b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et que $f(x) + 1 > 0$, interpréter graphiquement ces deux résultats

3a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f et vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = u(x)e^{x-1}$

b) Dresser les valeurs exactes de f(-1) et f(-2) puis donner les valeurs approchées à 10^{-2}

c) dresser le tableau de variation de f

4.Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-1, +\infty]$

a) Montrer que g réalise une bijection de f sur un intervalle J que l'on déterminera

b) montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $0 < \alpha < 1$ puis donner un encadrement de α à 10^{-1}

c) Dresser le tableau de variation de g^{-1}

5. Déterminer le signe de f(x)sur $\mathbb{R}$. En déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$

6a) Déterminer le point A, intersection de (C) avec l'axe des coordonnées .

b) Donner une équation de la tangente (T) à (C) au point A

c) En déduire $(g^{-1})'(e^{-1} - 1)$

7) Tracer (T) et (C) le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Partie B

On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{x-1} - x$ où a,b et c sont des réels

1) Déterminer les réels a,b et c pour que F soit une primitive de f où f est la fonction définie dans la partie A

2) Vérifier que $F(\alpha)=\dfrac{-\alpha^3-2\alpha+2}{\alpha^2+\alpha+1}$ où α est la solution de l'équation $g(x)=0$

3) Calculer en fonction de α et en cm^2, l'aire du domaine plan défini par $\begin{cases}\alpha\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq f(x)\end{cases}$

Fin

Corrigé Baccalauréat 2005 session complémentaire

Exercice 1

1° On a $Z_1=\dfrac{-1+5i}{3-2i}$. On multiplie, haut et bas, par le conjugué du dénominateur :

$Z_1=\dfrac{-1+5i}{3-2i}\times\dfrac{3+2i}{3+2i}=\dfrac{-3-2i+15i-10}{9+4}=\dfrac{-13+13i}{13}$. Soit $Z_1=-1+i$.

On a $Z_2=\dfrac{4i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$. On multiplie, haut et bas, par le conjugué du dénominateur :

$Z_2=\dfrac{4i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\times\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}=\dfrac{12i+4\sqrt{3}}{3+1}=\dfrac{4\sqrt{3}+12i}{4}$. Soit $Z_2=\sqrt{3}+3i$.

2° $Z_1=-1+i=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$;

$Z_2=\sqrt{3}+3i=\sqrt{12}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}+i\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

3° a) $Z_3=\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{-1+5i}{3-2i}\times\dfrac{\sqrt{3}+i}{4i\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{3}-i+5i\sqrt{3}-5}{8\sqrt{3}+12i\sqrt{3}}=\dfrac{-5-\sqrt{3}+\left(-1+5\sqrt{3}\right)i}{4\sqrt{3}\left(2+3i\right)}$.

En multipliant par le conjugué de $2+3i$ on obtient la forme algébrique: $Z_3=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}i$.

b) On a : $|Z_3|=\dfrac{|Z_1|}{|Z_2|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ et $\arg Z_3=\arg z_1-\arg z_2=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.On obtient la forme trigonométrique : $Z_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

c) Par identification des deux écritures de Z_3 on trouve :

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\sin\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ \sin\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

Exercice 2 :

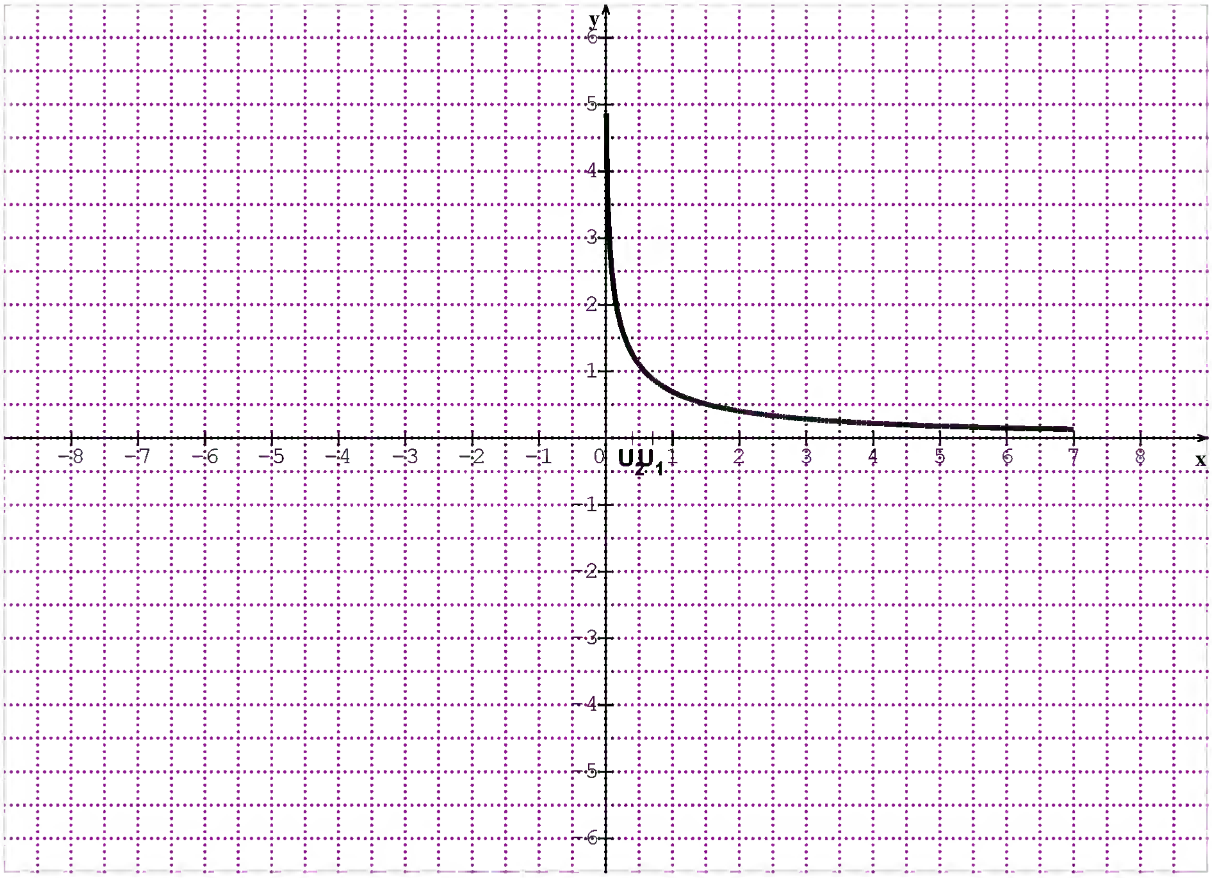
f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

1° On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale de la courbe (C). On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{t\to 1}\ln t=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. La droite d'équation $y=0$ est une asymptote horizontale, en $+\infty$, de la courbe (C). l

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow 0$

2° $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)'}{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{-1}{x^2}\times\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{-1}{x(x+1)}<0$. f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

3° Tracé



4° a) $u_1 = f(1) = \ln\left(\frac{1+1}{1}\right) = \ln 2$; $u_2 = f(2) = \ln\left(\frac{2+1}{2}\right) = \ln\frac{3}{2}$.

b) On a : $\forall n \geq 1, \frac{n+1}{n} > 1$, donc $u_n = f(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$. Tous les termes de (u_n) sont positifs.

D'autre part $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right) < 0$; car $0 < \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} < 1$. Donc (u_n) est strictement décroissante.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

c) $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$

Problème :

Partie A :

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+x+1)e^{x-1} - 1$.

1° On a : $u(x) = x^2 + 3x + 2$.

a) $u(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ou } x = -2)$.

b) Signe de :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$

$u(x)$	+ 0 − 0 +

2° a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. On aussi pour $x\neq 0$; $\dfrac{f(x)}{x}=\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. La branche infinie, en $+\infty$, est de direction (Oy).b) Écrivons $f(x)=e^{-1}(x^2e^x+xe^x+e^x)-1$. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ ainsi que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ (Limites remarquables).

On peut écrire $x^2e^x=\left(xe^{\frac{x}{2}}\right)^2$. En posant $t=\dfrac{x}{2}$, on trouve $x^2e^x=(2te^t)^2$ ($x\to-\infty \Leftrightarrow t\to-\infty$). Il vient : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=\left(2\lim\limits_{t\to-\infty} te^t\right)^2=0$. Soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. La droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote horizontale à (C), en $-\infty$. D'autre part $f(x)+1=\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right)e^{x-1}>0$. La courbe (C) est au dessus de son asymptote en $-\infty$.

3° a) $f'(x)=(2x+1)e^{x-1}+(x^2+x+1)e^{x-1}=(x^2+3x+2)e^{x-1}=u(x)e^{x-1}$.

b) $f(-1)=e^{-2}-1\approx-0{,}86$; $f(-2)=3e^{-3}-1\approx-0{,}85$

c) Le TV de f :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-1	↗	$\dfrac{3}{e^3}-1$	↘	$\dfrac{1}{e^2}-1$	↗	$+\infty$

3° a) La restriction g de f, à l'intervalle $I=[-1;+\infty[$, est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $I=]-1;+\infty[$ sur $\left[\dfrac{1}{e^2}-1,+\infty\right[$.

c) On a $0\in\left[\dfrac{1}{e^2}-1,+\infty\right[$ et donc il existe un réel unique $\alpha\in I=[-1;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$. On a $f(0)=e^{-1}-1<0$ et $f(1)=3-1=2>0$ par suite $0<\alpha<1$.

c) Le TV de g^{-1} :

x	$\dfrac{1}{e^2}-1$	$+\infty$

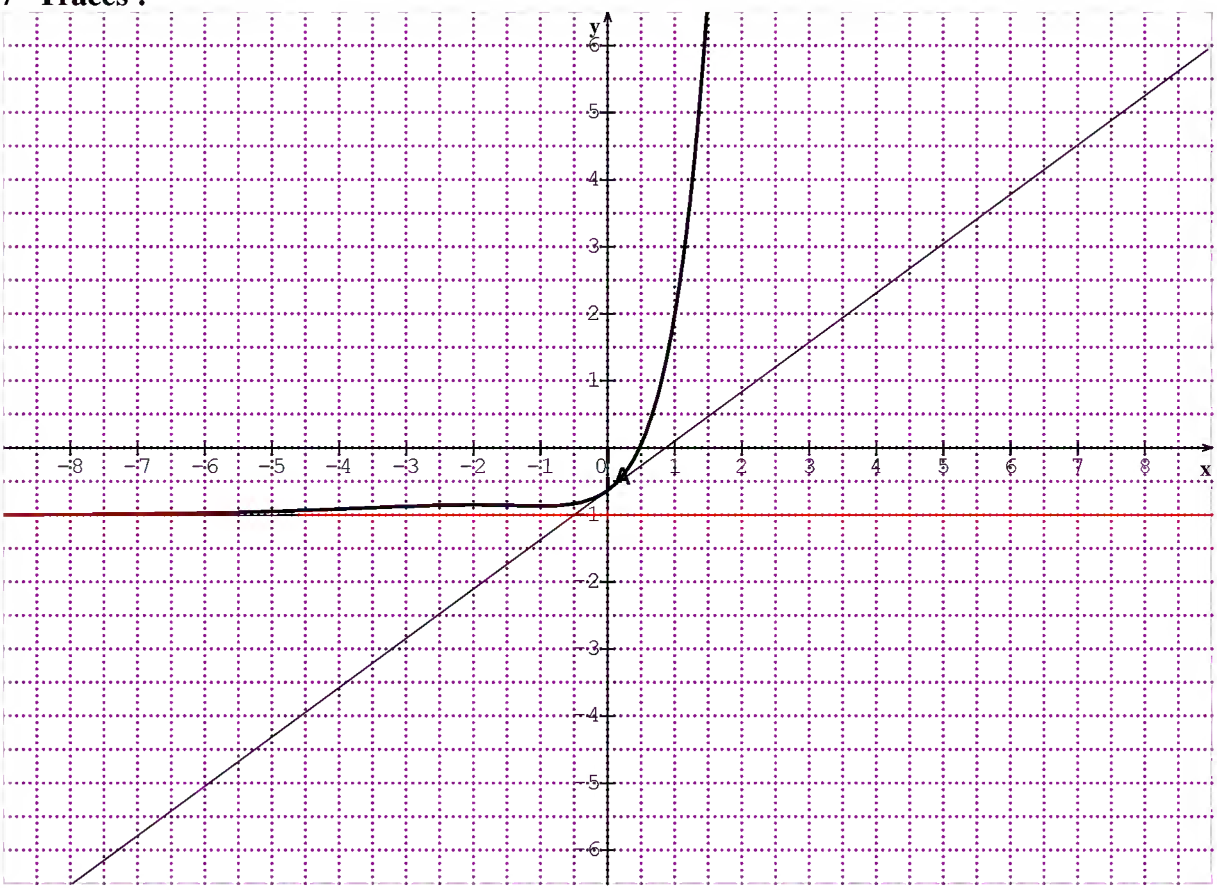
$(g^{-1})'(x)$	$+$
$g^{-1}(x)$	$-1 \nearrow +\infty$

5° On a $f\left(\left]-\infty;-1\right]\right)=\left]-1;\dfrac{3}{e^3}-1\right]$, f est strictement négative sur $\left]-\infty;-1\right]$, donc ne s'annule pas.
Sur l'intervalle $I=\left[-1;+\infty\right[$, $f=g$ et donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.
6° a) $f(0)=e^{-1}-1$ donc le point d'intersection de (C) avec (Oy) est $A\left(0;e^{-1}-1\right)$.

b) Une équation de la tangente à (C) en A est : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=2x+\dfrac{1}{e}-1$.

c) On a $g(0)=e^{-1}-1 \Leftrightarrow g^{-1}\left(e^{-1}-1\right)=0$, donc $\left(g^{-1}\right)'\left(e^{-1}-1\right)=\dfrac{1}{g'(0)}=\dfrac{1}{2}$.

7° Tracés :



Partie B :

1° F est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour que F soit une primitive de f, il faut que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$.

$$F'(x)=(2ax+b)e^{x-1}+\left(ax^2+bx+c\right)e^{x-1}-1=\left(ax^2+(2a+b)x+c+b\right)e^{x-1}$$

Par identification de $F'(x)$ et de $f(x)$, on trouve : $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=1 \\ c+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$. Alors $F(x)=(x^2-x+2)e^{x-1}-x$.

2° $F(\alpha)=(\alpha^2-\alpha+2)e^{\alpha-1}-\alpha$. Or $g(\alpha)=0$ donc $e^{\alpha-1}=\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$. Alors $F(\alpha)=\dfrac{\alpha^2-\alpha+2}{\alpha^2+\alpha+1}-\alpha=\dfrac{\alpha^2-\alpha+2-\alpha^3-\alpha^2-\alpha}{\alpha^2+\alpha+1}=\dfrac{-\alpha^3-2\alpha+2}{\alpha^2+\alpha+1}$.

3° L'aire en unités d'aire est : $A=\int_\alpha^1 f(x)dx=[F(x)]_\alpha^1=F(1)-F(\alpha)=1-\dfrac{-\alpha^3-2\alpha+2}{\alpha^2+\alpha+1}=\dfrac{\alpha^3+\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha^2+\alpha+1}$.

L'unité étant 2 cm, l'aire en cm^2 est : $4\left(\dfrac{\alpha^3+\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha^2+\alpha+1}\right)cm^2$.

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2006 session normale

Exercice 1(5points)

1°Reproduire et compléter le tableau suivant :

Z	1+i	2	1-i	$i\sqrt{2}$	$1+i\sqrt{3}$	$1-i\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+i$	2i	-3	-1+i
$\|Z\|$												
ArgZ												

2-Une boite contient 12cartons indiscernables au toucher, portant les 12 nombres complexes du tableau précédant (chaque carton porte un seul nombre complexe) :
On tire au hasard un carton de la boite (on suppose l'équiprobabilité des tirages).
a) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre réel ?
b) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est égale à $\sqrt{2}$?

c) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument θ est tel que $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$?

3°Un jeu consiste à tirer un carton de la boite précédente .Si le nombre complexe inscrit sur le carton est de module 3,le joueur gagne 10000UMet le jeu s'arrête. Si non, le carton tiré est remis dans la boite et le joueur procède à un deuxième tirage ;si ce carton

porte un nombre complexe de module 3,le joueur gagne 8000UM,s'il est de module 2,il gagne 5000UM si non il ne gagne rien et le jeu s'arrête .
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
a) Donner la loi de probabilité de X
b) Calculer l'espérance mathématique de X

Exercice 2(4points)

On pose pour tout entier naturel non nul n :$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$
et on considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :$U_n = S_n - ln(n)$
1) CalculerU_1 , U_2, U_3 etU_4
2) On admet dans cette partie que , pour tout $x \geq -1$ on a : $x - ln(1 + x) \geq 0$ [1]
a) Démontrer que, pour tout$n \geq 1$ ona : $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} + ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$
b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante (on pourra poser $x = \frac{-1}{n+1}$ et utiliser [1]
3) On définit la suite(V_n) , pour tout entier $n \geq 1$, par : $V_n = U_n - \frac{1}{n}$
a) Démontrer que, pour tout$n \geq 1$ ona : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n} - ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
b) En déduire que la suite (V_n) est décroissante
4. En exploitant l'équalité $V_n - U_n = -\frac{1}{n}$, montrer que :
a) la suite (U_n) est minorée et que la suite(V_n) est majorée
b) les deux suites (U_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite l (on ne demande pas de calculer la valeur de$l$)
5) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que les deux termes U_n et V_n donnent un encadrement d'amplitude 10^{-3} du nombre l .

Problème (11points)

Partie A

Soit g la fonction numérique sur $]0, +\infty[$ définie par : $g(x) = ax + (bx + c)lnx$ où a,b et c sont des réels et dont la représentation graphique est donnée ci-contre dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

En utilisant ce graphique et en sachant que $g(2) = -2 + 3ln2$
Déterminer les réels a,b et c

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = -x + (2x - 1)lnx$

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$et en0^+

2a) Déterminer la fonction dérivée f' de f

b) Étudier sur $]0, +\infty[$ le signe de $\frac{x-1}{x}$ et celui de 2lnx

c) En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f

3) Dresser le tableau complet des variations de f

4a) Montrer que la restriction de f à $[1, +\infty[$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer

b) Soit U la réciproque de f sur $[1, +\infty[$ et soit (C_u) sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ donner la valeur de $\lim_{x \to (-1)^+} \frac{u(x) - u(-1)}{x+1}$, interpréter graphiquement ce résultat et tracer (C_u)

c) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1, +\infty[$ et vérifier que l'on : $1,9 < \alpha < 2$

5) Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x - 1)lnx = 0$ et donner une interprétation graphique de ses solutions.

b) Étudier la position relative de la courbe représentative de f par rapport à la droite(Δ).

Partie C

Soit H la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $H(x) = (x^2 - x)lnx - \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)$

1) Démontrer que la fonction H est une primitive de la fonction h définie sur$]0, +\infty[$par :

$h(x) = (2x - 1)lnx$

2) En déduire une primitive F sur$]0, +\infty[$ de la fonction f

3) soit β un réel de$]0, 1[$

a) déduire de la question précédente la valeur $A(\beta)$ de l'aire du domaine plan délimité par la courbe représentative de f, la droite d'équation $y = -1$ et les droites d'équations $x = \beta$ et $x = 1$

b) Calculer $A = \lim\limits_{x \to \infty} A(\beta)$ puis donner une interprétation de cette limite

Fin

Corrigé baccalauréat 2006 session normale

Exercice 1

1)

Z	1+i	2	1-i	i$\sqrt{2}$	1+i$\sqrt{3}$	1-i$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}+i$	2i	-3	-1+i
$\lvert Z\rvert$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	2	3	$\sqrt{2}$
ArgZ	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$

2a) Les cartons qui portent un nombre réel sont: $\{2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -3\}$

La probabilité de tirer un carton portant un nombre réel est : $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

b) Les cartons qui portent un nombre complexe dont le module est égale à$\sqrt{2}$ sont : $\{1+i, 1-i, i\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1+i\}$ d'où la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est égale à$\sqrt{2}$: $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

c) Les cartons qui portent un nombre complexe dont un argument θest tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ sont : $\{1+i, 2, i\sqrt{2}, 1+i\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{3}+i, 2i\}$

d'où la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument θ est tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} = \frac{7}{12}$

3) a) $X(\Omega)=\{0, 5000, 8000, 10000\}$

$$p(X=0)=p(|Z|\neq 3)\times p(|Z|=\sqrt{2})=\frac{11}{12}\times\frac{6}{12}=\frac{66}{144}$$

$$p(X=5000)=p(|Z|\neq 3)\times p(|Z|=2)=\frac{11}{12}\times\frac{5}{12}=\frac{55}{144}$$

$$p(X=8000)=p(|Z|\neq 3)\times p(|Z|=3)=\frac{11}{12}\times\frac{1}{12}=\frac{11}{144}$$

$$p(X=10000)=p(|Z|=3)=\frac{1}{12}=\frac{12}{144}$$

x_i	0	5000	8000	10000
$p(X=x_i)$	$\frac{66}{144}$	$\frac{55}{144}$	$\frac{11}{144}$	$\frac{12}{144}$

$$E(X)=\frac{275000+88000+120000}{144}=\frac{483000}{144}$$

Exercice 2

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$U_n=S_n-ln(n)$$

1)

$$S_1=1$$

$$S_2=1+\frac{1}{2}=S_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=S_2+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=S_3+\frac{1}{4}=\frac{11}{6}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$$

$$U_1=S_1-ln(1)=1$$

$$U_2=S_2-ln(2)=\frac{3}{2}-ln2$$

$$U_3=S_3-ln(3)=\frac{11}{6}-ln3$$

$$U_4=S_4-ln(4)=\frac{25}{12}-ln4=\frac{25}{12}-2ln2$$

2)

a) $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} \Rightarrow S_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=S_n+\frac{1}{n+1}$

$U_n=S_n-ln(n) \Rightarrow U_{n+1}=S_{n+1}-ln(n+1)=S_n+\frac{1}{n+1}-ln(n+1)$

$U_{n+1}-U_n=S_n+\frac{1}{n+1}-ln(n+1)-U_n=S_n+\frac{1}{n+1}-ln(n+1)-(S_n-ln(n))$

$$U_{n+1} - U_n = S_n + \frac{1}{n+1} - ln(n+1) - S_n + ln(n)$$
$$= \frac{1}{n+1} + ln(n) - ln(n+1)$$
$$= \frac{1}{n+1} + ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} + ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)$$
$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} + ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

b) pour tout $x \geq -1$ on a : $x - ln(1+x) \geq 0$

$$x = \frac{-1}{n+1} \Rightarrow -\frac{1}{n+1} - ln(1 - \frac{1}{n+1}) \geq 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} + ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$$
$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} + ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$$

Donc la suite (U_n) est décroissante

3) $V_n = U_n - \frac{1}{n} \Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{1}{n+1}$

a) $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - \frac{1}{n+1} - U_n + \frac{1}{n}$
$$= U_{n+1} - U_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n+1} + ln(n) - ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$$
$$= ln(n) - ln(n+1) + \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n} - (ln(n+1) - ln(n))$$
$$= \frac{1}{n} - ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n} - ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

b) pour tout $x \geq -1$ on a : $x - ln(1+x) \geq 0$

Posons $x = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} - ln(1 + \frac{1}{n}) \geq 0$
$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n} - ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

Donc la suite (V_n) est croissante

4a) $V_n = U_n - \frac{1}{n} \Rightarrow V_n - U_n = -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow V_n < U_n$

$*$la suite (V_n) est croissante donc elle est minorée par son premier terme V_1
$$\Rightarrow V_1 < V_n < U_n \; ; \; V_1 = U_1 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 0 < V_n < U_n$$
$\Rightarrow 0 < U_n \Rightarrow$ la suite (U_n) est minorée par 0

$*$la suite (U_n) est décroissante donc elle est majorée par son premier terme U_1
$$\Rightarrow V_n < U_n < U_1 \; ; \; U_1 = 1$$
$$\Rightarrow V_n < U_n < 1$$
$\Rightarrow V_n < 1 \Rightarrow$ la suite (V_n) est majorée par 1

b) la suite (U_n) est décroissante et minorée par zéro donc elle est convergente
la suite (V_n) est croissante et majorée par1 donc elle est convergente

$$\lim_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

5) $|V_n - U_n| = \left|\frac{-1}{n}\right| \leq 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 10^{-3} \Rightarrow n \geq 10^3$

Le plus petit entier naturel est : $n = 1000$

Problème

Partie A

$g(x) = ax + (bx + c)lnx$

d'après le graphique $g(1) = -1 \Rightarrow a + (b + c)ln1 = -1$

$\Rightarrow a = -1$

D'après le graphique $g'(1) = 0$

Calculons $g'(x) = a + blnx + \frac{bx+c}{x} \Rightarrow a + b + c = 0$

$\Rightarrow -1 + b + c = 0$

$\Rightarrow b + c = 1 \Rightarrow c = 1 - b$

On a $g(2) = -2 + 3ln2 \Rightarrow 2a + (2b + c)ln2 = -2 + 3ln2$

$\Rightarrow -2 + (2b + c)ln2 = -2 + 3ln2$

$\Rightarrow (2b + c)ln2 = 3ln2$

$\Rightarrow 2b + c = 3$

Remplaçons c par $1 - b$

$2b + c = 3 \Rightarrow 2b + 1 - b = 3$

$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow c = 1 - b = 1 - 2 = -1$

$g(x) = ax + (bx + c)lnx = -x + (2x - 1)lnx$

Partie B

$f(x) = -x + (2x - 1)lnx = g(x)$

1 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x + (2x - 1)lnx = -\infty + \infty\ F.I$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(-1 + \left(2 - \frac{1}{x}\right) lnx\right) = +\infty(-1 + \infty) = +\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} -x + (2x - 1)lnx = 0 + (0 - 1)(-\infty) = +\infty$

2a)$f'(x) = -1 + 2lnx + \frac{2x-1}{x}$

$f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{x} + 2lnx$

$$f'(x) = \frac{-x + 2x - 1}{x} + 2lnx$$

$$f'(x) = \frac{x - 1}{x} + 2lnx$$

b) le signe de $\frac{x-1}{x}$ est celui de $x - 1$ car $x > 0$

3)TV de f

4a) f est continue et croissante de $[1,+\infty[$ vers $J=[-1,+\infty[$ donc la restriction de f sur $[1,+\infty[$ réalise une bijection

5a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{u(x)-u(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{f'(f^{-1}(-1))}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{f'(0)}=+\infty$

La courbe C_u admet une demi –tangente verticale d'équation $x=-1$

c) f est continue et croissante de $[1,+\infty[$ vers $J=[-1,+\infty[$ et $0\in J$donc il existe un unique réel $\alpha\epsilon\ [1,+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$

$f(1,9)<0$ et $f(2)>0\Rightarrow\ f(1,9)\times f(2)<0\Rightarrow 1,9<\alpha<2$

5a) $(2x-1)lnx=0\Rightarrow\begin{cases}2x-1=0\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\\ \quad ou\ lnx=0\Rightarrow x=1\end{cases}$

$S=\left\{\frac{1}{2},1\right\}$

Les solutions de l'équation $(2x-1)lnx=0$ représentent l'intersection de C avec l'axe des abscisses.

b)

Partie C

$$H(x) = (x^2 - x)lnx - \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)$$

1)

$$H'(x) = (2x - 1)lnx + \frac{x^2 - x}{x} - (x - 1)$$

$$H'(x) = (2x - 1)lnx + x - 1 - x + 1$$

$H'(x) = (2x - 1)lnx = h(x) \Rightarrow$ **H est la primitive de h sur** $]0, +\infty[$

2) $f(x) = -x + h(x) \Rightarrow F(x) = -\frac{x^2}{2} + H(x) = -\frac{x^2}{2} + (x^2 - x)lnx - \frac{1}{2}x^2 + x$

$$F(x) = -x^2 + x + (x^2 - x)lnx$$

3a) $A(\beta) = \int_\beta^1 (f(x) + 1)dx = [-x^2 + x + (x^2 - x)lnx + x]_\beta^1$

$$= [-x^2 + 2x + (x^2 - x)lnx]_\beta^1$$

$$A(\beta) = 1 + \beta^2 - 2\beta - (\beta^2 - \beta)ln\beta$$

b) $\lim\limits_{\beta \to 0^+} A(\beta) = \lim\limits_{\beta \to 0^+} 1 + \beta^2 - 2\beta - (\beta^2 - \beta)ln\beta = 1$

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE — **Série : Sciences de la nature**
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE — **Épreuve : Mathématiques**
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION — **Durée : 4heures**
SERVICE DES EXAMENS — **Coefficient : 6**

Baccalauréat 2006 session complémentaire

Exercice 1 (5points)

On considère les nombres complexes suivants :

$a = -1 + i, b = 2$ et $c = 3(1 + i)$

1°Ecrire les nombres a, b et c sous forme trigonométrique

2°Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé direct, on note A, B et C les images respectives des nombres a, b et c

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle

3°Soit f l'application du plan (P) dans (P) qui à tout point M(z) associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = 2iz + 1 - 2i$

Soient A', B', C'les images des points A, B et C par f et a', b', c' leurs affixes respectives.

a) Calculer a', b', c' puis placer les points A', B', C'

b) On pose $w = \frac{c' - b'}{c-b}$

Donner l'écriture algébrique et trigonométrique de w

c) En déduire la valeur exacte de $\frac{B'C'}{BC}$ et une mesure de l'angle$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'})$.

d) Justifier que les droites (BC),$(B'C')$ sont perpendiculaires

Exercice 2 (5points)

Une urne contient 3boules blanches ,2boulesvertes et 5boules rouges

On tire et au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1°a) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

b) Quelle est la probabilité de tirer deux boules vertes ?

c) Quelle est la probabilité de tirer deux boules rouges ?

2.En déduire la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes

2°Un jeu consiste à tirer ∞ et au hasard deux boules de l'urne

*Si les boules sont de couleur blanche, alors on gagne 25points

*Si les boules sont de couleur verte, alors on gagne 100points

* Si les boules sont de couleur rouge, alors on gagne 12points

*Si les boules sont de couleurs différentes, alors on gagne p points

On désigne par X la variable égale au gain obtenu

a) Déterminer loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique E(X)

c) Déterminer la valeur de p pour la quelle E(X)=10

Problème $(10points)$

Partie A

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$f(x)=1-x\ln x;\ x>0$ et $f(0)=1$

1a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0, interpréter géométriquement ces résultats

b) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

c) Représenter la courbe (C_1) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 4cm

2) Soit g la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$g(x)=1-\ln x-e^{1-x};\ x>0$

a) Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation

b) Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) pour x élément de $]0;+\infty[$ .On ne demande pas de représenter g)

Parie B

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$h(x)=1-x\ln x-e^{1-x};\ x>0$ et $h(0)=1-e$

1a) Montrer que h est continue à droite de 0

b) h est-elle dérivable à droite de 0 ?

c) Donner une interprétation géométrique de ces résultats.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$

3a) Déterminer $h'(x)$, où h' est la fonction dérivée de h

b) Dresser le tableau de variation de h .(On pourra utiliser A.2b)

4 .On désigne par (C_2) la représentation graphique de h dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

a) Étudier le signe de $f(x)-h(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}^+$

b) En déduire la position relative de (C_2) par rapport à (C_1)

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-h(x)\right)$ puis interpréter géométriquement

d) Construire (C_2) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Partie C

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :$\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=\int_n^{n+1}\left(f(x)-h(x)\right)dx$

1. Donner une interprétation géométrique de U_n pour tout entier naturel n

2a) Calculer U_n en fonction de n .

b) En déduire que (U_n) est une suite géométrique convergente dont on précisera la raison et le premier terme U_0

3. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :$\forall n\in\mathbb{N}$,$S_n=U_0+U_1+U_2+\cdots+U_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

FIN

Corrigé Baccalauréat 2006 session Complémentaire

Exercice 1

$a=-1+i, b=2$ et $c=3(1+i)$

1) $|a| = |-1+i| = \sqrt{2}$

$arg a = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \ [2\pi]$

$a = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)$

$|b| \qquad arg b = 0 \ [2\pi]$

$\mathrm{b} = 2(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$

$|c| = |3(1+i)| = 3\sqrt{2}$

$arg c = arg 3(1+i)$

$= arg 3 + arg(1+i)$

$= 0 + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

$c = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2a) Voir la représentation graphique

2b) Montrons que le triangle ABC est isocèle rectangle en B

On pose $K = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$= \frac{a-b}{c-b}$

$= \frac{-1+i-2}{3+3i-2}$

$= \frac{-3+i}{1+3i}$

$= \frac{3i^2+i}{1+3i}$

$= \frac{i(1+3i)}{1+3i}$

$K = i$

$K = i \Rightarrow |K| = 1 \Rightarrow \frac{BA}{BC} = 1$ **ABC est isocèle en B**

$K = i \Rightarrow arg k = arg i$

$= \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Rightarrow$

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Rightarrow$ **ABC est rectangle en B**

$\begin{cases} \frac{BA}{BC} = 1 \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases} \Rightarrow$ **le triangle ABC est isocèle rectangle en B.**

3a) $z' = 2iz + 1 - 2i$

$a' = 2ia + 1 - 2i$

$= 2i(-1+i) + 1 - 2i$

$= -2i - 2 + 1 - 2i$

$a' = -1 - 4i$

$b' = 2ib + 1 - 2i$

$= 2i \times 2 + 1 - 2i$

$= 4i + 1 - 2i$

$= 1 + 2i$

$b' = 1 + 2i$

$c' = 2ic + 1 - 2i$

$= 2i(3 + 3i) + 1 - 2i$
$= 6i - 6 + 1 - 2i$
$c' = -5 + 4i$

b)

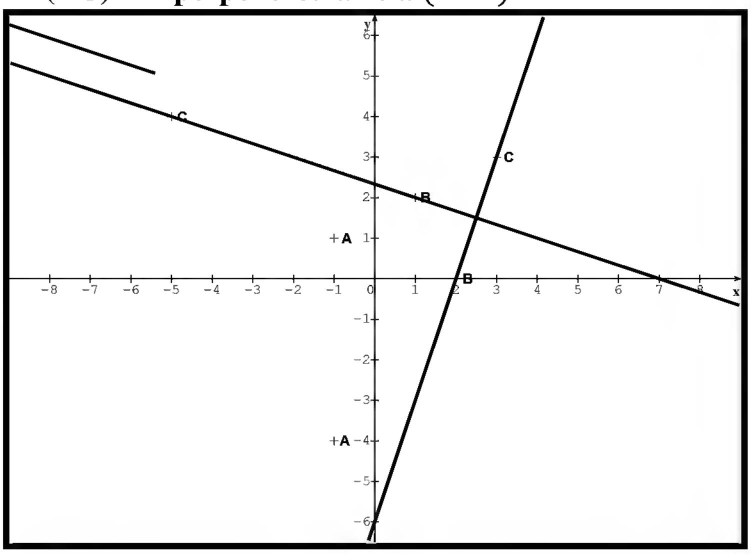
$$W = \frac{c' - b'}{c - b} = \frac{-5 + 4i - 1 - 2i}{3 + 3i - 2}$$
$$= \frac{(-6 + 2i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)}$$
$$= \frac{-6 + 18i + 2i + 6}{1 + 9}$$
$$= \frac{20i}{10}$$
$\Rightarrow W = 2i$
$|W| = |2i| = 2$
$argW = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
$\Rightarrow W = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right)$

c)

$$|W| = 2 \Rightarrow \left|\frac{c' - b'}{c - b}\right| = 2$$
$$\Rightarrow \left|\frac{Z_{C'} - Z_{B'}}{Z_C - Z_B}\right| = 2$$
$$\Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = 2$$
$argW = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

d) $\Rightarrow \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Rightarrow$ **(BC)** ***est*** **perpendiculaire à** $(B'C')$



Exercice 2

1) Cardinal $\Omega = C_{10}^{2} = \frac{10!}{8!2!} = 45$

a) La probabilité de tirer deux boules blanches $=\frac{C_3^2}{45}=\frac{3}{45}$

b) La probabilité de tirer deux boules vertes$=\frac{C_2^2}{45}=\frac{1}{45}$

c) La probabilité de tirer deux boules rouges$=\frac{C_5^2}{45}=\frac{10}{45}$

d) La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$1-\left(\frac{3}{45}+\frac{1}{45}+\frac{10}{45}\right)=1-\frac{14}{45}=\frac{31}{45}$

2a) les valeurs de X sont$\{12, 25, 100, p\}$

$p(\mathrm{X}=12)=\mathrm{p(R,R)}=\frac{10}{45}$

$p(\mathrm{X}=25)=\mathrm{p(B,B)}=\frac{3}{45}$

$p(\mathrm{X}=100)=\mathrm{p(V,V)}=\frac{1}{45}$

$p(\mathrm{X}=\mathrm{p})=$ La probabilité de tirer deux boules de couleurs différente$s$ $=\frac{31}{45}$

x_i	12	25	100	p
$p(X=x_i)$	$\frac{10}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{31}{45}$

b) $E(x)=\frac{120+75+100+31p}{45}=\frac{31p+295}{45}$

c) $E(x)=10 \Rightarrow \frac{31p+295}{45}=10$

$\Rightarrow 31p+295=450$

$\Rightarrow 31p=155$

$\Rightarrow p=\frac{155}{31}=5$

Problème :

Partie A : f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=1-x\ln x;\ x>0$ et $f(0)=1$.

1° a) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$ (Limite remarquable), donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0)$. La fonction f est continue à droite de 0. Le taux d'accroissement de f en 0^+ est : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1-x\ln x-1}{x}=-\ln x$ donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=+\infty$. La fonction f n'est pas dérivable à droite de 0 et (C_1) admet une demi-tangente verticale à droite du point de coordonnées $(0,1)$

b) $f'(x)=0-\left(1\times\ln x+\frac{1}{x}\times x\right)=-\ln x-1$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\ln x-1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.

$f\left(\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{e}$ .et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	$1+\frac{1}{e}$	↘	$-\infty$

c) Tracé

2° g la fonction définie par : $g(x)=1-\ln x-e^{1-x};\ x>0$

a) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$; $g'(x)=-\frac{1}{x}-e^{1-x}<0$. Le TV de g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$
$g(x)$	||	$+\infty \searrow -\infty$

b) $g(1)=1-\ln 1-e^{1-1}=0$. Le tableau de signe de g :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	

Partie B : h la fonction définie par : $h(x)=1-x\ln x-e^{1-x}$; $x>0$ et $h(0)=1-e$.

1° a) On a : $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)-\lim\limits_{x\to0^+} e^{1-x}=1-e=h(0)$ donc h est continue à droite de 0.

b) Le taux d'accroissement de h en 0^+ est : $\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\frac{1-x\ln x-e^{1-x}-1+e}{x}=-\ln x+e^{1-x}\times\frac{e^x-1}{x}$ Or $-\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^\circ}\frac{e^x-1}{x}=1$

donc : $\lim\limits_{x\to0^\circ}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=+\infty$. La fonction h n'est pas dérivable à droite de 0.

c) (C_2) admet une demi-tangente verticale à droite du point de coordonnées $(0,1-e)$

2° $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}=-\infty-0=-\infty$.

3° a) $h'(x)=f'(x)-\left(-e^{1-x}\right)=-1-\ln x+e^{1-x}=g(x)$.

b) Le signe de $h'(x)$ est celui de $g(x)$.

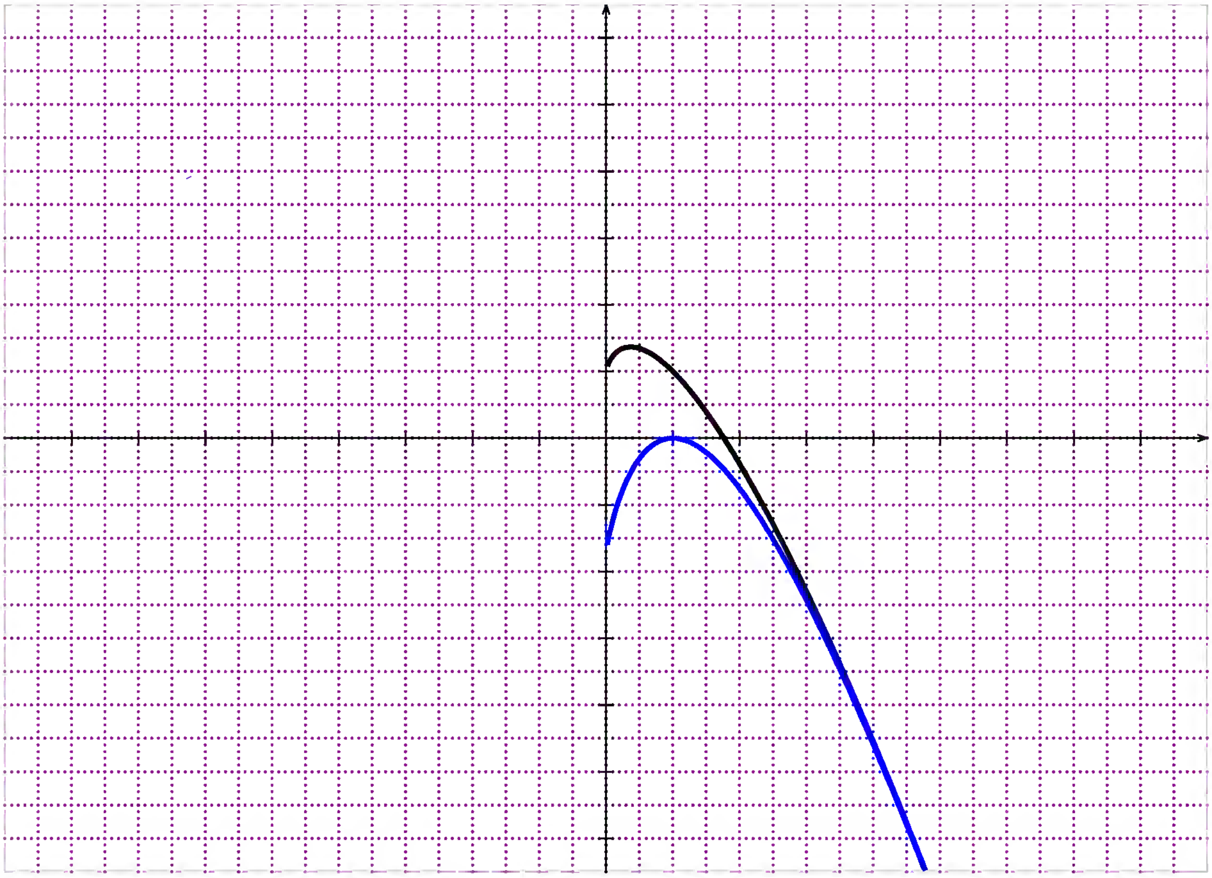
x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$1-e$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4° a) $f(x)-h(x)=e^{1-x}>0$

b) La courbe (C_1) est toujours au-dessus de (C_2).

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-h(x))=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x}=0$. Les courbes sont voisines en $+\infty$.

d) Tracé des courbes



Partie C :

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \int_n^{n+1} (f(x) - h(x))dx$.

1° U_n est l'aire du domaine plan limité par (C_1), (C_2) et les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$.

2° a) $U_n = \int_n^{n+1} (f(x) - h(x))dx = \int_n^{n+1} e^{1-x}dx = \left[-e^{1-x}\right]_n^{n+1} = -e^{1-n-1} + e^{1-n}$. Soit $U_n = (e-1)e^{-n}$.

b) (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{e}$ et de premier terme $U_0 = e - 1$. Comme $-1 < q < 1$ alors (U_n) est convergente vers 0.

3° a) $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = (e-1) \times \dfrac{1 - \dfrac{1}{e^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{e}} = e\left(1 - \dfrac{1}{e^{n+1}}\right)$.

b) On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e^{n+1}}\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e$

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2007 session normale

Exercice 1(3points)

Soit g la fonction numérique définie sur ℝ par $g(x) = xe^x$
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 1cm.

1a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$

b) Calculer $g'(x)$ où g'est la dérivée de g puis dresser le tableau de variation de g.

c)Tracer la courbe (C) de g.

2a) Vérifier que pour tout réel x on a : $g(x) = g'(x) - e^x$.
En déduire une primitive G de g sur ℝ

b) Calculer en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe (OX) et les droites d'équations $x = 0$et $x = \alpha$ où α est un réel strictement négatif.

c) Montrer que $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} A(\alpha) = 1$

Exercice 2(4points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]1,+\infty[$ par :$f(x) = \frac{2}{x(x^2-1)}$.

1a) Déterminer les réels a, b et c tels que ; $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$

b) En déduire une primitive F de f sur$]1,+\infty[$.

c) Calculer l'intégrale $I = \int_2^3 f(x)dx$ et montrer que $I = ln\left(\frac{32}{27}\right)$.

2 On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par :
$U_n = \frac{2}{n(n^2-1)}$

On pose $s_n = U_2 + U_3 + \cdots + U_n$.

a)Montrer que tout entier naturel $n \geq 2$:
$U_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ et $U_n = \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}$

b) En déduire que pour tout entier naturel$n \geq 2$ on a : $s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}$
puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

c) Simplifier la somme : $= \frac{2}{1\times2\times3} + \frac{2}{2\times3\times4} + \frac{2}{3\times4\times5} + \cdots + \frac{2}{2006\times2007\times2008}$

Exercice 3(6points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1 On pose: $z_1 = \frac{10+4i}{3+7i}$, $z_2 = (1+i)(1-i)$, et $z_3 = \frac{7+3i}{5-2i}$

a) Donner la forme algébrique de chacun des nombres; z_1, z_2, z_3

b) Donner la forme trigonométrique des nombres z_1, z_2, z_3

2 .a) Placer dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les points A, B, et C d'affixes respectives :
$z_A = 1 - i$, $z_B = 2$ et $z_C = 1 + i$

b) Monter que le triangle ABC est rectangle et isocèle ; puis donner la nature du quadrilatère OABC.

c) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z tel que $\left|\frac{z}{z-2}\right| = 1$.

3) A tout point M du plan d'affixe z, (z≠2), on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{-2}{z-2}$

a)Résoudre dans l'ensemble C des nombre complexes l'équation $z' = z$.

b) Montrer que pour tout nombre complexe z, différent de 2, on a : $|z' - 1| = \frac{|z|}{|z-2|}$

en déduire une relation entre les distances OM, BM, et IM'où I est le milieu du segment [OB].

c) Déduire que si M décrit Δ, alors décrit un cercle Γ dont on donnera le centre et le rayon

Exercice 4 (7points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$:$f(x) = x^2 - x - 1 + (x-2)lnx$

Soit 𝕋 la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i}, \vec{j}$).

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement :

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement

2a) Calculer $f'(x)$ où f'est la dérivée de f

b) Calculer $f''(x)$ où f''est la dérivée def'et vérifier que f' est strictement croissante sur$]0,+\infty[$

c) Calculer $f'(1)$puis déterminer le signe de $f'(x)$sur$]0,+\infty[$

3) Dresser le tableau de variation de f

4a) Montrer que sur$]0,+\infty[$,l'équation$f(x) = 0$ admet exactement deux solution α et β telles que $\alpha < \beta$

b) Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$ et $1.6 < \beta < 1,7$

c) Donner une interprétation graphique des solutions de l'équation f(x)=0

5) Construire la courbe (𝕋) dans le repère (O ;$\vec{i}, \vec{j}$).

6a) en utilisant une intégration par parties H(x)=$\int_1^x (t-2)lnt\,dt$. En déduire la primitive F de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ telle que$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0$.

7) Pour tout entier naturel n on note (U_n) l'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par la courbe 𝕋 l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = \frac{1}{n}$

a) Écrire U_1 et U_2 sous forme d'intégrale.

b) Justifier que pour tout $n \geq 3$, on a : $U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(x)dx$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to +\infty} U_n \quad F(\alpha)$ où F est la primitive de f calculée en 6b).

Donner une interprétation graphique de cette limite.

FIN

Corrigé baccalauréat 2007 session normale

Exercice 1

$g(x) = xe^x$

$1a)\quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$b)\ g'(x) = e^x + e^x x = e^x(1+x)$

$e^x > 0 \Rightarrow$ *le signe de* $g'(x)$ **est celui de** $1 + x$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 + x = 0$

$\Rightarrow x = -1$

TV de g

$g(-1) = -\frac{1}{e}$

c) $y = 0$ **est une asymptote horizontale au voisinage de-** ∞

Γadmet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de+∞

2a) $g'(x) = e^x + e^x x$

$= e^x + g(x)$

$g(x) = g'(x) - e^x$

$G(x) = g(x) - e^x$

$G(x) = xe^x - e^x$

b) $A(\alpha) = -\int_{\alpha}^{0} g(x)dx = [G(x)]_{\alpha}^{0}$

$= -G(0) + G(\alpha) \quad ,G(0) = -1$

$A(\alpha) = 1 + \alpha e^{\alpha} - e^{\alpha}$

c) $\lim_{\alpha\to-\infty} \alpha e^{\alpha} = 0$ **et** $\lim_{\alpha\to-\infty} e^{\alpha} = 0$

$\Rightarrow \lim_{\alpha\to-\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha\to-\infty} 1 + \alpha e^{\alpha} - e^{\alpha} = 1$

Exercice 2

$$f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$$

$$=\frac{ax(x+1)+b(x+1)(x-1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{ax^2+ax+b(x^2-1)+cx^2-cx}{x(x^2-1)}$$
$$=\frac{ax^2+ax+bx^2-b+cx^2-cx}{x(x^2-1)}$$
$$f(x)=\frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x(x^2-1)}$$
$$\begin{cases} a+b+c=0\Rightarrow \mathrm{a}-2+\mathrm{a}=0\Rightarrow 2\mathrm{a}-2=0\Rightarrow \mathrm{a}=1 \\ a-c=0\Rightarrow \mathrm{a}=\mathrm{c}=1 \\ -b=2\Rightarrow b=-2 \end{cases}$$
$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}$$

$b)$
$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}$$
$$\Rightarrow F(x)=ln(x-1)-2lnx+ln(x+1)$$
$$F(x)=ln(x-1)+ln(x+1)-2lnx$$
$$F(x)=ln(x-1)(x-1)-lnx^2$$
$$F(x)=ln(x^2-1)-lnx^2$$
$$F(x)=ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

c) $I=\int_2^3 f(x)dx$

$$=\left[ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)\right]_2^3$$
$$=ln\left(\frac{9-1}{9}\right)-ln\left(\frac{4-1}{4}\right)$$
$$=ln\left(\frac{8}{9}\right)-ln\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$=ln\left(\frac{\frac{8}{9}}{\frac{3}{4}}\right)$$
$$I=ln\left(\frac{32}{27}\right)$$

2) $a)$ $U_n=\frac{2}{n(n^2-1)}=f(n)=\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}$

$$U_n=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\quad-\quad\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

$$U_n=\frac{n-n+1}{n(n-1)}+\frac{n-n-1}{n(n+1)}$$
$$U_n=\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}$$

b) On effectue $(n-1)$ relations :

$$U_2 = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3}$$
$$U_3 = \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4}$$
$$U_4 = \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5}$$
$$U_5 = \frac{1}{4 \times 5} - \frac{1}{5 \times 6}$$
.
.
.
$$U_n = \frac{1}{(n-1)\, n} - \frac{1}{n\,(n+1)}$$

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{n(n+1)}$$
$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$$
$c)$
$$U_n = \frac{2}{(n-1)n(n+1)}$$
$$U_2 = \frac{2}{1 \times 2 \times 3}$$
$$U_3 = \frac{2}{2 \times 3 \times 4}$$
$$U_4 = \frac{2}{2 \times 3 \times 4}$$
.
.
.
$$U_{2007} = \frac{2}{2006 \times 2007 \times 2008}$$
$$A = \frac{2}{1 \times 2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3 \times 4} + \frac{2}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{2}{2006 \times 2007 \times 2008}$$
$$A = U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_{2007}$$
$$A = S_{2007}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2007 \times 2008}$$
$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4030056}$$

$$A = \frac{2015027}{4030056}$$

Exercice 3

1. a)
$$z_1 = \frac{10 + 4i}{3 + 7i}$$

$=\dfrac{(10+4i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)}$
$=\dfrac{30-70i+12i+28}{9+49}$
$=\dfrac{58}{58}-\dfrac{58}{58}i$
$z_1=1-i$
$z_2=\ (1+i)\ (1-i)$
$z_2=2$
$z_3=\dfrac{7+3i}{5-2i}$
$=\dfrac{(7+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}=\dfrac{35+14i+15i-6}{25+4}=\dfrac{29i+29i}{29}$
$z_3=1+i$
b)
$z_1=1-i\Rightarrow |z_1|=|1-i|=\sqrt{2}$
$z_1=1-i\Rightarrow argz_1=arg\ (1-i)=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
$z_1=\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+isin(-\frac{\pi}{4})\right)$
z_2=2$\Rightarrow |z_2|=2$
$z_2=2\Rightarrow argz_2=\ arg\ (2)=0\ [2\pi]$
$z_2=2(\cos 0+isin0)$
$z_3=1+i\Rightarrow |z_3|=|1+i|=\sqrt{2}$
$z_3=1-i\Rightarrow argz_3=arg\ (1+i)=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
$z_3=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4})+isin(\frac{\pi}{4})\right)$
2a)
A (1,-1) ; B(2,0) ; C(1,1)

b) Démontrons que le triangle ABC est isocèle rectangle en B.
On pose le nombre complexe :
$K=\dfrac{z_{A-z_B}}{z_{C-z_B}}$
$=\dfrac{1-i-2}{1+i-2}$

$$= \frac{(-1-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$
$$= \frac{1+i+i-1}{2}$$
$$= \frac{2i}{2}$$
$K = i$

$$\begin{cases} |K| = |i| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \frac{BA}{BC} = 1 \Rightarrow BA = BC \\ argK = argi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

⇒ Que le triangle ABC est isocèle rectangle en B

Le triangle ABC est isocèle rectangle en B de plus $OA = OC = BC = AB = \sqrt{2}$ donc le quadrilatère OABC est un carré

c)

$$\left|\frac{z}{z-2}\right| = 1 \Rightarrow |z| = |z-2|$$
$$\Rightarrow |Z_M - Z_0| = |Z_M - Z_B|$$
$\Rightarrow$ **OM=BM**

Δ est la médiatrice du segment [OB].

3a) $z' = \frac{-2}{z-2}$

$$z' = z \Rightarrow \frac{-2}{z-2} = z$$
$$\Rightarrow z(z-2) = -2$$
$$\Rightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$$
$$\Delta = 4 - 8 = -4 = 4i^2$$
$$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

$$z_2 = \frac{-2+2i}{2} = 1 - i$$

S= $\{1+i, 1-i\}$

b) $|z' - 1| = \left|\frac{-2}{z-2} - 1\right|$

$$= \left|\frac{-2-z+2}{z-2}\right|$$

$$= \left|\frac{-z}{z-2}\right|$$

$$|z' - 1| = \frac{|z|}{|z-2|}$$

c) $|z' - 1| = \frac{|z|}{|z-2|} \Rightarrow |Z_{M'} - Z_I| = \frac{|Z_M - Z_0|}{|Z_M - Z_B|}$

$$\Rightarrow IM' = \frac{OM}{BM}$$

$\Rightarrow IM' = 1$ **puisque** $M \in \Delta$

$\Rightarrow$ M' **appartient au cercle de centre I et de rayon** $r = 1$

Exercice 4

$f(x) = x^2 - x - 1 + (x-2)lnx$

$D_f =]0, +\infty[$

1 a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - x - 1 + (x-2)lnx = 0 - 0 - 1 + (-2)(-\infty) = +\infty$

X=0 est une asymptote verticale à Γ

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - x - 1 + (x-2)lnx = +\infty - \infty + \infty F.I$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(x - 1 - \frac{2}{x} + \left(1 - \frac{2}{x}\right) lnx\right) = (+\infty)(+\infty - 1 - 0 + \infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x - 1 - \frac{2}{x} + \left(1 - \frac{2}{x}\right) lnx = (+\infty - 1 - 0 + \infty) = +\infty$

Γadmet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de $+\infty$

$2a)\quad f'(x) = 2x - 1 + lnx + (x-2) \times \frac{1}{x}$

$2x - 1 + lnx + 1 - \frac{2}{x}$

$f'(x) \quad 2x + lnx - \frac{2}{x}$

b) $f''(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0 \Rightarrow$ f' **est strictement croissante sur**$]0, +\infty[$

c) $f'(1) = 2 - 2 = 0$

f' **est strictement croissante sur**$]0, +\infty[$ **et** $f'(1) = 0$ **on en déduit que**

Si $\begin{cases} 0 < x \leq 1 : f'(x) \leq 0 \\ x \geq 1 : f'(x) \geq 0 \end{cases}$

3) TV de f

4a) f est continue et décroissante de $]0, 1]$ **vers** $[-1, +\infty[$ **et** $0\epsilon[-1, +\infty[$ **donc l'équation** $f(x) = 0$ **admet une unique solution dans** $]0, 1]$ **soit** α **cette solution.**

f est continue et croissante de $[1, +\infty[$ **vers** $[-1, +\infty[$ **et** $0\epsilon[-1, +\infty[$ **donc l'équation** $f(x) = 0$ **admet une unique solution dans** $[1, +\infty[$ **soit** β**cette solution.**

b)$f(0,4) \cong 0,54 > 0$ **et** $f(0,5) \cong -0,017 < 0$ **;** $f(0,4) \times f(0,5) < 0$

$\Rightarrow 0,4 < \alpha < 0,5$

$f(1,6) \cong -0,098 < 0$ **et** $f(1,7) \cong 0,2 > 0$ **;** $f(1,6) \times f(1,7) < 0 \Rightarrow 1,6 < \beta < 1,7$

c) les solutions de l'équation $f(x) = 0$ **représentent les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses**

5)

6a) **H(x) =**$\int_1^x (t-2)\,lnt\,dt$

H(x) =$\int_1^x (t-2)\,lnt\,dt$

On pose $\begin{cases} u = lnt \rightarrow u' = \frac{1}{t} \\ v' = t-2 \rightarrow v = \frac{t^2}{2} - 2t \end{cases}$

H(x) =$\left[\left(\frac{t^2}{2} - 2t\right) lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(\frac{t^2}{2} - 2t\right) dt$

$$H(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) lnx - \int_1^x \left(\frac{t}{2} - 2\right) dt$$

$$H(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) lnx - \left[\frac{t^2}{4} - 2t\right]_1^x$$

$$H(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) lnx - \left(\frac{x^2}{4} - 2x\right) + \frac{1}{4} - 2$$

$$H(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) lnx - \left(\frac{x^2}{4} - 2x\right) - \frac{7}{4}$$

$$H(x) = -\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{7}{4} + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) lnx$$

$b) f(x) = x^2 - x - 1 + (x-2)lnx \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + H(x)$**+k**

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \frac{x^2}{4} + 2x - \frac{7}{4} + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) lnx + k$

$\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + k = 0$

$\Rightarrow k = \frac{7}{4}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \frac{x^2}{4} + 2x - \frac{7}{4} + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) lnx + \frac{7}{4}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + x + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) lnx$

7) a) $U_1 = -\int_{\alpha}^{1} f(x)dx$. **puisque** $\alpha < 1$ **et** f *est négatif sur* $[\alpha, 1]$

$U_2 = -\int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$. **puisque** $\alpha < \frac{1}{2}$ **et** f *est négatif sur* $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$

b) pour tout $n \geq 3$**, on a** $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} < \alpha \Rightarrow U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(x)dx$ f *est positif sur* $\left[\frac{1}{n}, \alpha\right]$

c)

$U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(x)dx \Rightarrow U_n = [F(x)]_{\frac{1}{n}}^{\alpha} = F(\alpha) - F(\frac{1}{n})$

$\lim_{n \to +\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ **.On pose x=** $\frac{1}{n}$ **puisque si** $n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \to 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} F(\alpha) - \lim_{n \to +\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = F(\alpha)$

Cette limite représente l'aire du domaine plan limité par (Γ) la droite $x = \alpha$ **et les axes des coordonnées.**

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2007 session Complémentaire

Exercice 1 (4points)

On considère les suites(U_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3n - 1$ **et :** $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 1$

1° Pour tout n ∈ N on pose : $a_n = 2U_n + 3v_n - 1$ **et** $b_n = U_n - v_n$

calculer a_0 , a_1, b_0 **et** b_1

2°a)Vérifier que pour tout n ∈ N: $a_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **puis en déduire la nature de la suite** a_n **et la caractériser.**

b) Vérifier que pour tout $n \in N$: $b_n = 5n - 2$ **puis en déduire la nature de la suite** b_n **et la caractériser.**

3° Pour tout n ∈ N on pose $s_n = a_0 + a_1 + \cdots ... + a_n$ **et** $s'_n = b_0 + b_1 + \cdots ... + b_n$

Exprimer s_n **et** s'_n **en fonction de n .**

4°a) Pour tout n ∈ N on pose $X_n = U_0 + U_1 + \cdots ... + U_n$ **et** $Y_n = V_0 + V_1 + \cdots ... + V_n$

Exprimer X_n **et** Y_n **en fonction de n.**

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n^2} = \frac{3}{2}$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{Y_n}{n^2} = -1$

Exercice 2 (4points)

Pour tout nombre complexe z différent de 1+i on pose :$f(z)=\frac{z-i}{z-1-i}$

1°Calculer $z_0 = f(1)$ **puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique**

2°Résoudre dans C l'équation f(z)=iz soient z_1, z_2 **ses deux solutions telles que** $Im(z_2) > 0$.

a) Calculer le module et un argument de z_1, z_2

b) Vérifier que : $z_1 + z_2 = z_1 \times z_2 = 1$

3°a) Déterminer Γ_1 **l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que** $|f(z)| = 1$

b) Déterminer Γ_2 **l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que f(z) soit imaginaire pur**

c) construire ces deux ensembles dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 3 (5points)

On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ **par :** $f(x) = \frac{x}{e^{2x^2-1}} = xe^{-2x^2+1}$

Soit (C) **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{2x}\right)$ **et** $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right)$

b) Vérifier que pour tout x appartenant à$[0, +\infty[$ **on a** $f(x) = \frac{e}{2x} \times \frac{2x^2}{e^{2x^2}}$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **puis interpréter graphiquement cette limite**

2a) Calculer $f'(x)$ **où** f' **est la dérivée de f puis vérifier que pour tout x appartenant à**$[0, +\infty[$: $f'(x) = (1-2x)(1+2x)e^{-2x^2+1}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à $[0, +\infty[$

3a) Déduire des résultats précédents le tableau de variation de f

b) Construire C

4°) On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $U_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$

a) Interpréter géométriquement U_n

b) sans calculer U_n, montrer que pour tout entier naturel n non nul à : $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$

c) En déduire que la suite (U_n) est décroissante

d) Prouver que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 4 (7points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + (x-1)\ln x$

Soit Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

1.On considère la fonction numérique u définie sur $]0, +\infty[$ par : $u(x) = 2 - \frac{1}{x} + \ln x$

a)Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x)$

b) Calculer $U'(x)$ où U' est la dérivée de u puis dresser le tableau de variation de u

c) Montrer que u réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera

d) Montrer que sur $]0, +\infty[$, l'équation u(x)=0 admet une unique solution α telle que $0;64 < \alpha < 0{,}65$ en déduire le digne de $u(x)$ sur $]0, +\infty[$

2a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement

b) montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = u(x)$ où $f'(x)$ est la fonction dérivée de f

c) Dresser le tableau de variation de f

3a) Montrer que : $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha}$ où α est le réel trouvé à la question 1d)

b) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point d'abscisse α

4 Montrer que la droite D d'équation y=x est la tangente à Γau point d'abscisse $x_0 = 1$

5a) Construire la courbe Γ et les droites D et Δ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

(On pourra prendre $\alpha \approx 0,6$ et $f(\alpha) \approx 0,8$)

b) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de l'équation : $(x-1)\ln x = m$

Fin

Corrigé baccalauréat 2007 session Complémentaire

Exercice 1

1a) $a_0 = 2U_0 + 3v_0 - 1$

$=2(1-1)+3(1+1)-1$

$a_0 = 5$

$a_1 = 2U_1 + 3v_1 - 1$

$= 2\left(\frac{1}{2}+2\right) + 3\left(\frac{1}{2}-1\right) - 1$

$= 5 - \frac{3}{2} - 1$

$= 4 - \frac{3}{2}$

$a_1 = \frac{5}{2}$

$b_0 = u_0 - v_0$

$= 1 - 1 - (1+1)$

$b_0 = -2$

$b_1 = u_1 - v_1$

$= \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$

$b_1 = 3$

2a) $a_n = 2U_n + 3v_n - 1$

$= 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\mathrm{n} - 1\right) + 3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\mathrm{n} + 1\right) - 1$

$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6n - 2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6n + 3 - 1$

$a_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

⇒ (a_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0 = 5$

b) $b_n = U_n - v_n$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\mathrm{n} - 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\mathrm{n} + 1\right)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\mathrm{n} - 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\mathrm{n} - 1$

$b_n = 5\mathrm{n} - 2$

⇒ (b_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $b_0 = -2$

3) $s_n = a_0 + a_1 + \cdots \ldots + a_n$

$= \frac{a_0}{1-q}(1 - q^{n+1})$

$= \frac{5}{1-\frac{1}{2}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$$= \frac{5}{\frac{1}{2}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$s_n = 10\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$s'_n = b_0 + b_1 + \cdots \dots + b_n$$

$$= \frac{(n+1)(b_0 + b_n)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(-2 + 5n - 2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(5n - 4)}{2}$$

$$= \frac{5n^2 - 4n + 5n - 4}{2}$$

$$s'_n = \frac{5n^2 + n - 4}{2}$$

4a) $X_n = U_0 + U_1 + \cdots \dots + U_n$

Soit $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $d_n = 3n - 1$

$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3n - 1$

$u_n = c_n + d_n$

(u_n) est la somme d'une suite (c_n) géommetrique et d'une suite (d_n)arithmétique

$$X_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n + d_0 + d_1 + \cdots \dots + d_n$$

$$= \frac{c_0}{1-q}(1 - q^{n+1}) + \frac{(n+1)(d_0 + d_n)}{2}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(-1 + 3n - 1)}{2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n - 2)}{2}$$

$$= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 - 2n + 3n - 2}{2}$$

$$X_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 + n - 2}{2}$$

Soit $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $r_n = -2n + 1$

$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 1 = c_n + r_n$

$(v_n$ $(c_n$ (r_n)

$Y_n = V_0 + V_1 + \cdots \dots + V_n$

$= c_0 + c_1 + \cdots \dots + c_n + r_0 + r_1 + \cdots \dots + r_n$

$$= \frac{c_0}{1-q}(1-q^{n+1}) \quad + \frac{(n+1)(r_0+r_n)}{2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(1-2n+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(-2n+2)}{2}$$

$$= 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{-2n^2+2n-2n+2}{2}$$

$$y_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{2-2n^2}{2}$$

$$y_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 1 - n^2$$

b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2+n-2}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{n^2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Y_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{n^2}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Y_n}{n^2} = -1$$

Exercice 2

$$f(z) = \frac{z-i}{z-1-i}$$

1-

$$z_0 = f(1) = \frac{1-i}{-i}$$

$$= \frac{(1-i)i}{-i \times i}$$

$$z_0 = i+1$$

$$z_0 = 1+i$$

$$\begin{cases} |z_0| = \sqrt{2} \\ arg z_0 = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad z_0 = \sqrt{2}(cos\tfrac{\pi}{4} + isin\tfrac{\pi}{4})$$

2a) $f(z) = iz \Leftrightarrow$

$$\frac{z-i}{z-1-i}=iz$$
$\Leftrightarrow\ iz(z-1-i)=z-i$
$\Leftrightarrow iz^2-iz+z=z-i$
$\Leftrightarrow iz^2-iz+z-z+i=0$
$\Leftrightarrow\ iz^2-iz+i=0$
$\Leftrightarrow\ z^2-z+1=0$
$\Delta=1-4=-3=3i^2\ =(\sqrt{3}i)^2$
$$z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$S=\left\{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$
b) $|z_1|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{-\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$
$$\begin{cases}\cos\theta_1=\frac{1}{2}\\ \sin\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta_1=-\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$$
$|z_2|=|z_1|=1$
$$\arg z_2=-\arg z_1=\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$$
c)
$$z_1+z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$
$$z_1\times z_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$
$\Rightarrow$
$z_1+z_2=z_1\times z_2=1$

3a) Soit A le point d'affixe et le point d'affixe
$|f(z)|=1\Leftrightarrow$
$\frac{|z-i|}{|z-1-i|}=1\Leftrightarrow$

$\frac{|Z_M-Z_A|}{|Z_M-Z_B|}=1\Leftrightarrow$

$\frac{AM}{BM}=1\Leftrightarrow$
$AM=BM$
$\Gamma_1$est La médiatrice du segment $[AB]$

b) $f(z)$ est imaginaire pur$\Leftrightarrow\begin{cases}f(z)=0\ o\text{ù}\\ \arg f(z)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\\ (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{cases}$

Γ_2 est Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Exercice 3 :

f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{e^{2x^2-1}}=xe^{-2x^2+1}$.

1° a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{2x}\right)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{t}{e^t}\right)=0$. (inverse d'une limite remarquable.)

b) Pour $x>0$, $f(x)=xe^{-2x^2+1}=x\times e\times e^{-2x^2}=\dfrac{e}{2x}\times\dfrac{2x^2}{e^{2x^2}}$.

c) D'après 1° a), en posant $t=2x^2$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Ce qui s'interprète par le fait que la droite d'équation : $y=0$ est une asymptote horizontale en $+\infty$.

2° a) $f'(x)=1\times e^{-2x^2+1}+\left(-4xe^{-2x^2+1}\right)x=\left(1-4x^2\right)e^{-2x^2+1}=(1-2x)(1+2x)e^{-2x^2+1}$.

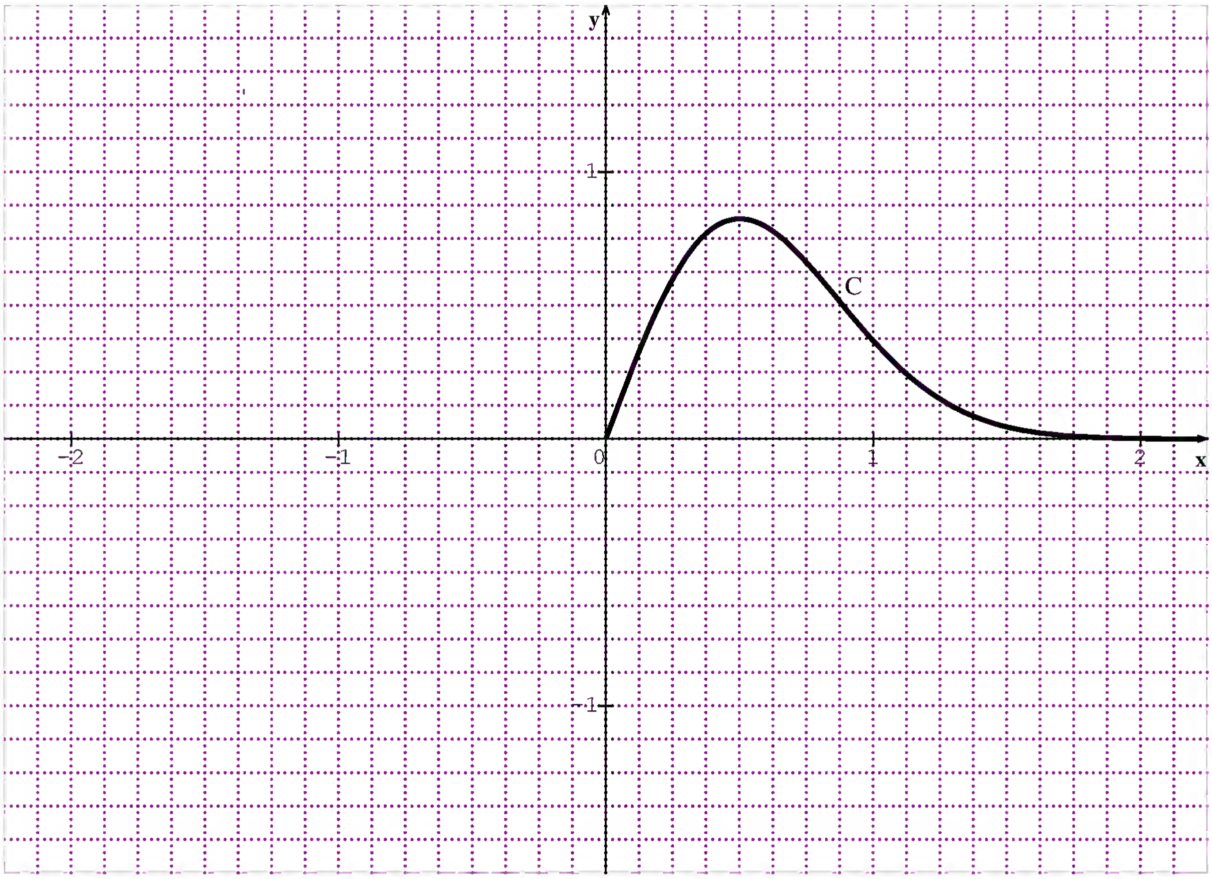
b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-2x$ car $(1+2x)e^{-2x^2+1}>0$ sur $[0,+\infty[$.

x	0		1/2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	

3° a) Le TV de f :

x	0		1/2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{\sqrt{e}}{2}$	↘	0

b) Tracé de (C).



4° $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

a) U_n est l'aire du domaine plan limité par (C), par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$.

b) On a $[n, n+1] \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, donc pour $n \le t \le n+1, f(n+1) \le f(t) \le f(n)$.

c) Par intégration des membres de la double inégalité précédente on trouve : $f(n+1) \le U_n \le f(n)$.

En remplaçant n par $n+1$, on obtient $f(n+2) \le U_{n+1} \le f(n+1)$. On voit alors que $U_{n+1} \le f(n+1) \le U_n$ et par suite (U_n) est strictement décroissante.

d) (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente. D'autre part, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n+1) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

Exercice 4 :

1° u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $u(x) = 2 - \frac{1}{x} + \ln x$.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x} + \ln x\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \ln x\right) = +\infty$

b) $u'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2} > 0$

x	0		$+\infty$
$u'(x)$	‖	$+$	
$u(x)$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

c) u est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $J=\mathbb{R}$.

d) u réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $J=\mathbb{R}$ et $0\in\mathbb{R}$ .donc l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$. Comme $u(0,64)\times u(0,65)<0$ alors $0,64<\alpha<0,65$.

Le signe de $u(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2° a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+(x-1)\ln x\right)=0+(-1)\times(-\infty)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+(x-1)\ln x\right)=+\infty+(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\ln x\right)=+\infty$.

La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale de la courbe (C).

La branche infinie de la courbe (C), en $+\infty$, est de direction (Oy).

b) $f'(x)=1+1\times\ln x+\dfrac{1}{x}(x-1)=1+\ln x+1-\dfrac{1}{x}=2-\dfrac{1}{x}+\ln x=u(x)$.

c) TV de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

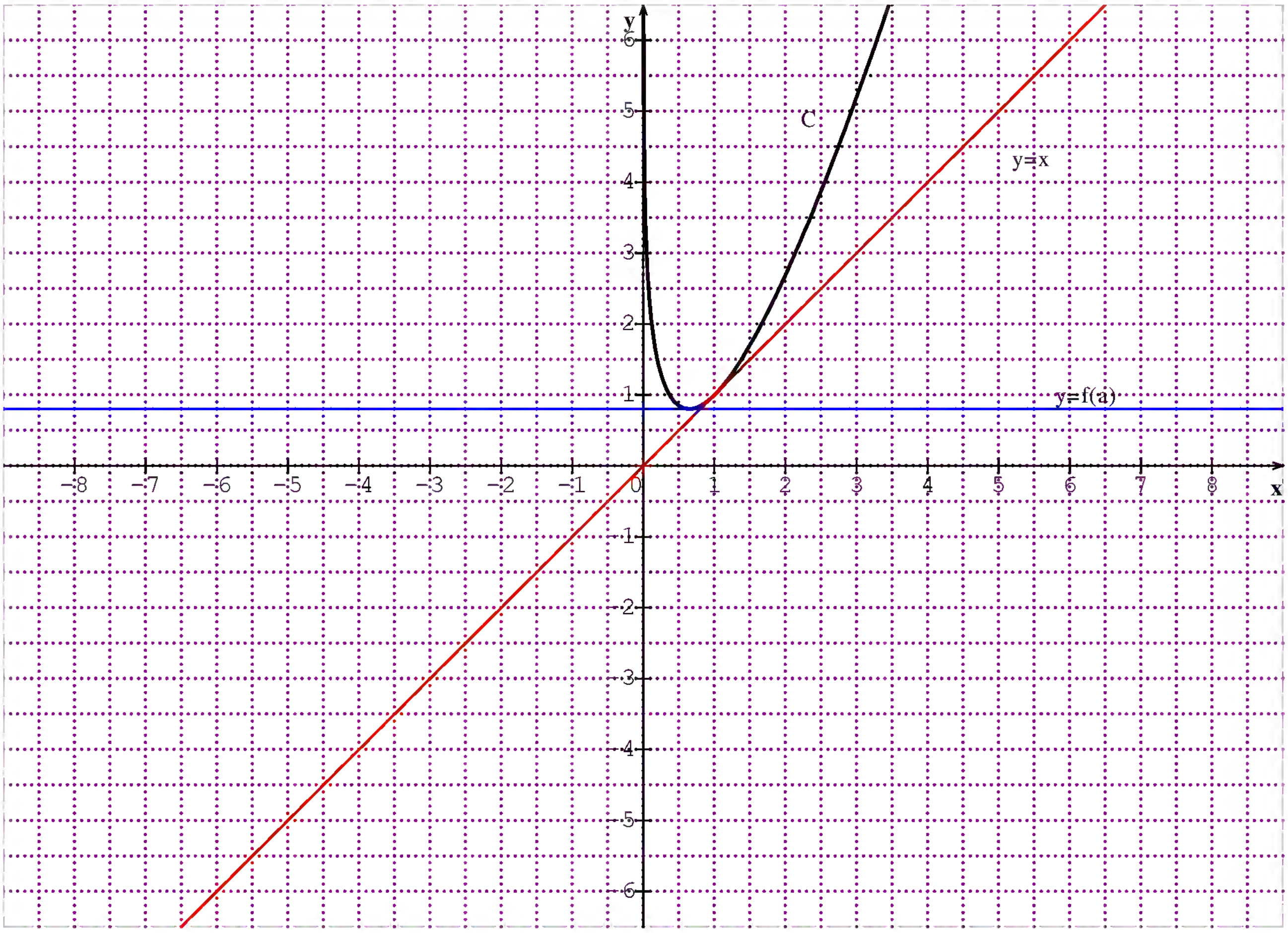
3° a) On a : $f(\alpha)=\alpha+(\alpha-1)\ln\alpha$. Or $u(\alpha)=2-\dfrac{1}{\alpha}+\ln\alpha \iff 0=2-\dfrac{1}{\alpha}+\ln\alpha \iff \ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}-2$.

Alors : $f(\alpha)=\alpha+(\alpha-1)\left(\dfrac{1}{\alpha}-2\right)=\dfrac{\alpha^2+(\alpha-1)(1-2\alpha)}{\alpha}=\dfrac{-\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha}$.

b) Une équation de la tangente au point d'abscisse α est : $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)\iff y=f(\alpha)$ car $f'(\alpha)=0$

4° Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y=f'(1)(x-1)+f(1)\iff$ $y=1\times(x-1)+1=x$. $D: y=x$ est tangente à Γ en son point d'abscisse 1.

5° a) Tracés de Γ,Δ et D.



b) **L'équation** $(x-1)\ln x = m \Leftrightarrow x+(x-1)\ln x = x+m \Leftrightarrow f(x) = x+m$. **Toute solution de l'équation est l'abscisse d'un point commun à** (Γ) **et** $D_m : y = x+m$ **.**

Valeurs de m	Nombre de solutions
$m<0$	0
$m=0$	1 une solution double
$m>0$	2

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2008 session normale

Exercice 1 $(4 points)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\frac{2x^2-x+1}{x-1}$ dont la courbe représentative (C) est donnée ci-dessous. On ne demande pas d'étudier f.

1a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x de $\mathbb{R}-\{1\}$ On a: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$

b) Déterminer les équations des asymptotes à la courbe (C) et les coordonnées de son centre de symétrie.

2a) Déterminer une primitives F de f sur l'intervalle $[2,+\infty[$

b) pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'aire U_n du domaine plan limitée par la courbe (C), l'asymptote oblique et les droites d'équations $x=n$ et $x=n+1$.
Exprimer U_n en fonction de n puis montrer que la suite(U_n) est décroissante et positive .Que peut –on en déduire ?

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3) On pose : $S_n=U_2+U_3+\cdots+U_n$ où n est un entier naturel $n \geq 2$

a) Calculer S_2 et S_3

b) Donner l'expression de $S_n$en fonction de n puis vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$

c) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on a : $s_n \geq 20$

Exercice 2 $(5 points)$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{u},\vec{v})$
Pour tout nombre complexe z, ($z \neq -2i$), on pose :

$$f(z)=\frac{(-4+2i)z-5}{z+2i}$$

1° Calculer $Z_1=f(1)$ et l'écrire sous forme algébrique.

2° Résoudre dans C l'équation $f(z)=z$.

3a) Placer dans le repère $(o;\vec{u},\vec{v})$ les points A et B d'affixes :
$z_A = -2i$ et $z_B = -1 - \frac{1}{2}i$
b) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que :
$|f(z) + 4 - 2i| = \sqrt{65}$
c) Vérifier que pour tout nombre complexe z, ($z \neq -2i$) on a :
$f(z) = (-4 + 2i)\frac{z+1+\frac{1}{2}i}{z+2i}$
En déduire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que : $|f(z)|=\sqrt{20}$.
d) Construire Γ_1 et Γ_2 dans le repère $(o;\vec{u},\vec{v})$
Exercice 3 $(5points)$

On considère la fonction sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.
1a) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ puis interpréter graphiquement
b) Montrer que le point $\Omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie
2)a) Montrer que f est strictement croissante
b) Dresser le tableau de variation de f
3a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point
b) Construite la tangente (T) et la courbe (C)
4a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) Donner l'expression de la fonction f^{-1}
c) Calculer de deux manières $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$ (on pourra utiliser 3a)
Exercice 4 $(6points)$
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :$f(x) = x - 3 - \frac{lnx}{x}$
on note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.
1 Démontrer chacun des résultats suivants et en donner une interprétation géométrique
a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = 0$
2a) Montrer que pour tout x de l'intervalle$]0,+\infty[$ on a :$f'(x) = \frac{x^2-1+lnx}{x^2}$
b) Vérifier que :$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \\ 0 < x \leq 1 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \end{cases}$
c) Dresser le tableau de variation de f
3a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans l'intervalle $]0,+\infty[$exactement deux solutions α et β.Vérifier que $0,37 < \alpha < 0,38$ et $3,36 < \beta < 3,37$
b) Déterminer un point de (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation y=x et déterminer une équation de cette tangente
c) Construire la courbe (C)
d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $lnx = mx$ où m est un paramètre réel.

Fin

Corrigé Baccalauréat 2008 session normale

Exercice 1

1a) $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

$= \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}$

$= \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$

$= \frac{ax^2 + (-a+b)x - b + c}{x-1}$

$$\begin{cases} a = 2 \\ -a + b = -1 \Rightarrow b = a - 1 = 1 \\ -b + c = 1 \Rightarrow c = 1 + b = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x-1}}$$

b) D'après le graphique les coordonnées de $\Omega(1,3)$

$2a)\ f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x-1}$

$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 2ln(x-1)$

b)

$U_n = \int_n^{n+1} \left(f(x) - (2x+1)\right)dx$

$= \int_n^{n+1} \frac{2}{x-1}dx$

$U_n = 2[ln(x-1)]_n^{n+1}$

$U_n = 2(ln(n) - ln(n-1))$

$U_n = 2ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$U_{n+1} = 2ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$U_{n+1} - U_n = 2ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 2ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$= 2\left(ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$

$= 2ln\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)$

$= 2ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)$

$U_{n+1} - U_n = 2ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$

$U_{n+1} - U_n = 2ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$

$0 < n^2 - 1 < n^2 \Rightarrow \frac{n^2-1}{n^2} < 1$

$\Rightarrow ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) < 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) < 0$

$\Rightarrow U_{n+1}$ - $U_n < 0$

$\Rightarrow$ (U_n) **est décroissante**

$Une\ 2^{ème} Méthode$

On pose $g(n) = U_n = 2(ln(n) - ln(n-1))$

$g'(n) = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$

$= 2\left(\frac{n-1-n}{n(n-1)}\right)$

$g'(n) = \frac{-2}{n(n-1)} < 0 \Rightarrow$ **g est décroissante**

(U_n) **est décroissante**

(U_n) **est décroissante et minorée donc elle est convergente.**

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} 2ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = 0$

3) $S_n = U_2 + U_3 + \cdots + U_n$

$S_2 = U_2 = 2ln2$

$S_3 = U_2 + U_3$

$= 2ln2 + 2ln\frac{3}{2}$

$U_n = 2(ln(n) - ln(n-1))$

b) $S_n = U_2 + U_3 + \cdots + U_n$

$= 2\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 2 + \cdots + 2\ln n - 2\ln(n-1)$

$S_n = 2\ lnn$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2\ lnn = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln n^2 = +\infty$

c) $S_n \geq 20 \Rightarrow 2lnn \geq 20$

$\Rightarrow lnn \geq 10$

$\Rightarrow n \geq e^{10}$

$\Rightarrow n \geq 22026$

Le plus petit entier naturel n_0 **tel que pour** $n \geq n_0$; $s_n \geq 20$ **est**$n_0 = 22027$

Exercice 2

$f(z) = \frac{(-4+2i)z - 5}{z + 2i}$

1) $z_1 = f(1) = \frac{-4+2i-5}{1+2i}$

$= \frac{(-9+2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$= \frac{-9 + 18i + 2i + 4}{1 + 4}$

$= \frac{-5}{5} + \frac{20}{5} i$

$z_1 = -1 + 4i$

2) $f(z) = z \Leftrightarrow \frac{(-4+2i)z-5}{z+2i} = z$

$\Leftrightarrow z(z + 2i) = (-4 + 2i)z - 5$

$\Leftrightarrow z^2 + 2iz = -4z + 2iz - 5$

$\Leftrightarrow z^2 + 4z + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$

$z_1 = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$

$z_2 = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$

$S = \{2 + i; 2 - i\}$

3° a) Voir la représentation graphique

b)

$|f(z) + 4 - 2i| = \sqrt{65} \Rightarrow$

$\left|\frac{(-4+2i)z-5}{z+2i} + 4 - 2i\right| = \sqrt{65} \Rightarrow$

$\left|\frac{(-4+2i)z-5+(4-2i)(z+2i)}{z+2i}\right| = \sqrt{65} \Rightarrow$

$\left|\frac{-4z+2iz-5+4z+8i-2iz+4}{z+2i}\right| = \sqrt{65} \Rightarrow$

$\left|\frac{-1+8i}{z+2i}\right| = \sqrt{65} \Rightarrow$

$\sqrt{65}|z + 2i| = |-1 + 8i|$

$\Rightarrow \sqrt{65}|z + 2i| = \sqrt{65}$

$\Rightarrow |z + 2i| = 1$

$\Rightarrow |z - (-2i)| = 1$

$\Rightarrow |z_M - Z_A| = 1$

$\Rightarrow AM = 1$

Γ_1 **est le cercle de centre A et de rayon r= 1**

c)

$$f(z)=\frac{(-4+2i)z-5}{z+2i}$$

$$f(z)=\frac{(-4+2i)\left(z-\frac{5}{-4+2i}\right)}{z+2i}$$

$$f(z)=\frac{(-4+2i)\left(z-\frac{5(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)}\right)}{z+2i}$$

$$f(z)=\frac{(-4+2i)\left(z-\frac{-20-10i}{20}\right)}{z+2i}$$

$$f(z)=(-4+2i)\frac{\left(z+1+\frac{1}{2}i\right)}{z+2i}$$

$|f(z)|=\sqrt{20}\Rightarrow$

$$\left|(-4+2i)\frac{z+1+\frac{1}{2}i}{z+2i}\right|=\sqrt{20}\Rightarrow$$

$$|-4+2i|\left|\frac{z+1+\frac{1}{2}i}{z+2i}\right|=\sqrt{20}\Rightarrow$$

$$\sqrt{20}\left|\frac{z+1+\frac{1}{2}i}{z+2i}\right|=\sqrt{20}\Rightarrow$$

$$\left|\frac{z+1+\frac{1}{2}i}{z+2i}\right|=1$$

$\Rightarrow\quad \left|z-\left(-1-\frac{1}{2}i\right)\right|=|z-(-2i)|$

$\Rightarrow\quad |z_M-z_B|=|z_M-z_A|$

$\Rightarrow$ BM=AM

Γ_2 est la médiatrice du segment $[AB]$

3a)

Exercice 3

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

1a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1-1}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{e^x+1} = 1$

$\Rightarrow Y = 1$ une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0$

$\Rightarrow$ Y=0 une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$

b) Démontrons que $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie à la courbe (C)

$$f(2a - x) + f(x) = f(-x) + f(x)$$

$$= \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$= \frac{1}{e^x(e^{-x} + 1)} + \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$= \frac{1}{1 + e^x} + \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$= \frac{1 + e^x}{1 + e^x}$$

$$= 1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}$$

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

$\Rightarrow$ $\Omega\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie à la courbe (C)

2a)

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2}$$

$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0 \Rightarrow$ **f est strictement croissante**

b) TV de f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

3a) $f'(0) = \frac{1}{4}, \quad f(0) = \frac{1}{2}$

$$y = f'(0)x + f(0)$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

b)

4a) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers J=$]0,1[$ donc f réalise une bijection

b) $y = \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow y(e^x+1) = e^x$

$$\Rightarrow ye^x + y = e^x$$

$$\Rightarrow ye^x - e^x = -y$$

$$\Rightarrow e^x(y-1) = -y$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{-y}{y-1} = \frac{y}{1-y}$$

$$\Rightarrow x = ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

$$f^{-1}(x) = ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

c) $1^{ére}$Méthode

$$f^{-1}(x) = ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = lnx - ln(1-x)$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1-x+x}{x(1-x)}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x(1-x)}$$

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

2^{éme}Méthode

D'après la question 3a) on a :$f'(0) = \frac{1}{4}$ **,**$f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{f'(0)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$\boxed{(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = 4}$$

Exercice 4

$$f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x}$$

1$a)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - 3 - \frac{\ln x}{x} = 0 - 3 - (-\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x - 3 - \frac{\ln x}{x} = +\infty - 3 - 0 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (x-3) = \lim\limits_{x\to +\infty} x - 3 - \frac{\ln x}{x} - x + 3 = -\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) $a)$ $f(x) = x - 3 - \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \left(\frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x}{x^2}\right)$

$$= 1 - \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 + lnx}{x^2}$$

b) $x^2 > 0 \Rightarrow$ **le signe de** $f'(x)$ **est celui du numérateur** $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$

$$* \quad x \geq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1 \Rightarrow lnx \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 1 \Rightarrow lnx \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Si** $x \geq 1 : x^2 - 1 + lnx \geq 0 \Rightarrow$

si $x \geq 1 : f'(x) \geq 0$

$$* \, 0 < x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1$$

$$x \leq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0$$

$$x \leq 1 \Rightarrow lnx \leq 0$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0 \\ x \leq 1 \Rightarrow lnx \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Si** $x \leq 1 : x^2 - 1 + lnx \leq 0 \Rightarrow$ **si** $0 < x \leq 1 : f'(x) \leq 0$

c) TV de f

3a) f est continue et décroissante de $]0, 1]$ **vers** $[-2, +\infty[$ **et** $0 \epsilon [-2, +\infty[$ **donc l'équation** $f(x) = 0$ **admet une unique solution dans** $]0, 1]$ **soit** α **cette solution.**
f est continue et croissante de $[1, +\infty[$ **vers** $[-2, +\infty[$ **et** $0 \epsilon [-2, +\infty[$ **donc l'équation** $f(x) = 0$ **admet une unique solution dans** $[-2, +\infty[$ **soit** β **cette solution.**
$f(0,37) > 0$ **et** $f(0,38) < 0$ **;** $f(0,37) \times f(0,38) < 0 \Rightarrow 0,37 < \alpha < 0,38$
$f(3,36) < 0$ **et** $f(3,36) > 0$ **;** $f(3,36) \times f(3,37) < 0 \Rightarrow 3,36 < \beta < 3,37$

b) La tangente est parallèle à $y = x$ **ssi** $f'(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1 + lnx}{x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 + lnx = x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad lnx = 1$$

La tangente est parallèle à $y = x \Leftrightarrow \quad x = e$

Équation de la tangente en $x_0 = e$

$f(e) = e - 3 - \frac{1}{e}$;$f'(e) = \frac{e^2-1+1}{e^2} = 1$

$y = f'(e)(x-e) + f(e)$

$$y = x - e + e - 3 - \frac{1}{e}$$

$$y = x - 3 - \frac{1}{e}$$

c)

d) lnx = mx $\Rightarrow m = \frac{lnx}{x}$

$$\Rightarrow -m = -\frac{lnx}{x}$$

$$\Rightarrow x - 3 - m = x - 3 - \frac{lnx}{x}$$

$$\Rightarrow x - 3 - m = f(x)$$

Les solutions de l'équation $f(x) = x - 3 - m$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe (C) de f et la droite (D_m) d'équation $y = x - 3 - m$

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2008session complémentaire

Exercice 1(4points)

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par :

$$U_n = \frac{n^2}{e^n}.$$

1. **Calculer U_2, U_3 et donner une valeur décimale à 10^{-2} près.**
2. **Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e}$.**

3. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{e} \leq \frac{9}{4e}$. En déduire que (U_n) est décroissante.

4. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a: $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{9}{4e} U_n$. En déduire que $0 \leq U_n \leq \left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2} \times \frac{4}{e^2}$.

5. En déduire $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$.

Exercice 2 (5points)

1. On pose $P(z) = z^3 - 2z + 4$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(-2)$.

b) Déterminer deux réels a et b tels que : $P(z) = (z+2)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -2$, $z_B = 1+i$ et $z_C = 1-i$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_A, z_B et z_C

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

3.a) Calculer le module du complexe $\frac{z_C + 2}{z_B + 2}$ puis en déduire la nature du triangle ABC.

b) Déterminer z_D affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

4.a) Déterminer z_J affixe du point J milieu du segment $[BC]$;

b) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $|z-1| = 1$.

Exercice 3(5points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$.

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormal direct d'unité graphique 5cm

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ puis interpréter graphiquement ces résultats

2. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f.

3. Dresser le tableau des variations de f.

4. Trouver une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

5.a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera.

b) Calculer $(f^{-1})'\left(\frac{-1+\ln 4}{2}\right)$; on pourra utiliser la question 4.

c) Construire (C).

Exercice 3 (6points)

1. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - e^x - 1$.

   a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

   b) Calculer $g'(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de g.

   d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1{,}2 \leq \alpha \leq 1{,}3$.

   e) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)(e^x - 1)$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité $2cm$.

   a) Calculer les limites suivantes et en donner des interprétations graphiques :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-x+2))$.

   b) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f on utilisera 1.e).

   c) Montrer que $f(\alpha) = \frac{(2-\alpha)^2}{1-\alpha}$ puis en déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(\alpha)$.

   d) Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes des coordonnées.

   e) Construire la courbe (C).

   f) En utilisant une intégration par parties, calculer en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.

Fin

Corrigé Baccalauréat 2008 session Complémentaire

Exercice 1

1a) $U_n = \frac{n^2}{e^n}$

$U_2 = \frac{4}{e^2} \approx 0,54$

$U_3 = \frac{4}{e^2} \approx 0,47$

2)

$U_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}$

$U_n = \frac{n^2}{e^n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\frac{n^2}{e^n}}=\frac{e^n(n+1)^2}{e^{n+1}n^2}=\frac{e^n}{e^{n+1}}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=\frac{1}{e}\times\frac{e^n}{e^n}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\times\frac{1}{e}$$

3)

$$\forall n\geq 2\Rightarrow \frac{1}{n}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow 1+\frac{1}{n}\leq 1+\frac{1}{2}$$

$$\forall \mathrm{n}\geq 2\Rightarrow 0\leq 1+\frac{1}{n}\leq\frac{3}{2}$$

$$\forall \mathrm{n}\geq 2\Rightarrow 0\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\leq\frac{9}{4}$$

$$\forall \mathrm{n}\geq 2\Rightarrow 0\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\times\frac{1}{e}\leq\frac{9}{4}\times\frac{1}{e}$$

4) $\forall \mathrm{n}\geq 2\Rightarrow 0\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\times\frac{1}{e}\leq\frac{9}{4e}$

$$\forall \mathrm{n}\geq 2\Rightarrow 0\leq\frac{U_{n+1}}{U_n}\leq\frac{9}{4e}$$

$$\forall \mathrm{n}\geq 2\Rightarrow 0\leq U_{n+1}\leq\frac{9}{4e}U_n$$

On effectue $(n-2)$ relations à partir de la relation

$$\forall \mathrm{n}\geq 2\Rightarrow 0\leq U_{n+1}\leq\frac{9}{4e}U_n$$

$$\forall \mathrm{n}\geq 2\Rightarrow\begin{cases}0\leq U_3\leq\frac{9}{4e}U_2\\ 0\leq U_4\leq\frac{9}{4e}U_3\\ 0\leq U_5\leq\frac{9}{4e}U_3\\ \\ 0\leq U_n\leq\frac{9}{4e}U_{n-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ 0\leq U_n\leq\left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2}\times U_2$$

$$\Rightarrow 0\leq U_n\leq\left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2}\times\frac{4}{e^2}$$

5) $0\leq U_n\leq\left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2}\times\frac{4}{e^2}\Rightarrow\ 0\leq\lim_{n\to+\infty}U_n\leq\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{4e}\right)^{n-2}\times\frac{4}{e^2}$

$$\Rightarrow 0\leq\lim_{n\to+\infty}U_n\leq 0$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}U_n=0$$

Exercice 2

$$\mathrm{p(z)=z^3-2z+4}$$

1a)$p(-2)=(-2)^3-2\times(-2)+4=-8+4+4=0$

b)$p(z)=(z+2)(z^2+az+b)$

$=z^3+az^2+bz+2z^2+2az+2b$

$=z^3+(a+2)z^2+(b+2a)z+2b$

Par identification : $\begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ b+2a=-2 \\ 2b=4 \Rightarrow b=2 \end{cases}$

$p(z)=(z+2)(z^2-2z+2)$

c)$p(z)=0 \Rightarrow (z+2)(z^2-2z+2)=0$

$\begin{cases} z+2=0 \Rightarrow z=-2 \text{ où} \\ z^2-2z+2=0 \Rightarrow \Delta=4-8=-4 \\ \Rightarrow z_1=\frac{2+2i}{2}=1+i \\ \Rightarrow z_2=1-i \end{cases}$

S=$\{-2, 1+i. 1-i\}$

2) $Z_A=-2 \Rightarrow \begin{cases} |z_A|=2 \\ \arg Z_A=\arg(-2)=\pi \quad [2\pi] \end{cases}$

$Z_B=1+i \Rightarrow \begin{cases} |z_B|=\sqrt{2} \\ \arg Z_B=arg(1+i)=\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases}$

$Z_C=1-i \Rightarrow \begin{cases} |z_C|=\sqrt{2} \\ \arg Z_C=arg(1-i)=-\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases}$

3a)

$\frac{Z_C+2}{Z_B+2}=\left|\frac{1-i+2}{1+i+2}\right|=\left|\frac{3-i}{3+i}\right|=1$

$\left|\frac{z_C+2}{z_B+2}\right|=\left|\frac{z_C-(-2)}{z_B-(-2)}\right|=\left|\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right|=1$

$\Rightarrow \frac{AC}{AB}=1$ donc le triangle ABC est isocèle en A

b- $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow Z_D-Z_A=Z_C-Z_B$

$\Leftrightarrow Z_D=Z_A+Z_C-Z_B$

$\Leftrightarrow Z_D=-2+1-i-1-i$

$\Leftrightarrow \ Z_D=-2-2i$

$\Rightarrow$ D$(-2,-2)$

4a)$Z_J=\frac{Z_B+Z_C}{2}$

$Z_J=\frac{1+i+1-i}{2}=1$

b)$|z-1|=1 \Rightarrow |Z_M-Z_J|=1 \Rightarrow$ JM $=1$

Γ est le cercle de centre J et de rayon $r=1$

Exercice 3 :

1° f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x+1}\right)=1$ donc $\lim\limits_{n\to 0^+} f(x)=+\infty$. La droite d'équation : $x=0$ est une asymptote verticale.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ et $\lim\limits_{t\to 1}\ln t=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=0$. La droite d'équation : $y=0$ est une asymptote horizontale à (C), en $+\infty$.

2° $f'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{-x-1+x}{x(x+1)^2}=\dfrac{-1}{x(x+1)^2}<0$.

3° Le TV de f.

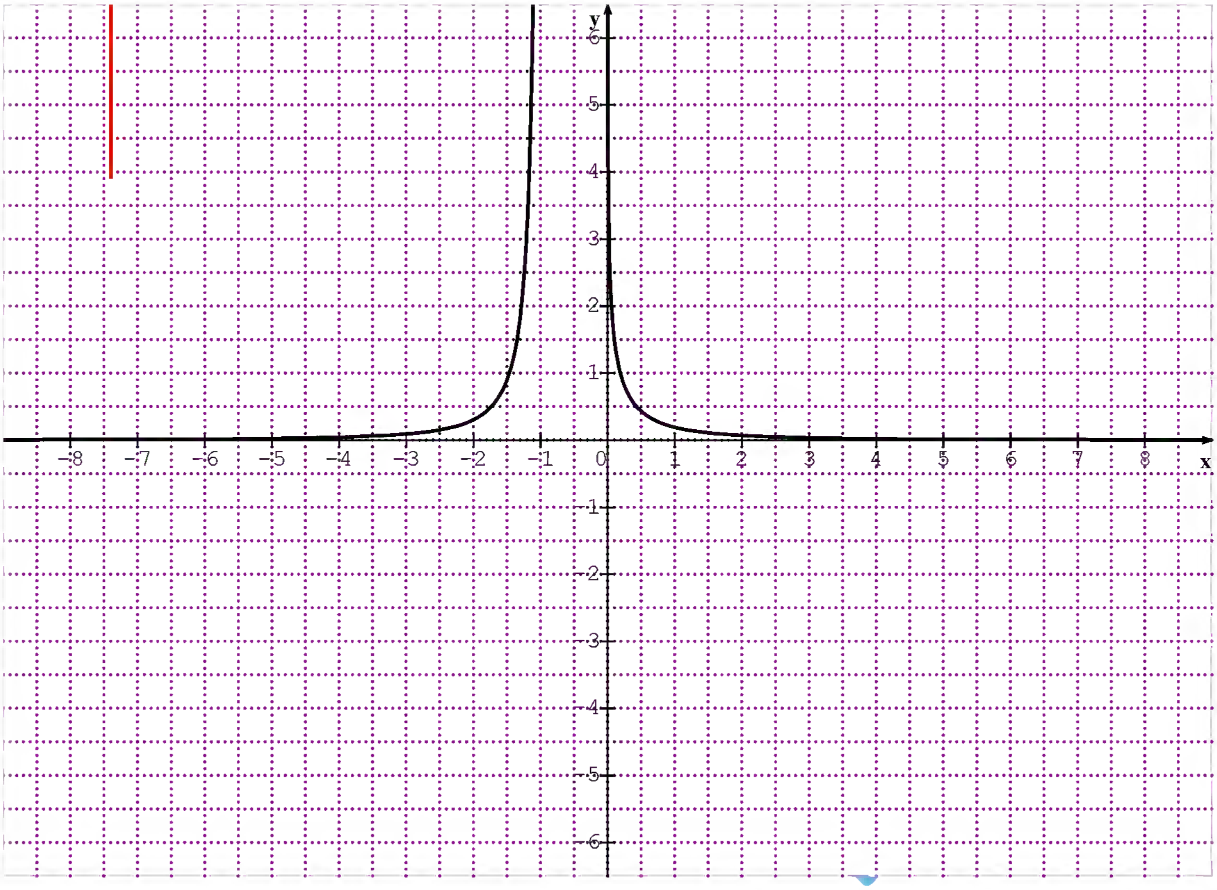
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖	$+\infty \searrow 0$

4° Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y=f'(1)(x-1)+f(1)\Leftrightarrow$ $y=-\frac{1}{4}(x-1)+\ln 2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}+\ln 2$.

5° a) f est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

b) On a : $f(1)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{-1+2\ln 2}{2}=\frac{-1+\ln 4}{2}\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{-1+\ln 4}{2}\right)=1$. Alors $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{-1+\ln 4}{2}\right)=\frac{1}{f'(1)}=-4$.

c) Construction.



Exercice 4 :

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - e^x - 1$

1° a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ limites remarquables, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$. Aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((x-1)e^x - 1\right) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) $g'(x) = 1\times e^x + x\times e^x - e^x - 0 = xe^x$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2° a) L'expression $g(x)$ est strictement négative sur $]-\infty,0]$ tandis que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[-2,+\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α. Comme $g(1{,}2)\times g(1{,}3) < 0$, alors $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$.

b) D'après le TV de g on a : $g(]-\infty,\alpha]) = [-2,0]$ donc, si $x \le \alpha$ alors $g(x) \le 0$ et $g([\alpha,+\infty[) = [0,+\infty[$ donc, si $x \ge \alpha$ alors $g(x) \ge 0$.

3° La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)(e^x - 1)$

a) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(e^{x}-1\right)=+\infty$ ce qui veut dire que la branche infinie, en $+\infty$, est de direction (Oy). On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+2)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}-2e^{x}\right)=0$

On dit que la droite d'équation : $y=-x+2$ est une asymptote oblique en $-\infty$.

b) $f'(x)=1\times\left(e^{x}-1\right)+e^{x}\times(x-2)=xe^{x}-e^{x}-1=g(x)$. Le signe de $f'(x)$ est celui $g(x)$.

Tableau de variation de f .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

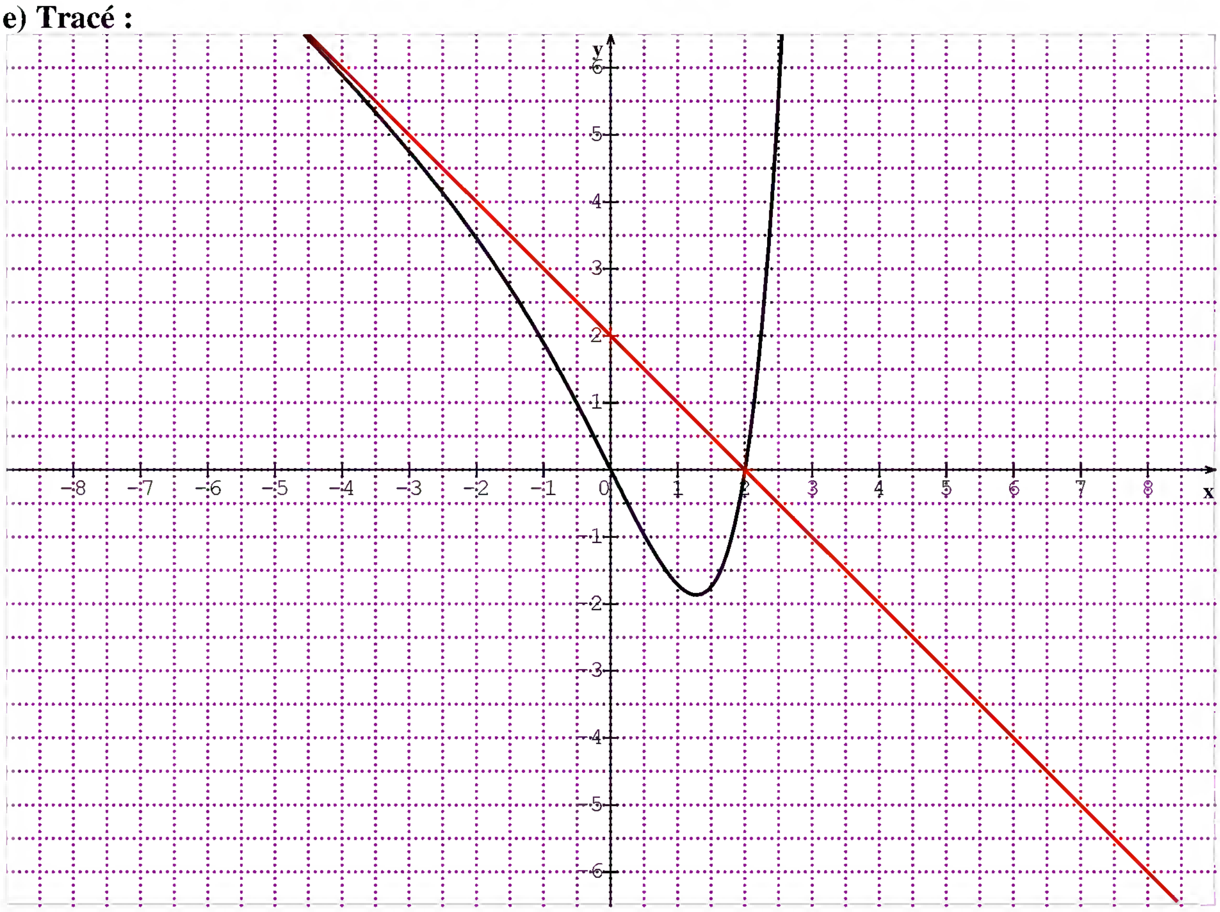
c) On a : $f(\alpha)=(\alpha-2)\left(e^{\alpha}-1\right)$; Or $g(\alpha)=0$ donc $\alpha e^{\alpha}-1=0\Leftrightarrow e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$. Par suite

$$f(\alpha)=(\alpha-2)\left(\frac{1}{\alpha-1}-1\right)=(\alpha-2)\left(\frac{2-\alpha}{\alpha-1}\right)=\frac{(2-\alpha)^{2}}{1-\alpha}.$$

d) $f(0)=0$ donc $(C)\cap(y'Oy)=\{O(0,0)\}$.

$f(x)=0\Leftrightarrow(x=2\ \text{ou}\ x=0)$ donc $(C)\cap(x'Ox)=\{O(0,0);A(2,0)\}$

e) Tracé :



f) L'aire en unités d'aire est $A=-\int_0^2 (x-2)(e^x-1)dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=e^x-1 \\ v(x)=x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x)=e^x-x \\ v'(x)=1 \end{cases}$.

$$A=-\left(\left[(x-2)(e^x-x)\right]_0^2-\int_0^2 (e^x-x)dx=2-\left[e^x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2\right)=-\left(2-e^2+2+1\right)=e^2-5 .$$

L'aire en cm^2 est : $A=e^2-5\ cm^2$.

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2009 session normale

Exercice 1(3points)

Une urne contient six boules indiscernables au toucher dont trois sont rouges, deux sont vertes une seule est jaune. On tire simultanément et au hasard, trois boules de cette urne .Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage , associe le nombre de couleurs de boules tirées.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le nombre de tirages possibles est :	C_6^3	A_6^3	6^3
2	La probabilité que le tirage soit unicolore est :	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$
3	La probabilité que le tirage soit tricolore est :	$0,3$	$\frac{11}{40}$	$\frac{7}{6}$

4	La probabilité que le tirage soit bicolore est :	$\frac{29}{40}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{13}{20}$
5	L'espérance mathématique de la variable X est :	$\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{20}$	4

Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.
Aucune justification n'est demandée :

Question N°	1	2	3	4	5
Réponse					

Exercice2 (5points)
On considère Le plan complexe muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{u},\vec{v})$.
1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes chacune des équations suivantes: $(E_1)\quad z^2-4z+13=0\quad (E_2)\quad z^2-6z+13=0$
2) Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq 3-2i$ on pose : $f(z)=\frac{z-2-3i}{z-3+2i}$
Calculer $\alpha=f(7+4i)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.
3) On considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$Z_A=2+3i$,$Z_B=3-2i$ **et** $Z_C=5+i$
a) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B, et C .
b) Calculer $f(Z_C)$puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.
En déduire la nature du triangle ABC.
c)Déterminer puis construire l'ensembleΓ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$
d) Déterminer puis construire l'ensembleΓ_2 des points M du plan d'affixe z tels le nombre f(z) soit imaginaire pur.
Exercice3 (5points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x}$
1a). Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.
b) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de f et vérifier que f est croissante sur$[1,+\infty[$.
c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe (C) dans un repère orthonormal (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$) unité 4cm.
2. On considère la suite numérique de terme général : $U_n=f(n)=\frac{n}{e^n}$; pour tout entier naturel $n\geq 1$
a) CalculerU_1, U_2.
b) Prouver que (U_n) est décroissante et positive (on peut utiliser 1.b) puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
c) Démontrer que :$\forall n\in\mathbb{N}^*; U_{n+1}=\frac{1}{e}U_n+\frac{1}{e^{n+1}}\quad(*)$
3 pour tout entier naturel$n\geq 1$ on pose : $S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n$
a) En utilisant l'égalité $(*)$ prouver que : $S_n=-\frac{1}{e-1}U_n+\frac{e}{(e-1)^2}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$
b) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
Exercice 1(7points)
On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$:$f(x)=x^2-2+(x-3)lnx$
Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$) unité 2cm.
1. Calculer et donner une interprétation graphique : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

2a) Calculer $f'(x)$ et montrer que la courbe (C) admet au point d'abscisse $x_0 = 1$une tangente horizontale dont on donnera une équation.
b) Calculer $f''(x)$.En déduire les variations de f' et le signe de f'
c) Dresser le tableau de variation de f
3a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0,+\infty[$exactement deux solutions α et β telles que $\alpha < \beta$, Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$ et $1.6 < \beta < 1,7$
b) Construire la courbe (C).
4. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]0,1]$
a)Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction g^{-1} réciproque de g puis justifier que :

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(-1)}{x+1} = -\infty$$

c) Construire, dans le repère précédent, la courbe (C') représentative deg^{-1}
5. Soit la suite numérique (A_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 3$ par :

$$A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt$$

a)Vérifier que la suite (A_n) est croissante et positive.
b) Utiliser une intégration par parties pour calculer G(x)=$\int_1^x (t-3)\ln t\, dt$.
En déduire la primitive F de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$qui vérifie $F(1) = \frac{13}{12}$
c) Donner l'expression de A_n en fonction de n et α et montrer que $\lim_{n\to+\infty} A_n = F(\alpha)$
d) Quelle interprétation géométrique peut –on donner à cette limite ?

Fin

Corrigé baccalauréat 2009 session normale

Exercice 1

Question N°	1	2	3	4	5
Réponse	A	B	A	C	A

Corrigé l'Exercice 2

1) $(E_1) \quad z^2 - 4z + 13 = 0$
$\Delta = 16 - 52 = -36 = 36i^2$
$z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i$; $z_2 = \frac{4-6i}{2} = 2 - 3i$
$\Rightarrow S = \{2 + 3i; 2 - 3i\}$
$(E_2) \quad z^2 - 6z + 13 = 0$
$\Delta = 36 - 52 = -16 = 16i^2$
$z_3 = \frac{6+4i}{2} = 3 + 2i$; $z_4 = \frac{6-4i}{2} = 3 - 2i$
$\Rightarrow S = \{3 + 2i; 3 - 2i\}$
2)

$$f(z) = \frac{z-2-3i}{z-3+2i}$$

$\alpha = f(7 + 4i)$

$$= \frac{7 + 4i - 2 - 3i}{7 + 4i - 3 + 2i}$$
$$= \frac{(5 + i)(4 - 6i)}{(4 + 6i)(4 - 6i)}$$
$$= \frac{20 - 30i + 4i + 6}{16 + 36}$$
$$= \frac{26}{52} - \frac{26}{52}i$$
$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$
$$|\alpha| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$arg\alpha = \ arg\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) = -\frac{\pi}{4}$$
$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

3) $A\ (2, 3), B\ (3, -2), C\ (5, 1)$

a)

b)

$$f(z_c) = \frac{Z_C - 2 - 3i}{Z_C - 3 + 2i}$$
$$= \frac{5 + i - 2 - 3i}{5 + i - 3 + 2i}$$
$$= \frac{3 - 2i}{2 + 3i}$$
$$= \frac{(3 - 2i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)}$$
$$= \frac{6 - 9i - 4i - 6}{4 + 9}$$
$$= \frac{-13}{13}i$$
$$f(z_c) = -i$$
$$\lfloor f(z_c) \rfloor = |-i| = 1$$

$\arg(f(z_C) = arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

$f(z_c) = cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$|f(z_c)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{Z_C-(2+3i)}{Z_C-(3-2i)}\right| = 1 \Rightarrow$

$\left|\frac{Z_C-Z_A}{Z_C-Z_B}\right| = 1 \Rightarrow$

$\frac{AC}{BC} = 1 \Rightarrow$

AC=BC

$\arg(f(z_C) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\begin{cases} AC = BC \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ $\Rightarrow$ **Le triangle ABC est isocèle rectangle en C**

c) $|f(z)| = 1 \Rightarrow$

$\left|\frac{Z_M-Z_A}{Z_M-Z_B}\right| = 1 \Rightarrow$

$\frac{AM}{BM} = 1$

$\Rightarrow$ **AM=BM**

Γ_1 **est la médiatrice du segment** $[AB]$

d) f(z) est imaginaire pur ssi $\begin{cases} f(z) = 0 \\ argf(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Γ_2 **est le cercle de diamètre** $[AB]$ **privé de B**

Corrigé l'Exercice 3

f(x) $= \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$

1a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ ***est une asymptote horizontale au voisinage de*** $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ **La courbe (C) admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de** $-\infty$

b) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$1 \leq x \Rightarrow 1 - x \leq 0$

$\Rightarrow e^{-x}(1-x) \leq 0$

$\Rightarrow f'(x) \leq 0$

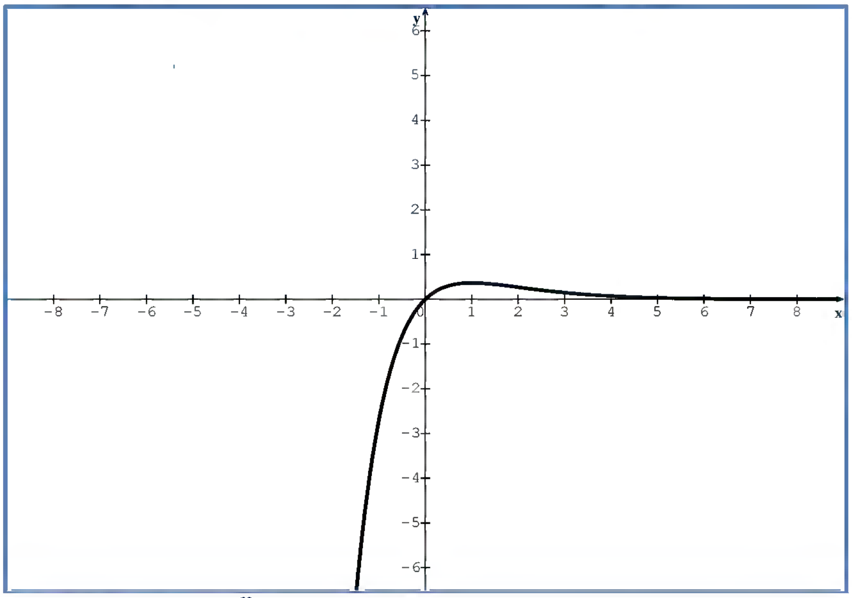
$\Rightarrow$ **f est décroissante sur** $[1, +\infty[$

c) $e^{-x} > 0$ **le signe de** $f'(x)$ **est celui de** $1 - x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

TV de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



2a) $\mathrm{U_n} = \mathrm{f}(\boldsymbol{n}) = \frac{n}{e^n}$

$U_1 = \dfrac{1}{e}$

$U_2 = \dfrac{2}{e^2}$

b) $n \geq 1$

$n < n+1 \ \Rightarrow f(n) > f(n+1)$ (puisque f est décroissante sur$[1, +\infty[$)

$\Rightarrow \ U_n > U_{n+1}$

donc (U_n)est décroissante

$\dfrac{n}{e^n} > 0 \Rightarrow U_n > 0$

(U_n)est décroissante et positive

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$

c) $\mathrm{U_{n+1}} = \mathrm{f}(n+1)$

$= \dfrac{n+1}{e^{n+1}}$

$= \dfrac{n}{e^{n+1}} + \dfrac{1}{e^{n+1}}$

$\mathrm{U_{n+1}} = \dfrac{1}{e} \times \dfrac{n}{e^n} + \dfrac{1}{e^{n+1}}$

$\mathrm{U_{n+1}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \times \mathrm{U_n} + \dfrac{1}{\mathrm{e^{n+1}}} \ (*)$

b) Pour calculer S_n on effectue$(n-1)$ relations :

$U_2 = \dfrac{1}{e}\mathrm{U_1} + \dfrac{1}{e^2}$

$U_3 = \dfrac{1}{e}\mathrm{U_2} + \dfrac{1}{e^3}$

$$U_4 = \frac{1}{e}U_3 + \frac{1}{e^4}$$

.

$$U_n = \frac{1}{e} \times U_{n-1} + \frac{1}{e^n}$$

$$S_n - U_1 = \frac{1}{e}(S_n - U_n) + \frac{\frac{1}{e^2}}{1-\frac{1}{e}}\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right)$$

$$S_n - U_1 = \frac{1}{e}S_n - \frac{1}{e}U_n + \frac{\frac{1}{e^2}}{1-\frac{1}{e}}\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right)$$

$$S_n - \frac{1}{e}S_n = -\frac{1}{e}U_n + U_1 + \frac{\frac{1}{e^2}}{1-\frac{1}{e}}\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right)S_n = -\frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e} + \frac{\frac{1}{e^2}}{\frac{e-1}{e}}\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right)$$

$$\left(\frac{e-1}{e}\right)S_n = -\frac{1}{e}U_n + \frac{1}{e} + \frac{1}{e(e-1)}\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right)$$

$$(e-1)S_n = -U_n + 1 + \frac{1}{e-1}\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right)$$

$$S_n = -\frac{1}{e-1}U_n + \frac{1}{e-1} + \frac{1}{(e-1)^2}\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right)$$

$$S_n = -\frac{1}{e-1}U_n + \frac{e-1}{(e-1)^2} + \frac{1}{(e-1)^2}\left(1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right)$$

$$S_n = -\frac{1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2} - \frac{1}{(e-1)^2} + \frac{1}{(e-1)^2} - \frac{1}{(e-1)^2}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

$$S_n = -\frac{1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2} - \frac{1}{(e-1)^2}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

$$S_n = -\frac{1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2} - \frac{1}{(e-1)^2} \times \frac{1}{e^{n-1}}$$

$$S_n = -\frac{1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2} - \frac{1}{(e-1)^2} \times \frac{e}{e^n}$$

$$S_n = -\frac{1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2} - \frac{e}{(e-1)^2} \times \frac{1}{e^n}$$

$$\boxed{S_n = -\frac{1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n =$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{e-1}U_n + \frac{e}{(e-1)^2}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right) = \frac{e}{(e-1)^2}$$

Exercice 4

$f(x) = x^2 - 2 + (x-3)\ln x$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 2 + (x-3)\ln x = 0 - 2 + (-3)(-\infty) = +\infty$

$\Rightarrow$ **La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation x=0**

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 2 + (x-3)\ln x = +\infty - 2 + (+\infty)(+\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-2+(x-3)\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x - \frac{2}{x} + \left(1 - \frac{3}{x}\right)\ln x = +\infty - 0 + \infty = +\infty$

$\Rightarrow$ **La courbe (C) admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de** $+\infty$

2 a) $f'(x) = 2x + \ln x + \frac{1}{x} \times (x-3)$

$f'(x) = 2x + \ln x + 1 - \frac{3}{x}$

$f'(1) = 2 + 0 + 1 - 3 = 0$

$f'(1) = 0 \Rightarrow$ **La courbe (C) admet une tangente horizontale en** $x_0 = 1$ **d'équation** $y = f(1) = -1$

b) $f''(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} > 0$ **puisque** $x \in]0, +\infty[$

$f''(x) > 0 \Rightarrow f'$ **eststrictement croissante sur** $]0, +\infty[$

f' **est strictement croissante sur** $]0, +\infty[$ **et** $f'(1) = 0$ **on en déduit que**

Si $\begin{cases} 0 < x \leq 1 : f'(x) \leq 0 \\ x \geq 1 : f'(x) \geq 0 \end{cases}$

c) TV de f

3a) f est continue et décroissante de $]0,1]$ **vers** $[-1, +\infty[$ **et** $0 \epsilon [-1, +\infty[$ **donc l'équation** $f(x) = 0$ **admet une unique solution dans** $]0,1]$ **soit** α **cette solution.**

f est continue et croissante de $[1, +\infty[$ **vers** $[-1, +\infty[$ **et** $0 \epsilon [-1, +\infty[$ **donc l'équation f(x)=0 admet une unique solution dans** $[-1, +\infty[$ **soit** β **cette solution.**

$f(0,4) \cong 0,54 > 0$ **et** $f(0,5) \cong -0,017 < 0$ **;** $f(0,4) \times f(0,5) < 0 \Rightarrow 0,4 < \alpha < 0,5$

$f(1,6) \cong -0,098 < 0$ **et** $f(1,7) \cong 0,2 > 0$ **;** $f(1,6) \times f(1,7) < 0 \Rightarrow 1,6 < \beta < 1,7$

$3 - b$

4a) g est continue et décroissante de $I =]0, 1]$ vers $J = [-1, +\infty[$ donc g réalise une bijection.

b) TV de g^{-1}

x	-1	$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$	$\|$	
$g^{-1}(x)$	1	$\searrow 0$

$$\lim_{(-1)^+} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(-1)}{x+1} = \lim_{(-1)^+} \frac{1}{g'\left(g^{-1}(-1)\right)} = \lim_{(-1)^+} \frac{1}{g'(1)} = \lim_{(-1)^+} \frac{1}{0^-} = -\infty$$

5)

$$a) A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt \,;\Rightarrow A_{n+1} = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} f(t)dt$$

$$A_{n+1} - A_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} f(t)dt - \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt$$

$$= \int_{\frac{1}{n+1}}^{\alpha} f(t)dt + \int_{\alpha}^{\frac{1}{n}} f(t)dt \quad \text{(d'après la formule de Chasles)}$$

$$A_{n+1} - A_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)dt$$

Étudions le signe de f

x	0	$\frac{1}{n+1}$		$\frac{1}{n}$	α		β	$+\infty$
f(x)	‖		+		0	−	0	+

$n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} < \alpha$

f est positive sur $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \Rightarrow A_{n+1} - A_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)dt \geq 0$

donc(A_n) **est croissante**

Sur $\left[\frac{1}{n}, \alpha\right]$; $f(t) \geq 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt \geq 0$

$\Rightarrow A_n \geq 0$

La suite(A_n) **est croissante et positive**

b) G(x) =$\int_1^x (t-3)lnt\, dt$

On pose $\begin{cases} u(t) = lnt \rightarrow u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = t - 3 \rightarrow v(t) = \frac{t^2}{2} - 3t \end{cases}$

G(x) =$\left[\left(\frac{t^2}{2} - 3t\right) lnt\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(\frac{t^2}{2} - 3t\right) dt$

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) lnx - \int_1^x \left(\frac{t}{2} - 3\right) dt$$

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) lnx - \left[\frac{t^2}{4} - 3t\right]_1^x$$

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) lnx - \left(\frac{x^2}{4} - 3x\right) + \frac{1}{4} - 3$$

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) lnx - \left(\frac{x^2}{4} - 3x\right) - \frac{11}{4}$$

$$G(x) = -\frac{x^2}{4} + 3x - \frac{11}{4} + \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) lnx$$

$f(x) = x^2 - 2 + (x-3)lnx$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + G(x) + k$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{x^2}{4} + 3x - \frac{11}{4} + \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) lnx + K$

$F(1) = \frac{13}{12} \Rightarrow \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{4} + 3 - \frac{11}{4} + k = \frac{13}{12}$

$\Rightarrow k - \frac{5}{3} = \frac{13}{12}$

$\Rightarrow k = \frac{13}{12} + \frac{5}{3}$

$\Rightarrow k = \frac{33}{12} = \frac{11}{4}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + x - \frac{11}{4} + \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) lnx + \frac{11}{4}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + x + \left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) lnx$

c) $A_n = [F(x)]_{\frac{1}{n}}^{\alpha}$

$= F(\alpha) - F\left(\frac{1}{n}\right)$

$A_n = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^2}{4} + \alpha + \left(\frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha\right) ln\alpha - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{3}{n}\right) lnn$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{X\to 0^+} F(X) = 0$ **tel que** $X = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} F(\alpha) - F\left(\frac{1}{n}\right) = F(\alpha)$

d) Cette limite représente l'aire du domaine plan limitée par (C) la droite $x = \alpha$ et les axes des coordonnées.

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE — **Série : Sciences de la nature**
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE — **Épreuve : Mathématiques**
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION — **Durée : 4heures**
SERVICE DES EXAMENS — **Coefficient : 6**

Baccalauréat 2010 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci –après, une seule réponse est exacte :

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Si $z = 2 - 3i$ son conjugué :	$\bar{Z}=2+3i$	$\bar{Z}=-2+3i$	$\bar{Z}=-2-3i$

2	Si $z = 3-3i$ un argZ est :	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
3	Si Z=3+4idonc|z|égal	25	$\sqrt{7}$	5
4	Les solutions de l'équation $z^2+2z+4=0$ dans $\mathbb{C}$ sont :	$-1-i\sqrt{3}$ et $-1+i\sqrt{3}$	2et -2	$1-i\sqrt{3}$ et $1+i\sqrt{3}$
5	Si A(1+i)et B(1-i) l'ensemble des points M(z) d'affixe z tel que $\lvert z-1+i\rvert = \lvert z-1-i\rvert$ est :	Le milieu du segment [AB]	La droite (AB)	La médiatrice du segment [AB]
6	Si P,Q et R trois points : $\frac{z_R - z_P}{z_Q - z_P} = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc le triangle PQR est un triangle	équilatéral	Rectangle	Isocèle

Recopie sur la feuille et complète le tableau suivant.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (4 points)

Pour tout entier naturel n on pose :

$U_n = 2^{2n+1} + 4n - 6$ et $V_n = 2^{2n+1} - 2n + 3$, $a_n = U_n - V_n$ et $b_n = U_n + 2V_n$

1-a) Calculer a_0 ,a_1 ,$b_0$et b_1

b) Démontrer que (a_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison

c) Démontrer que (b_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison

2) On pose $c_n = \ln b_n$

a) Déterminer la nature de la suite (c_n) et la caractériser

b) On pose $S_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$ vérifier que S_n peut s'écrire sous la forme $S_n = \alpha n^2 + \beta n+\gamma$ Où α , β et γ sont des réels à déterminer.

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-2x+1)e^x$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm .

1a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement

2) Calculer $f'(x)$ et vérifier que (C) admet deux tangentes horizontales que l'on déterminera

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Déterminer l'intersection de (C) avec les axes des coordonnées puis construire C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$

5a) Déterminer les réels a,b et c tels que la fonction définie par : $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$

b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$

<u>Exercice 4</u> (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ $f(x) = \dfrac{3-2\ln x}{x^2}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm

1a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement

c) Calculer $f'(x)$

2a) Dresser le tableau de variation de f

b) Représenter la courbe C dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$

3a) Montrer que la restriction g de f sur $]0, 2[$ est une bijection

b) Dresser le tableau de variation de g

c) En déduire que l'équation $g(x) = 3$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right]$

4a) Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $x = 1$

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(3)$

Fin

Corrigé baccalauréat 2009 session Complémentaire

Exercice 1

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	C	A	C	C

Exercice 2

1a) $U_n = 2^{2n+1} + 4n - 6$ et $V_n = 2^{2n+1} - 2n + 3$, $a_n = U_n - V_n$ et $b_n = U_n + 2V_n$

$U_0 = 2 - 6 = -4$, $U_1 = 2^3 + 4 - 6 = 8 + 4 - 6 = 6$
$V_0 = 2 + 3 = 5$, $V_1 = 2^3 - 2 + 3 = 8 + 1 = 9$
$a_0 = U_0 - V_0 = -4 - 5 = -9$
$b_0 = U_0 + 2V_0 = -4 + 10 = 6$
$a_1 = U_1 - V_1 = 6 - 9 = -3$
$b_1 = U_1 + 2V_1 = 6 + 18 = 24$
b) $a_n = U_n - V_n = 2^{2n+1} + 4n - 6 - 2^{2n+1} + 2n - 3 = 6n - 9$
(a_n) **est une suite arithmétique de raison** $r = 6$ **, et de premier terme** $a_0 = -9$
b) $b_n = U_n + 2V_n = 2^{2n+1} + 4n - 6 + 2(2^{2n+1} - 2n + 3)$
$= 2^{2n+1} + 4n - 6 + 2 \times 2^{2n+1} - 4n + 6$
$b_n = 3 \times 2^{2n+1}$
$b_{n+1} = 3 \times 2^{2(n+1)+1} = 3 \times 2^{2n+1+2} = 3 \times 2^{2n+1} \times 2^2 = b_n \times 2^2 = 4 \times b_n$
(b_n) **est une suite géométrique de raison** $q = 4$ **et de premier terme** $b_0 = 6$
2) $c_n = lnb_n =$, $c_{n+1} = lnb_{n+1}$
a) $c_{n+1} = ln(4 \times b_n) = ln4 + lnb_n = ln4 + c_n$
$c_{n+1} - c_n = ln4 \Rightarrow (c_n)$ **est une suite arithmétique de raison** $r = ln4$ **, et de premier terme** $c_0 = lnb_0 = ln6$
$c_n = c_0 + nr = ln6 + n \times ln4$
b) $S_n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$
$= \dfrac{(n+1)(c_0 + c_n)}{2}$
$= \dfrac{(n+1)(ln6 + ln6 + n \times ln4)}{2}$
$= \dfrac{(n+1)(2ln6 + n \times ln4)}{2}$
$= \dfrac{2ln6 \times n + n^2 \times ln4 + 2ln6 + n \times ln4}{2}$
$= \dfrac{n^2 \times ln4 + (2ln6 + ln4)n + 2ln6}{2}$
$= \dfrac{n^2 \times 2ln2 + (2ln6 + 2ln2)n + 2ln6}{2}$
$= \dfrac{n^2 \times 2ln2 + 2(ln6 + ln2)n + 2ln6}{2}$
$= \dfrac{n^2 \times 2ln2 + 2(ln12)n + 2ln6}{2}$
$= n^2 \times ln2 + n \times ln12 + ln6$
$\alpha = ln2$, $\beta = ln12$, $\gamma = ln6$

Exercice 3 :

La fonction f est définie sur ℝ par : $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.

1° **Ecrivons** $f(x) = x^2e^x - 2xe^x + e^x$. **On a :** $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ **ainsi que** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ **(Limites remarquables).**

On peut écrire $x^2e^x = \left(xe^{\frac{x}{2}}\right)^2$. En posant $t = \frac{x}{2}$, on trouve $x^2e^x = \left(2te^t\right)^2$ ($x \to -\infty \Leftrightarrow t \to -\infty$). Il vient : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \left(2\lim\limits_{t\to-\infty} te^t\right)^2 = 0$. Soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation : $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C), en $-\infty$.

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2x+1\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On peut écrire $\frac{f(x)}{x} = \left(x-2+\frac{1}{x}\right)e^x$ et

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2+\frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. On en déduit que la branche infinie en $+\infty$ est de direction (Oy).

2° $f'(x) = (2x-2)e^x + \left(x^2-2x+1\right)e^x = \left(x^2-1\right)e^x$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $x^2-1 = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$

(C) admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = -1$ d'équations respectives : $y = 0$ et $y = \frac{4}{e}$.

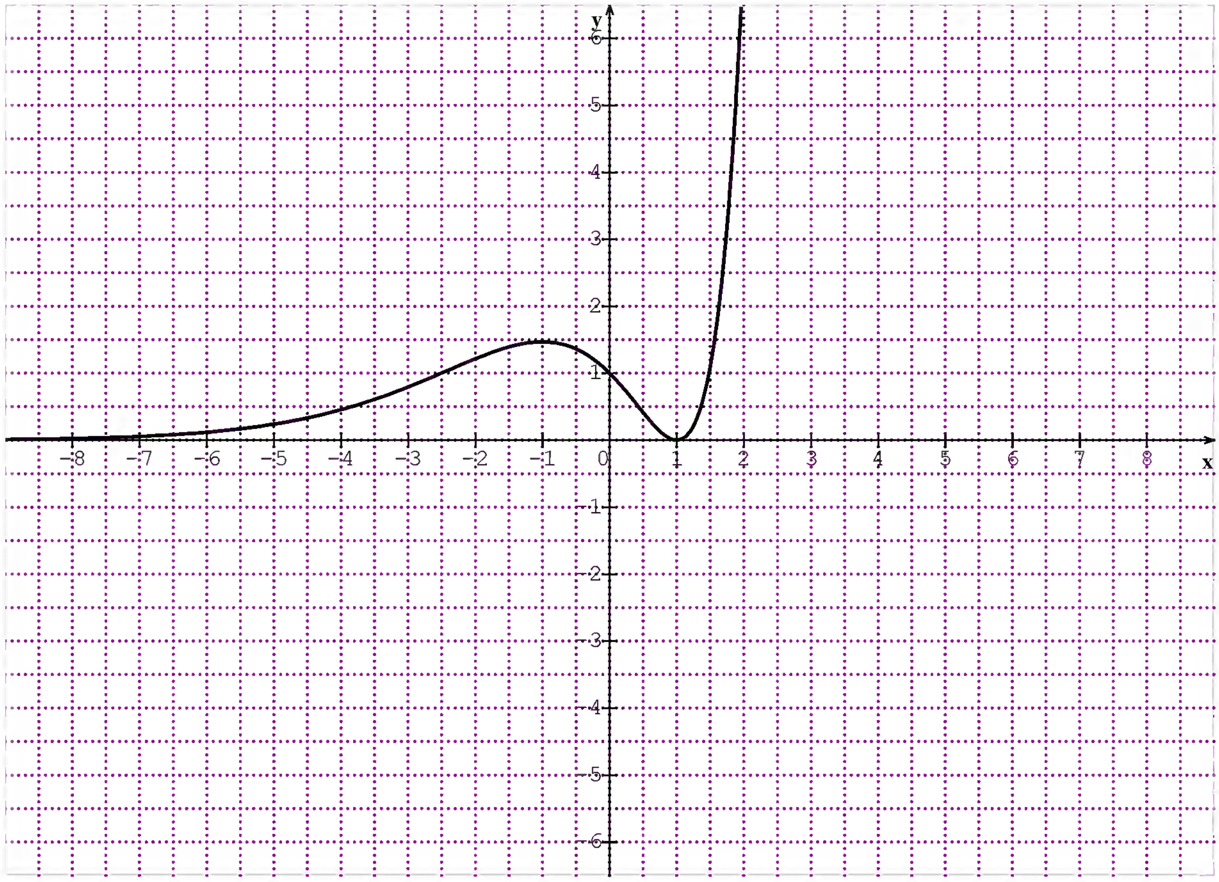
3° Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4°) $f(0) = 1$ donc $(C)\cap(y'Oy) = \{A(0,1)\}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ donc $(C)\cap(x'Ox) = \{B(1,0)\}$.

Tracé de (C).



5° a) Soit $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ telle que $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$. En identifiant avec l'expression de $f(x)$, on trouve : $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-2 \\ b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=5 \end{cases}$. Donc $F(x)=(x^2-4x+5)e^x$.

b) L'aire en unités d'aire est : $A=\int_0^1 f(x)dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0)=2e-5$.

Exercice 4 :

La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{3-2\ln x}{x^2}$.

1° a) On a : $f(x)=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}\times\dfrac{\ln x}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}\times\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$. La droite d'équation : $y=0$ est une asymptote horizontale en $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}\times\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$. La droite d'équation : $x=0$ est une asymptote verticale.

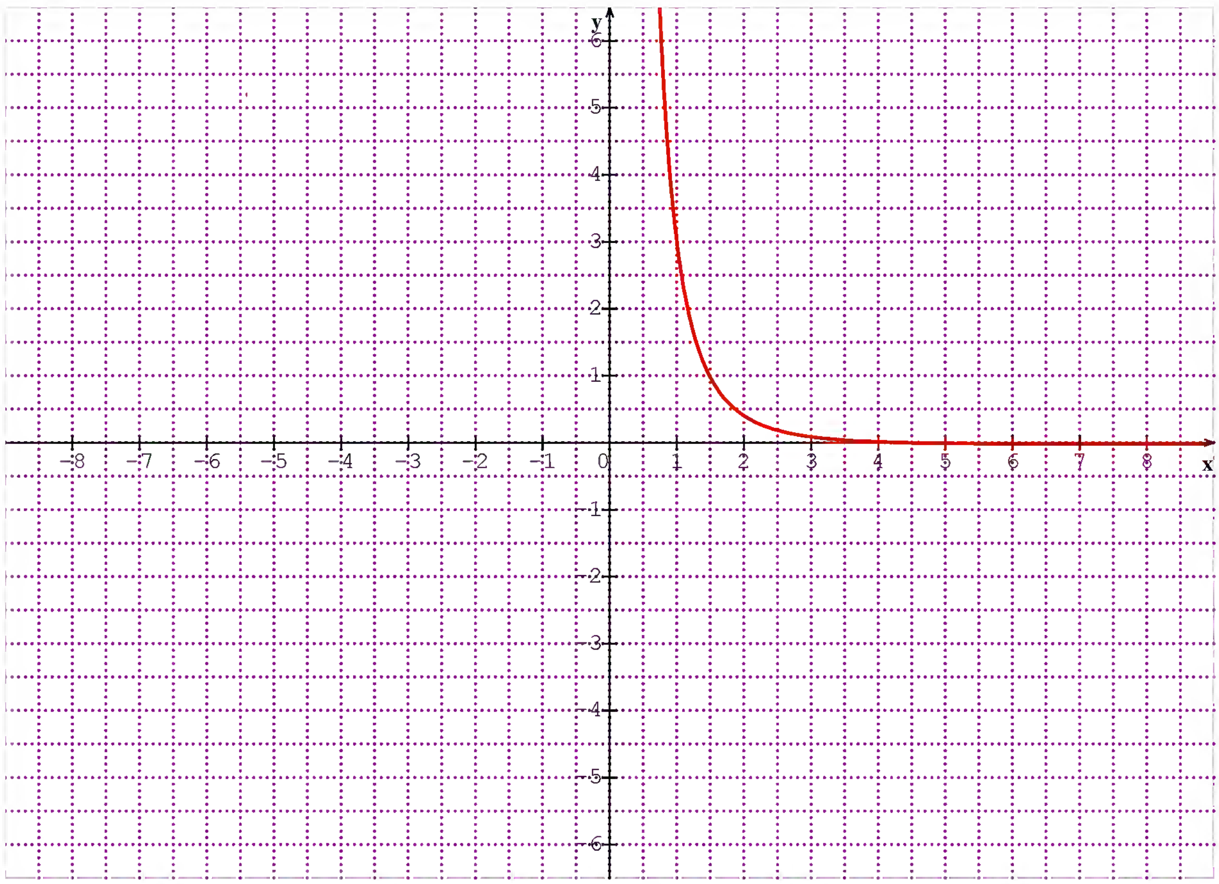
c) $f'(x)=\dfrac{-\dfrac{2}{x}\times x^2-2x(3-2\ln x)}{x^4}=\dfrac{-8x+4x\ln x}{x^4}=\dfrac{-8+4\ln x}{x^3}$.

2° a) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=2 \Leftrightarrow x=e^2$; $f(e^2)=\dfrac{-1}{e^4}$

Le TV de f :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	||	$+\infty$ $\searrow$	$-1/e^4$	$\nearrow$	0

b) Représentation de (C)



3° a) La restriction g de f, à l'intervalle $]0,2]$, est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $]0,2]$ sur $\left[\frac{3-\ln 4}{4},0\right[$.

b) Le TV de g.

x	0		2
$g'(x)$	||	$-$	
$g(x)$	||	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{3-\ln 4}{4}$

c) On a $3 \in \left[\frac{3-\ln 4}{4},0\right[$ et donc il existe un réel unique $\alpha \in]0,2[$ tel que $g(\alpha)=3$.

On a $g\left(\frac{1}{2}\right)=4(3+2\ln 2)>3$ et $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4(3+2\ln 2-2\ln 3)}{9}<3$. On en déduit que $\alpha\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

4° a) Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y=f'(1)(x-1)+f(1)\Leftrightarrow$ $y=-8(x-1)+3\Leftrightarrow y=-8x+11$.

b) On a : $g(1)=3\Leftrightarrow g^{-1}(3)=1$ et donc $\left(g^{-1}\right)'(3)=\frac{1}{g'(1)}=-\frac{1}{8}$.

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2010 session Normale

Exercice 1(3points)

On considère une fonction f dérivable sur son domaine de définition D_f de dérivée f'.Son tableau de variation est donné ci-dessous .On nomme (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$

Pour chaque question, parmi les réponses proposées une seule réponse est exacte

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble de définition de f est :	$\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$
2	L'équation f(x)=0 admet dans D_f exactement	3 solutions	2 solutions	1 solution
3	La courbe (C) admet une asymptote d'équation	$x=1$	$x=-2$	$y=-2$
4	La fonction f est une fonction	Paire	Impaire	ni paire ni impaire
5	L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisses x_0 =1 est	$x=1$	$y=0$	$y=-4$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci- dessous. Aucune justification n'est demandée.

N° question	1	2	3	4	5
Réponse Exacte					

Exercice 2 (4points)

Pour tout nombre z on pose : $p(z)=z^3-z^2-4z-6$

1°)a) Calculer $p(3)$

b) Déterminer les réels a, b tels que pour tout z on a $p(z)=(z-3)(z^2+az+b)$

c)Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $p(z)=0$

2°) On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.les points A, B, C et D d'affixes respectifs $Z_A=3+2i;Z_B=-1+i,z_C=-1-i$ et $Z_D=3$

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$

b) Comparer l'affixe du milieu de [AC] à celle du milieu de [BD]

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z telle que :

$$|z-3|=|z+1-i|$$

Exercice 3 (4points)

On considère la suite numérique(U_n) définie pour tout entier n ≥1 par :

$$U_n=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

1a) Calculer u_1 , u_2 et u_3

b) Justifier que la suite (U_n) ;

n'est pas arithmétique, n'est pas géométrique ; est convergente.

2°) pour tout entier $n \geq 1$ on pose : $v_n = \frac{n^2-1}{n}$

a)Montrer que :$U_n = V_{n+1} - V_n$

b) En déduire l'expression de la somme $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$en fonction de n

3) Pour tout entier $n \geq 2$ on pose $w_n = ln\, V_n$ et $s'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$

Démontrer que $S'_n = \ln\left[\frac{(n+1)!}{2n}\right]$

Exercice 4 **(9points)**

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 2 + e^x$ soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm

1a) Calculer les limites de $f(x)$ en -∞ et +∞

b) Calculer et donner une interprétation graphique de $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x + 2))$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

2) Dresser le tableau de variation de f

3°) Montrer que f réalise une bijection de R sur un intervalle J que l'on déterminera

4°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α puis vérifier que $-2,5 < \alpha < -2$

5°) Construire (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

6a) Déterminer la primitive F de f qui vérifie $F(0) = 0$

Soit A (α) l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$

b) Calculer A(α) en fonction de α . Montrer que $A(\alpha) = \frac{6-2\alpha-\alpha^2}{2}$

7a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = \alpha$

b) Vérifier que $(f^{-1})'(0) = \frac{-1}{\alpha+1}$

8) On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(x + 2 + e^x)$

a) Déterminer l'ensemble de définition de g

b) Dresser le tableau de variation de g

c) Construire la courbe (Γ) de g dans un nouveau repère orthonormé$(O; \vec{u}, \vec{v})$.

FIN

Corrigé baccalauréat 2010 session Normale

Exercice 1

N° question	1	2	3	4	5
Réponse Exacte	A	A	B	C	C

Exercice 2

$p(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$

$1a)\ p\,(3)\ = 27 - 9 - 12 - 6 = 0$

b) $P\,(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$

$= z^3 + az^2 + bz - 3\,z^2 - 3az - 3b$

$p(z)\ = z^3 + (a-3)z^2 + (b-3a)z - 3b$

$$\begin{cases} a - 3 = -1 \\ b - 3a = -4 \\ -3b = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 3a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$$

$p(z) = (z-3)(z^2 + 2z + 2)$

c) $p(z) = 0 \Rightarrow (z-3)(z^2 + 2z + 2) = 0$

$\Rightarrow z = 3$ Où $z^2 + 2z + 2 = 0$

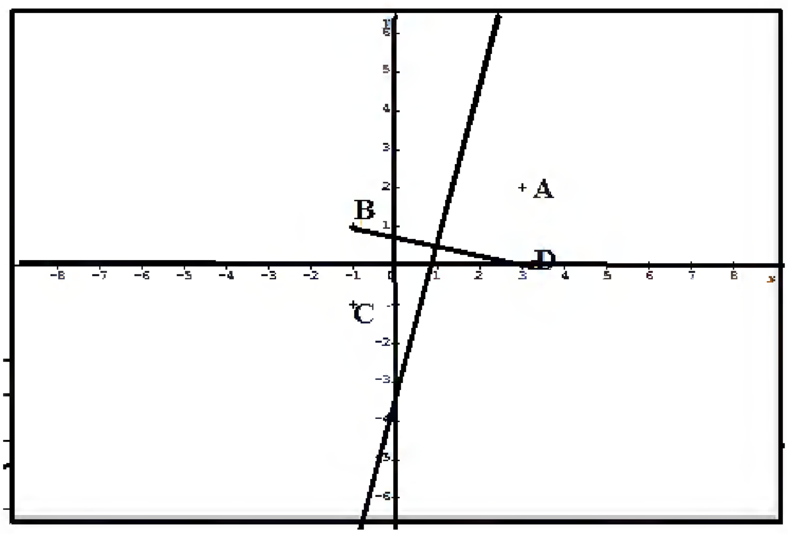
$\Delta = 4 - 8 = -4 = 4i^2$

$$z_1 = \frac{-2+2i}{2} = -1 + i$$

$$z_2 = \frac{-2-2i}{2} = -1 - i$$

S= $\{3, -1+i, -1-i\}$

a)



b)

$$milieu\ de\ [AC] = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{3 + 2i - 1 - i}{2} = \frac{2+i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$$

$$milieu\ de[BD] = \frac{Z_B + Z_D}{2} = \frac{-1 + i + 3}{2} = \frac{2+i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$$

Les segments $[AC]$et $[BD]$ ont le même milieu

c) Puisque Les segments $[AC]$et $[BD]$ ont le même milieu donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

d) $|z-3| = |z+1-i| \Rightarrow \; |z_M - Z_D| = |z_M - Z_B|$

$$\Rightarrow \; DM = BM$$

L'ensemble des points est la médiatrice du $[BD]$

Exercice 3

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

1a) $U_1 = \frac{3}{2}, U_2 = \frac{7}{6}, U_3 = \frac{13}{12}$

b)

$$U_3 - U_2 = \frac{13}{12} - \frac{7}{6} = \frac{13}{12} - \frac{14}{12} = \frac{-1}{12}$$

$$U_2 - U_1 = \frac{7}{6} - \frac{3}{2} = \frac{14}{12} - \frac{18}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$U_3 - U_2 \neq U_2 - U_1 \Rightarrow (U_n)$ **n'est pas une suite arithmétique**

$$\frac{U_3}{U_2} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{7}{6}} = \frac{13\times 6}{12\times 7} = \frac{13}{14}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{7\times 2}{6\times 3} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{U_3}{U_2} \neq \frac{U_2}{U_1}$$

$\Rightarrow (U_n)$ **n'est pas une suite arithmétique**

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2+n}\right) = 1 \Rightarrow (U_n)$**est convergente**

2) a)

$$U_n = \frac{n^2+n+1}{n^2+n}$$

$$v_n = \frac{n^2-1}{n}$$

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n^2+2n}{n+1} - \frac{n^2-1}{n}$$

$$= \frac{n(n^2+2n) - (n^2-1)(n+1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2-(n^3+n^2-n-1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2-n^3-n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} - v_n = U_n$$

$$U_n = v_{n+1} - v_n$$

b) on effectue n relations

$$\begin{cases} U_1 = V_2 - V_1 \\ U_2 = V_3 - V_2 \\ U_3 = V_4 - V_3 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ U_n = V_{n+1} - V_n \end{cases}$$

$$S_n = V_{n+1} - V_1$$

$$S_n = \frac{n^2 + 2n}{n+1}$$

3) $w_n = \ln V_n$

$s'_n = W_2 + W_3 + \cdots + W_n$

$\quad = \ln V_2 + lnV_3 + lnV_4 + \cdots + lnv_n$

$s'_n = ln(V_2 \times V_3 \times V_4 \times \ldots \times V_n)$

On a:

$$V_n = \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{(n-1)(n+1)}{n}$$

$$V_2 = \frac{1 \times 3}{2}$$

$$V_3 = \frac{2 \times 4}{3}$$

$$V_4 = \frac{3 \times 5}{4}$$

$$V_5 = \frac{4 \times 6}{5}$$

$$V_6 = \frac{5 \times 7}{6}$$

$$V_7 = \frac{6 \times 8}{7}$$

.

.

.

$$v_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n}$$

$$s'_n = ln\left(\frac{1 \times 3}{2} \times \frac{2 \times 4}{3} \times \frac{3 \times 5}{4} \times \frac{4 \times 6}{5} \times \frac{5 \times 7}{6} \times \frac{6 \times 8}{7} \times \ \ldots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n}\right)$$

$$s'_n = ln\left(\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots . \times n(n+1)}{2n}\right)$$

$$s'_n = \ ln\left(\frac{(n+1)!}{2n}\right)$$

Exercice 4

$f(x) = x + 2 + e^x$

1a) $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \ = \lim_{x \to -\infty} x + 2 + e^x = -\infty + 2 - 0 = -\infty$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + 2 + e^{x} = +\infty + 2 + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+2)) = \lim\limits_{x \to -\infty} x + 2 + e^{x} - x - 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+2)) = 0$ $\Rightarrow$ **La courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 2$ au voisinage de $-\infty$**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2+e^{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{e^{x}}{x} = +\infty$ $\Rightarrow$ **La courbe (C) admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de $+\infty$.**

2) $f'(x) = 1 + e^{x} > 0$

TV de f

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $J = \mathbb{R}$ donc f réalise une bijection.

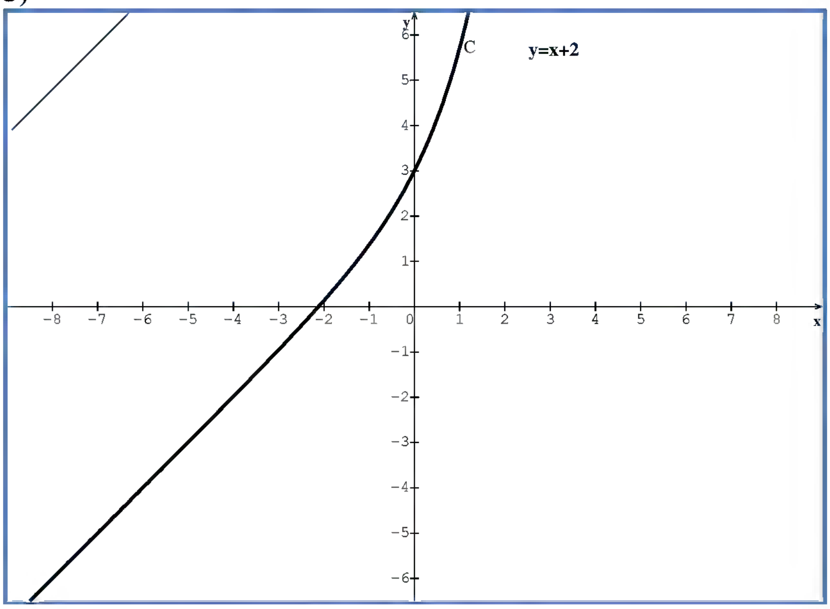
4) f réalise une bijection et change de signe une seule fois donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α tel que f $(\alpha) = 0$

$f(-2,5) \cong -0,4 < 0$

$f(-2) \cong 0,1 > 0$

$f(-2) \times f(-2,5) < 0 \Rightarrow -2,5 < \alpha < -2$

5)



6a) $f(x) = x + 2 + e^{x}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + e^{x} + c$

$F(0) = 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$

$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + e^{x} - 1$

b) $A(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{0} = F(0) - F(\alpha) = -F(\alpha)$

$A(\alpha) = -F(\alpha)$

$A(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - e^{\alpha} + 1$

D'après l'équation f $(\alpha) = 0$ on a $\alpha + 2 + e^{\alpha} = 0 \Rightarrow$

$$e^{\alpha} = -\alpha - 2$$

En remplaçant e^{α} **par** $-\alpha - 2$ **on obtient :**

$A(\alpha) \quad = -\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - e^{\alpha} + 1$

$= -\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha - (-\alpha - 2) + 1$

$= -\frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha + \alpha + 2 + 1$

$= -\frac{\alpha^2}{2} - \alpha + 3$

$$A(\alpha) = \frac{6 - 2\alpha - \alpha^2}{2}$$

7a) $f'(\alpha) = e^{\alpha} + 1$

$\quad = -\alpha - 2 + 1$

$f'(\alpha) = -\alpha - 1$

$f'(\alpha) = -(\alpha + 1)$

$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

$y = -(\alpha + 1)(x - \alpha)$

$y = -(\alpha + 1)x + \alpha(\alpha + 1)$

b) $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}$

$= \frac{1}{f'(\alpha)}$

$= \frac{1}{-(\alpha+1)}$

$(f^{-1})'(0) = -\frac{1}{\alpha+1}$

8) $g(x) = \ln(f(x))$

a) g est définie ssi $x + 2 + e^x > 0$

$\Rightarrow$ **g est définie ssi** $f(x) > 0$

et f est strictement positif sur$]\alpha, +\infty[$ **d'où** $D_g =]\alpha, +\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to\alpha^+} g(x) = \lim\limits_{x\to\alpha^+} \ln f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln f(x) = +\infty$

$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} > 0$ **g est strictement croissante sur**$]\alpha, +\infty[$

TV de g

x	α		+∞
g'(x)		+	
g(x)	−∞	↗	+∞

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2+e^x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1\right)\right)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln e^x}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}+1\right)}{x} = 1$ **On a** $\left(\ln e^x = x \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{et } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$

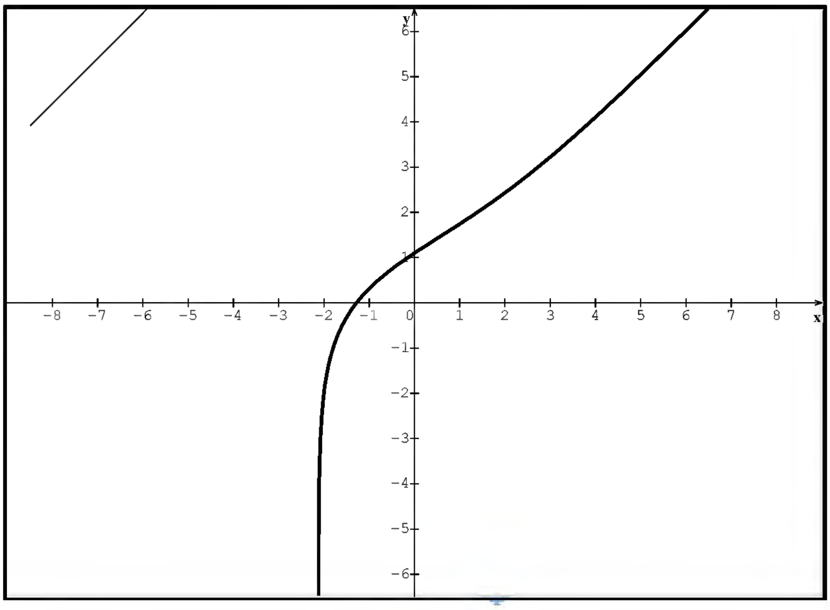
$\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x + 2 + e^x) - x)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x + 2 + e^x) - \ln e^x)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+2+e^x}{e^x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} + 1\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = 0 \Rightarrow$ **La courbe(Γ) de g admet une asymptote oblique d'équation** $y = x$



RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2010 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	(U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $U_5=17$ alors :	$U_{10}=34$	$U_{10}=32$	$U_{10}=85$
2	(U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 10$ et de premier terme $U_0=\frac{11}{2}$ si $U_0+U_1+\cdots.+U_n=2010$ alors :	$n = 19$	$n = 20$	$n = 21$
3	Si $S_n = 1+2+2^2+\cdots.+2^n$ alors :	$s_n = 1-2^n$	$s_n=2^{n+1}-1$	$s_n = 2^n-1$
4	La suite de terme général $U_n=\frac{(-1)^n}{(-1)^n+n^2}$	Converge vers 1	Ne converge pas	Converge vers 0
5	La suite de terme général $U_n=\frac{10^n}{n!}$	Croissante	Décroissante	Non monotone
6	Sooient (U_n) et (U_n) deux suite numériques telles que $U_n \leq v_n$.Si (U_n) est croissante	(U_n) est bornée	(V_n) est bornée	(V_n) est divergente

Recopie sur la feuille et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (4 points)

1 .Résoudre dans C l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2-4z+13=0$ et soient $z_1$et z_2 ses solutions telles que $I_m(z_1)>0$.
2 .On considère dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives :
$z_A=1+z_1$ et $z_B=i+z_2$
a) Écrire les nombres z_A et $z_B$sous forme algébrique et trigonométrique
b) Représenter dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les points A et B. Déterminer la nature du triangle OAB.
c) Déterminer et placer le point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme.
d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan d'affixe z tel que le complexe $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}$ soit imaginaire.

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm .
1a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$

$f'(x)$ f'

Dresser le tableau de variation de f

Dresser le tableau de variation de ln :$(x \to lnx)$

b) Tracer les courbes (C) et Γ représentative de f et ln dans le repère($O;\vec{\imath},\vec{\jmath}$**)**

4. Soit h la restriction de f sur $I =]1,+\infty[$

a)Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Soit C' la courbe de représentative de h^{-1} **dans le repère(** $O;\vec{\imath},\vec{\jmath}$**).Etudier la position de (C') avec sa tangente au point d'abscisse**$x_0 = 1$

c) Construire (C') repère($O;\vec{\imath},\vec{\jmath}$**)**

5a) Calculer$A = \int_1^e lnxdx$ **(on pourra utiliser une intégration par parties)**

b) En déduire l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisse et les droites d'équations respectives$x = 1$ et $x = e$

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction numérique f définie ℝ* par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$**. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j})$ **d'unité 1cm**

1a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b) En déduire que la courbe (C) possède trois asymptotes dont on donnera des équations

2a) Calculer la dérivée de la fonction f et vérifier que pour tout x non nul : $f'(x) = -\frac{f(x)}{e^x - 1}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3a) Montrer que la fonction g restriction de f sur $I =]0,+\infty[$ **réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.**

b) Déterminer l'expression de la réciproque g^{-1} **de g**

4a) Montrer que la courbe (C) possède le point $\Omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ **comme centre de symétrie**

b) Construire les courbes (C) et (C') représentatives des fonctions f et g^{-1} **dans le repère(** $O;\vec{i},\vec{j}$**)**

5a) Déterminer une primitive F de f sur $I =]0,+\infty[$

b) Soit n un entier naturel , $n \geq 1$**,**U_n **l'aire du domaine plan limité par la** courbe (C) , l'axe des **abscisses et les droites d'équations respectives** $x = \frac{1}{n}$ **et** $x = 1$ **calculer** U_n

c) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{n\to +\infty} U_n$

Fin

Corrigé baccalauréat 2010 session complémentaire

Exercice 1 :

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse exacte	B	A	B	C	C	A

Exercice 2 :

1° Résolution de : $z^2-4z+13=0$. $\Delta'=(-2)^2-1\times13=-9=(3i)^2$; $z_1=2+3i$ et $z_2=2-3i$.

2° a) $z_A=1+z_1=1+2+3i=3(1+i)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

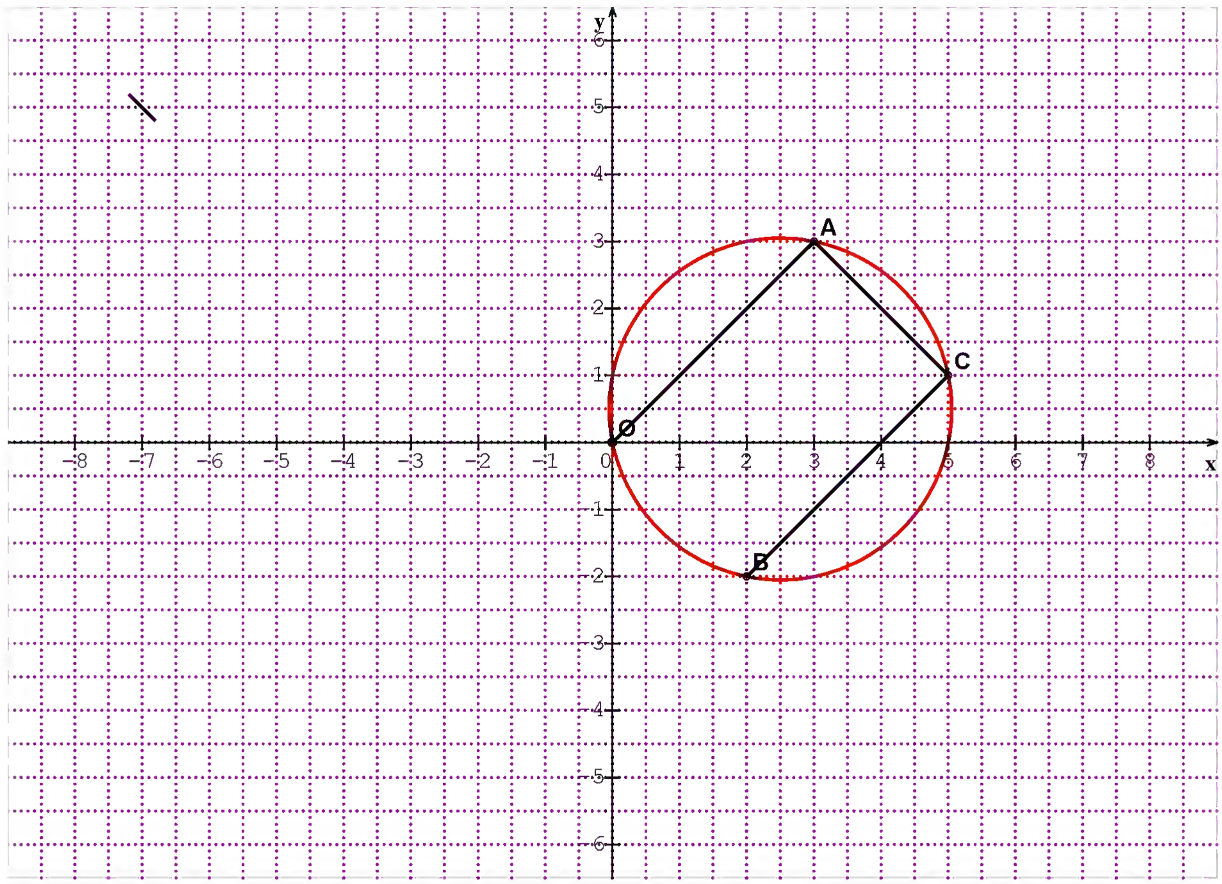
$z_B=i+z_2=i+2-3i=2(1-i)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b) .On remarque que : $\frac{z_A}{z_B}=\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}=\frac{3(1+i)}{2(1-i)}=\frac{3}{2}i$ donc $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle OAB est rectangle en O.

c) .Le quadrilatère $OACB$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow$ $z_C-z_A=z_B\Leftrightarrow z_C=z_A+z_B=3+3i+2-2i=5+i$

- $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}=\frac{z-z_B}{z-z_A}$ donc $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}\in(i\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{z-2+2i}{z-3-3i}=0\\ \text{ou}\\ \arg\frac{z-2+2i}{z-3-3i}=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}M=B\\ \text{ou}\\ \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\end{cases}$. L'ensemble est le cercle de diamètre $[AB]$, privé du point A.



Exercice 3 :

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

1° a) On a : $f(x)=\frac{1+x\ln x}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$. La droite d'équation : $x=0$ est une asymptote verticale.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Les courbes de f et de $\ln x$ sont voisines en $+\infty$, c'est-à-dire que la branche infinie de (C), en $+\infty$, est de direction (Ox).

2° a) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}$.

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$; $f(1)=1$

Le TV de f :

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$+\infty$ ↘	1	↗ 0

3° a)Le TV de f :

x	0	$+\infty$

1/x		+
Lnx		$-\infty \nearrow +\infty$

b) Représentation de (C)

3° a) La restriction h de f, à l'intervalle $[1;+\infty[$, est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur $]0;1]$.

b) Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $x=1$ donc verticale. La courbe (C') est à droite de cette tangente.

c) Pour le tracé de (C'), voir figure.

5° a) Soit $\int_1^e \ln x dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_1^e \ln x dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = e-[x]_1^e = e-e+1=1$.

b) L'aire demandée est $S=\int_1^e f(t)dt = \int_1^e \frac{1}{t}dt + \int_1^e \ln t dt = [\ln t]_1^e + 1 = 2$.

Exercice 4 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

1° a) Le signe de e^x-1 est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x}{e^x-1}="\dfrac{1}{0^-}"=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{e^x-1}="\dfrac{1}{0^+}"=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}="\dfrac{0}{-1}"=0$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1-e^{-x}}=1$

b) La courbe (C) possède trois asymptotes, à savoir : La droite d'équation : $x=0$ une asymptote verticale, les droites d'équations : $y=0$ et $y=1$ des asymptotes horizontales respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

.2° a) $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\times e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=-\dfrac{e^x}{e^x-1}\times\dfrac{1}{e^x-1}=-\dfrac{f(x)}{e^x-1}$.

b) Le TV de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

3° a) La restriction g de f, à l'intervalle $]0;+\infty[$, est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J=]1;+\infty[$.

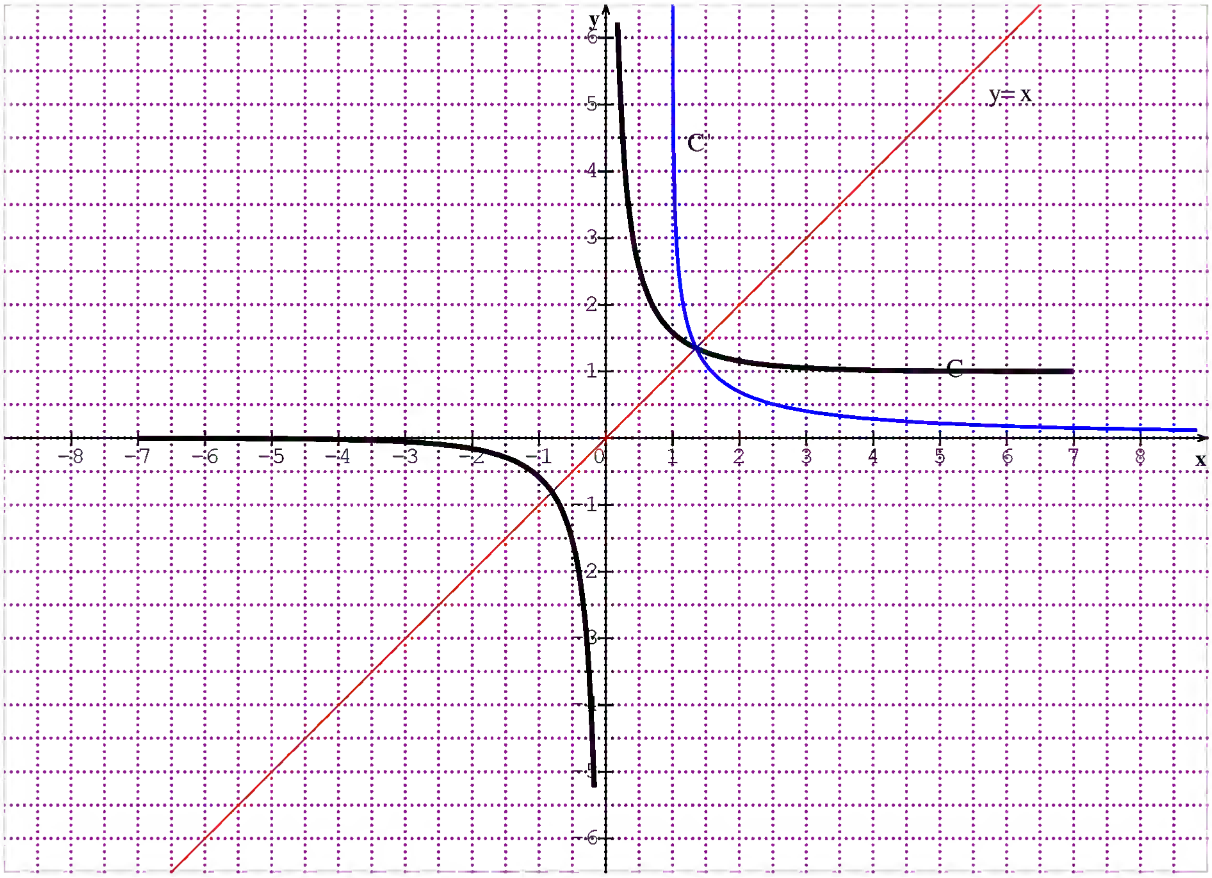
b) Soit $x\in J$ et $t\in I$ tels que $g(t)=x$ alors $g^{-1}(x)=t$.

$g(t)=\dfrac{e^t}{e^t-1}=x \Leftrightarrow xe^t-x=e^t \Leftrightarrow (x-1)e^t=x \Leftrightarrow e^t=\dfrac{x}{x-1} \Leftrightarrow t=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$. **L'expression de g^{-1} est :** $\forall x\in J,\ g^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

4° a) $\Omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ **est centre de symétrie si,** $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times\dfrac{1}{2}\quad (1)$.

$f(-x)+f(x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}-1}+\dfrac{e^x}{e^x-1}=-\dfrac{1}{e^x-1}+\dfrac{e^x}{e^x-1}=\dfrac{e^x-1}{e^x-1}=1$, **donc (1) est vérifié et par suite** $\Omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ **est un centre de symétrie de (C).**

b) Tracés :



5° a) Pour $x \in I$, f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x - 1$. Une primitive de f est : $F(x) = \ln(e^x - 1)$.

b) $U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = [F(x)]_{\frac{1}{n}}^{1} = F(1) - F\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(e-1) - \ln\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln\left(\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\right)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0^+$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}\right) = +\infty$. La limite de (U_n) est l'aire du domaine plan limité par (C), (Ox), (Oy) et la droite : $x = 1$.

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE — **Série : Sciences de la nature**
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE — **Épreuve : Mathématiques**
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION — **Durée : 4heures**
SERVICE DES EXAMENS — **Coefficient : 6**

Baccalauréat 2011 session Normale

Exercice 1 (3points)

Un groupe d'élèves est composé de 3 garçons et de 4filles. Les noms de ces sept élèves sont inscrits sur des jetons indiscernables au touché et placés dans une enveloppe.
A chaque cours de mathématiques, le professeur tire au hasard un jeton et interroge l'élève concerné .Durant une semaine, il y'a 6cours de mathématiques. On appelle X la variable aléatoire définie par « X est égale au nombre de fois où le professeur interroge une fille durant cette semaine». On considère les événements :
A : Le professeur interroge exactement cinq garçons.
B : Une fille au moins est interrogée durant la semaine.
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogé soit un garçon est :	$\frac{3}{7}$	C_7^3	A_7^3
2	La probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogée soit une fille est :	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{7}$
3	L'ensemble des valeurs de X est :	$\{0,1,2,\dots\dots,7\}$	$\{0,1,2,\dots.,6\}$	$\{0,1,2,3,4\}$
4	La probabilité de l'événement A est :	$\left(\frac{3}{7}\right)^5$	$C_6^5\left(\frac{3}{7}\right)^5\left(\frac{4}{7}\right)$	$\left(\frac{4}{7}\right)^5\left(\frac{3}{7}\right)$
5	La probabilité de l'événement B est :	$1-\left(\frac{3}{7}\right)^6$	$1-\left(\frac{4}{7}\right)^5$	$\frac{4}{7}$
6	Le nombre de filles interrogées durant la semaine, que l'on peut espérer est :	2	*3*	*4*

Recopie sur la feuille et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice (5points)

1. On pose $(z)=z^3-5z^2+12z-8$.
a) Calculer $p(1)$
b) Déterminer a et b tels que : tels que pour tout z on a $p(z)=(z-1)(z^2+az+b)$
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $p(z)=0$
2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$
Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1=1$, $z_2=2+2i$ **et** $z_3=2-2i$
a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1 , z_2 **et** z_3
b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$
3a) Écrire le nombre $\frac{z_2}{z_3}$ **sous forme algébrique .En déduire la nature du triangle OBC.**
b) Déterminer et représenter l'ensemble $\mathbb{\Gamma}$ des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right|=1$

Exercice (5points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = (x+2)e^x$

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i},\vec{j}$) unité 1cm.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

2. Calculer $f'(x)$et dresser le tableau de variation de f.

3. Déterminer les points d'intersections de C avec l'axe des coordonnées puis construire (C) dans le repère (O ;$\vec{i},\vec{j}$).

4a) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = f(x) + e^x$.

En déduire une primitive de f sur □

b) Calculer l'aire S du domaine plan délimité par la courbe (C) et les axes des coordonnées.

5. On définit une suite numérique (U_n)par son terme général : $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$;$n \geq 1$

a) CalculerU_1 et U_2 .

Montrer que (U_n) est décroissante (on pourra utiliser les variations de f).

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 4 (7points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :$f(x) = x - 1 + \frac{1+\ln x}{x}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i},\vec{j}$) unité 1cm.

1a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Montrer que la droite Δd'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C).

c) Étudier la position relative de (C) et Δ

2) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$:$g(x) = x^2 - \ln x$

a)vérifier que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\ln 2}{2}$

b) Calculer $g'(x)$

c) Étudier les variations de g et montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$:$g(x) > 0$

3a) Calculer $f'(x)$et vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$on a :$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

4a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.vérifier que$\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$.

5a) Préciser les points de la courbe (C) en lesquels la tangente (T) est parallèle àΔ.

b) Représenter la courbe (C) et les droites Δ et (T) dans (O ;$\vec{i},\vec{j}$).

c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation $(m+1)x - 1 - \ln x = 0$

6) Soit n un entier naturel, $n \geq 1$ .On note U_n l'aire du domaine plan délimitée par la courbe (C) l'asymptote oblique Δ et les droites d'équations respectives $x = n$ et $x = n + 1$

a) ExprimerU_n en fonction de n

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Corrigé baccalauréat 2011 session Normale

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	C	B	B	A	B

Exercice 2

$P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8.$

1 a) $p(1) = 1 - 5 + 12 - 8$

$= 13 - 13$

$p(1) = 0$

b) $p(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$

$= z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b$

$= z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$

$$\begin{cases} a - 1 = -5 \Rightarrow a = -4 \\ b - a = 12 \\ -b = -8 \Rightarrow b = 8 \end{cases}$$

$p(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 8)$

c) $p(z) = 0 \Rightarrow (z-1)(z^2 - 4z + 8) = 0$

$\Rightarrow z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$

Ou $z^2 - 4z + 8 = 0$

$\Delta = 16 - 32 = -16 = 16i^2$

$z_2 = \dfrac{4+4i}{2} = 2 + 2i$

$z_3 = \dfrac{4-4i}{2} = 2 - 2i$

$S = \{1, 2+2i, 2-2i\}$

2 a) $z_1 = z_A = 1$

$z_2 = z_B = 2 + 2i$

$z_3 = z_C = 2 - 2i$

$|z_1| = 1$, $\arg z_1 = arg 1 = 0[2\pi]$

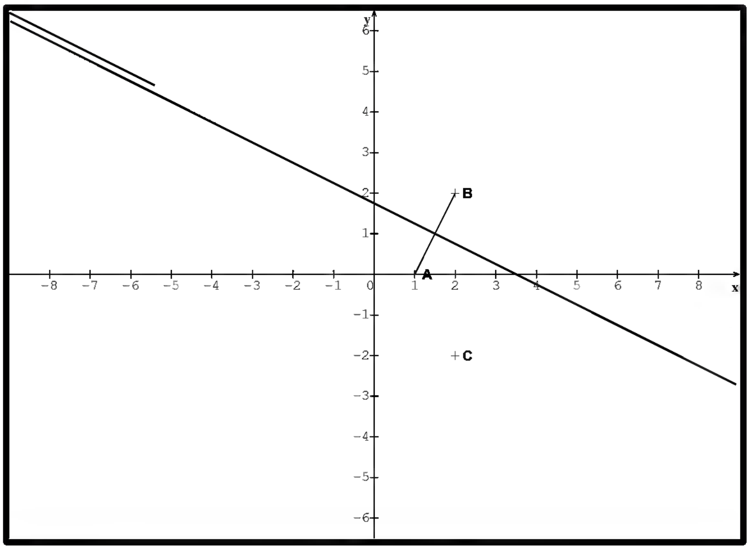
$|z_2| = |2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg z_2 = arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}$

$|z_3| = |2-2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg z_3 = arg(2-2i) = -\frac{\pi}{4}$

b)



3a) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{2+2i}{2-2i}$

$\frac{z_2}{z_3} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$= \frac{1+i+i-1}{2}$

$= \frac{2i}{2}$

$\frac{z_2}{z_3} = i \Rightarrow \left|\frac{z_2}{z_3}\right| = |i| = 1$

$\frac{z_2}{z_3} = i \Rightarrow$ **Arg**$\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = arg\,i = \frac{\pi}{2}$

$\left|\frac{z_2}{z_3}\right| = \left|\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}\right| = \frac{OB}{OC} = 1 \Rightarrow$ **OB=OC**

arg$\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = arg\,i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$

donc le triangle OBC est isocèle rectangle en O

b) $\left|\frac{z-1}{z-2-2i}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{Z_M - z_A}{Z_M - z_B}\right| = 1$

$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = 1$

$\Rightarrow$ **AM = BM**

Γ est la médiatrice du$[AB]$

Exercice 3

$f(x) = (x+2)e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

1 – $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^x + 2e^x) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ **est une asymptote horizontale au voisinage de -∞**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+2)e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+2)}{x} \times e^x = +\infty$

La courbe (C) admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de +∞

2) $f'(x) = e^x + e^x(x+2)$

$= e^x(1 + x + 2)$

$f'(x) = (x+3)e^x$

$e^x > 0 \Rightarrow$ Le signe de $f'(x)$ est celui de $x+3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$

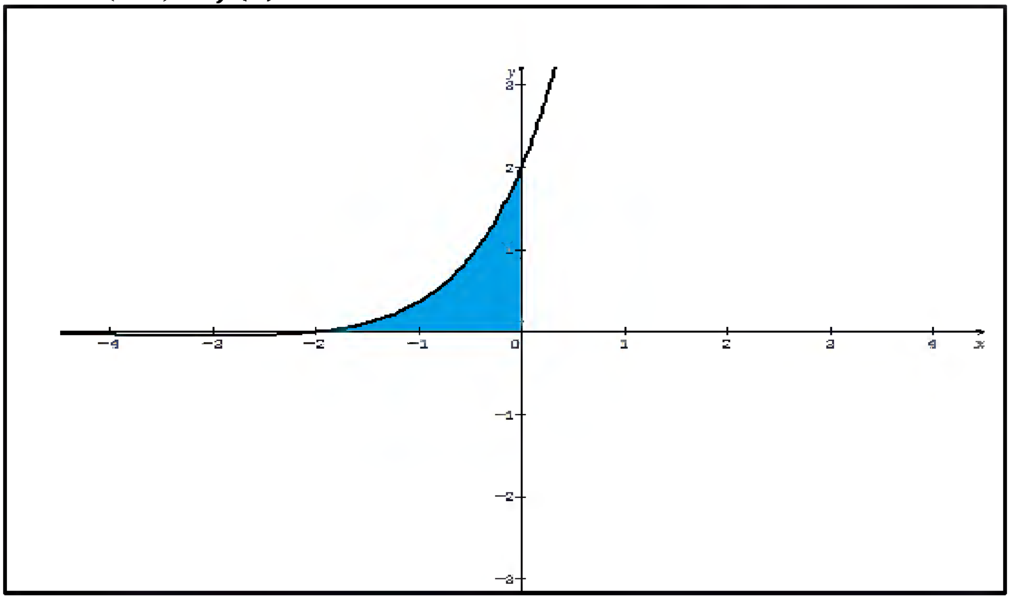
TV de f

$f(-3) = -e^{-3}$

3- Intersection avec les axes

avec (OY) $\Rightarrow f(0) = 2$

avec (OX) $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x = -2$



4-a) $f'(x) = e^x + e^x(x+2)$

$f'(x) = e^x + f(x)$

$\Rightarrow f(x) = e^x + F(x)$

$\Rightarrow F(x) = f(x) - e^x$

$F(x) = e^x(x+2) - e^x$

$= (x+2-1)e^x$

$F(x) = (x+1)e^x$

b) $S = \int_{-2}^{0} f(x)dx \times u.a$

$S = [F(x)]_{-2}^{0} \times cm^2$

$S = F(0) - F(-2)$

$S = (1 + e^{-2})cm^2$

5 a) $U_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$; $n \geq 1$

$U_1 = f(1) = 3e$

$U_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{e}$

sur $[0, +\infty[$ f est croissante

$n \geq 1$, on sait que : $n+1 > n \Rightarrow$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{1}{n+1}\right) < f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$

$\Rightarrow (U_n)$ **est décroissante**

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) = 2$

Exercice 4

$$f(x) = x - 1 + \frac{1 + lnx}{x}$$

1a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x - 1 + \frac{1+lnx}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} x - 1 + \frac{1}{x}(1 + lnx)$

$= 0 - 1 + (+\infty)(1 - \infty)$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ **est une asymptote verticale**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{lnx}{x} = +\infty$ **puisque** $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0 \end{cases}$

Démontrons que la droite Δ **d'équation** $y = x - 1$ **est une asymptote oblique au voisinage de** $+\infty$

$$f(x) - y = x - 1 + \frac{1 + lnx}{x} - x + 1$$

$$f(x) - y = \frac{1 + lnx}{x}$$

$$f(x) - y = \frac{1 + lnx}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{lnx}{x}\right) = 0 \Rightarrow$ **Que la droite** Δ**d'équation** $y = x - 1$ **est une asymptote oblique au voisinage de** $+\infty$

c) $f(x) - y = 0 \Rightarrow 1 + lnx = 0$

$\Rightarrow lnx = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1}$

X	0		e^{-1}		$+\infty$
f(x)-y		-	0	+	
Position relative		Δ / C		C / Δ	

2) $g(x) = x^2 - lnx$

a)

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$= \frac{1}{2} + ln\sqrt{2}$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ln2$

b) $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

c) $x > 0$ **Le signe de** $g'(x)$ **est celui du numérateur**

$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **Ou** $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)		$\searrow$	$\frac{1+\ln 2}{2}$	$\nearrow$	

g admet un minimum positif donc g est positif

3a)

$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - (1 + lnx)}{x^2}$

$f'(x) = 1 + \frac{1 - 1 - lnx}{x^2}$

$f'(x) = 1 - \frac{lnx}{x^2}$

$f'(x) = \frac{x^2 - lnx}{x^2}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x} > 0$

b) $TV\ de\ f$

x	0		$+\infty$
f '(x)		+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4a) f est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ **vers J=** $]-\infty, +\infty[$ **donc f réalise une bijection**

b) f est bijective de$]0, +\infty[$ **vers J et** $0 \in J$ **donc l'équation** $f(x) = 0$ **admet une unique solution** α

$f\left(\frac{1}{e}\right) \cong -0,63 < 0$ **et** $f\left(\frac{1}{2}\right) \cong 0,11 > 0$

$f\left(\frac{1}{e}\right) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$

$5a)$ (T) **est parallèle à D** $\Leftrightarrow f'(x) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - lnx}{x^2} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - lnx = x^2$

$$\Leftrightarrow lnx = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

La tangente **est parallèle à D en** $x_0 = 1$

c) $(m+1)x - 1 - lnx = 0$

$\Rightarrow mx + x - 1 - lnx = 0$

$\Rightarrow mx = -x+1+ln$

$\Rightarrow m = \frac{-x+1+lnx}{x}$

$\Rightarrow m = -1 + \frac{1+lnx}{x}$

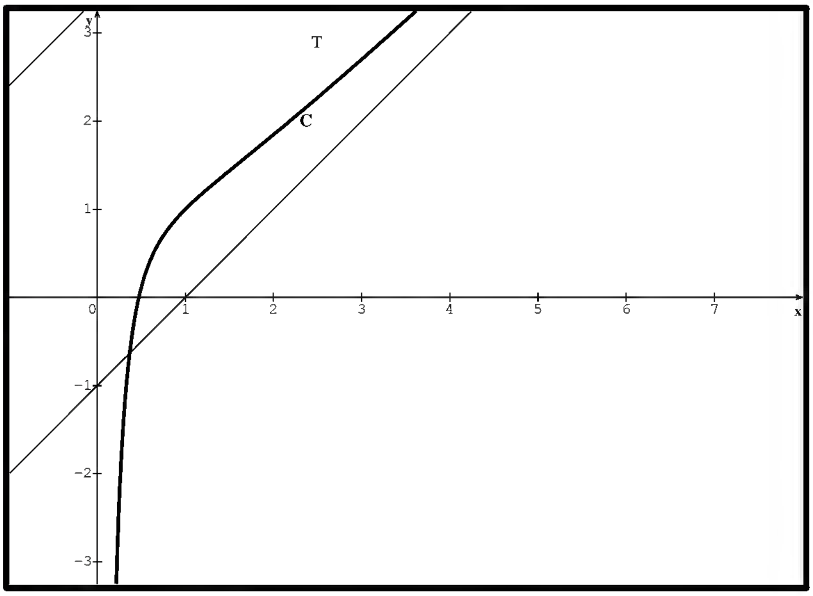
$\Rightarrow x + m = x - 1 + \frac{1+lnx}{x}$

$\Rightarrow f(x) = x + m$

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + m$ **sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe C de** f **et la droite(** D_m **) d'équation y = x + m**

$$\begin{cases} Si\ m \in]-\infty, -1] & l'\text{é}quation\ admet\ une\ seule\ solution \\ si\ m \in]-1, 0[& l'\text{é}quation\ admet\ 2solutions \\ si\ m = 0 & l'\text{é}quation\ admet\ 1solution \\ Si\ m \in]0, +\infty[& l'\text{é}quation\ n'admet\ aucunesolution \end{cases}$$

b)



6 a) sur $]1, +\infty[$**la courbe C est situé en dessus de l'asymptote oblique**

$U_n = \int_n^{n+1} (f(x) - y)dx$

$= \int_n^{n+} \frac{1}{x} \times (1 + lnx)dx$

$= \left[\frac{(1+lnx)^2}{2}\right]_n^{n+1}$

$$= \frac{(1+ln(n+1))^2}{2} - \frac{(1+lnn)^2}{2}$$

$$= \frac{(1+ln(n+1)-1-lnn)(1+ln(n+1)+1+lnn)}{2}$$

$$= \frac{(ln(n+1)-lnn)(2+ln(n+1)+lnn)}{2}$$

$$U_n = \frac{ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(2+ln(n^2+n))}{2}$$

$$\boxed{U_n = \frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(2+ln(n^2+n))}{2}}$$

$$b)\ U_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \times \frac{2+ln(n^2+n)}{n}\right)$$

$$U_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \times \frac{2+ln(n^2+n)}{n}\right)$$

$$U_n = \frac{1}{2} \times \left(\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}\right) \times \left(\frac{2}{n} + \frac{lnn}{n} + \frac{ln(n+1)}{n}\right)\right)$$

On pose $X = \frac{1}{n}$ **si** $n \to +\infty \Rightarrow$ **X→ 0**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{ln\,n}{n} = 0;\ \lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n+1)}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \Rightarrow = \frac{1}{2} \times \left(\left(\frac{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{2}{n} + \frac{lnn}{n} + \frac{ln(n+1)}{n}\right)\right) = 0$$

Si n→ +∞ cette aire est nulle parceque la courbe C coincide avec l'asymptote oblique Δ

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2011 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte

1) Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x, réel $f(4-x)+f(x)=8$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$, soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé .

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La courbe (C) admet	Un centre de symétrie $\Omega(-2,4)$	Un centre de symétrie $\Omega(2,4)$	Un axe de symétrie d'équation x=2
2	La courbe (C) admet une asymptote d'équation	$x=5$	$Y=5$	*Y=5x*
3	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ égale	-5	*3*	-∞
4	Si f est strictement croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$,alors elle est	Croissante sur $\mathbb{R}$	Décroissante sur$]-\infty,2]$	Non monotone sur $\mathbb{R}$

2)Une usine produit des bouteilles de 75 cl d'eau minérale . Soit X la variable aléatoire ayant pour valeurs les quantités possibles d'eau dans une bouteille expérimentée en centilitre. On note p_i la probabilité que la quantité d'eau dans une bouteille soit x_i centilitres. On donne le tableau suivant :

x_i	74,8	74,9	75	75,1	75,2
p_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Si on choisit au hasard une bouteuille ,la probabilité qu'elle soit au moins 75 cl est :	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{4}$
2	L'espérance mathématique de la variable X est étale à	$75,001$	75	*74,99*

Recopie sur la feuille et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on pose $f(z)=z^2-2z$

1a) Calculer $f(a)$ et $f(b)$

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$,des équations $z^2 - 2z + 2 = 0$ et $z^2 - 2z + 4 = 0$

2. On pose $c = ab = (1+i)(1+i\sqrt{3})$

a) Écrire a et b sous forme trigonométrique et exponentielle.

b) Écrire a et b sous forme algébrique et exponentielle

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 3 (4 points)

On définit une suite (U_n) pour tout entier naturel non nul n par :$U_n = \frac{n^2}{2^n}$

1.a) Calculer les termes :U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5

b) Montrer que (U_n) est positive, non monotone et quelle est ni arithmétique, ni géométrique.

2.a)Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n})^2$

b) Prouver, pour tout entier naturel n≥ 5, on a : 0< $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$

3.a) Déterminer le sens de variation de la suite (U_n) à partir du rang 5

b) Que peut –on en déduire pour la suite ?

4.a) Montrer que pour tout naturel n≥ 5, on a : 0< $U_n < \frac{25}{32}(\frac{3}{4})^{n-5}$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

.Exercice 3 (9 points)

Soit fla fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 2x - 1 + \ln x$

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$d'unité 1cm

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement

2.a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

b) Démontrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera .

c) Dresser le tableau de variation de f^{-1} réciproque de f

3. Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α .Vérifier que $0{,}6 < \alpha < 0{,}7$

4a) Préciser les points de (C) en lequel s la tangente est parallèle à la droite d'équation y=3x

b) construire la courbe (C) .

5a) En utilisant une intégration par parties , calculer $\int_\alpha^1 \ln t\,dt$

b) En déduire, en fonction de α , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 1$

6.On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x - 1 + 2e^x$. Soit Γ sa courbe représentative dans le repère

a) En utilisant le tableau de variation de f, dresser le tableau de variation de g.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} (g(x) - (x-1))$ et interpréter graphiquement.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

d) Déterminer en fonction de α l'abscisse du point d'intersection de la courbe Γ de g avec l'axe des abscisses

e) Construire Γ

Fin

Corrigé baccalauréat 2011session Complémentaire

Exercice 1 :

N°	1	2	3	4	5	6
Réponse exacte	B	A	B	C	C	A

Exercice 2 :

1° a) On a ; $f(z)=z^2-2z$; $f(a)=(1+i)^2-2(1+i)=2i-2-2i=-2$.

$f(b)=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-2\left(1+i\sqrt{3}\right)=1+2i\sqrt{3}-3-2-2i\sqrt{3}=-4$

b) On a : $z^2-2z+2=0 \Leftrightarrow f(z)=z^2-2z=-2=f(a)$. Les solutions sont donc $a=1+i$ et $\bar{a}=1-i$. On a : $z^2-2z+4=0 \Leftrightarrow f(z)=z^2-2z=-4=f(b)$. Les solutions sont donc $b=1+i\sqrt{3}$ et $\bar{b}=1-i\sqrt{3}$.

2° $a=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

$b=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

4° $c=(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)=a\times b$

a) $c=(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)=1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}=1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

b) On a $|c|=|a|\times|b|=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$; $\arg c=\arg a+\arg b=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$. Alors : $c=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

c) Par identification des deux écritures de c on trouve :

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12}=1-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}=1+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 3

1a) $U_n=\frac{n^2}{2^n}$

$U_2=\frac{2^2}{2^2}=1$

$U_3=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$

$$U_4 = \frac{4^2}{2^4} = \frac{16}{16} = 1$$

$$U_5 = \frac{5^2}{2^5} = \frac{25}{32}$$

b) $\begin{cases} n^2 > 0 \\ 2^n > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{n^2}{2^n} > 0 \Rightarrow U_n > 0$

$U_2 < U_3 > U_4 > U_5 \Rightarrow (U_n)$ **n'est pas monotone**

$$(U_3)^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64}$$

$$u_2 \times u_4 = 1 \times 1 = 1$$

$\begin{cases} (U_3)^2 = \frac{81}{64} \\ u_2 \times u_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(U_3)^2 \neq u_2 \times u_4}$

$\Rightarrow (u_n)$ **n'est pas une suite géométrique**

$$u_2 + u_4 = 1 + 1 = 2$$

$$2 \times U_3 = 2 \times \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$$

$\begin{cases} u_2 + u_4 = 2 \\ 2 \times U_3 = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_2 + u_4 \neq 2 \times U_3}$

$\Rightarrow (u_n)$ **n'est pas une suite arithmétique**

2a)

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2 \times 2^n} \times \frac{2^n}{n^2}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

b) $n \geq 5 \Rightarrow$

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow$

$1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{5} \Rightarrow$

$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{6}{5} \Rightarrow$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{36}{25} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \times \frac{36}{25} \Rightarrow$

$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2} \times \frac{36}{25} \Rightarrow$

$$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{18}{25} < \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{3}{4}}$$

3a) on

$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$

$0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Rightarrow U_{n+1} < U_n$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$

$\Rightarrow$ **(U_n) est décroissante à partir du rang 5**

b) (U_n) est décroissante à partir du rang 5 et minorée par zéro donc elle est convergente

4a) $0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < \frac{3}{4}$

$\Rightarrow U_{n+1} < \frac{3}{4} U_n$

On effectue (n-5) relations à partir de $n = 5$

$$\begin{cases} U_6 < \frac{3}{4} U_5 \\ U_7 < \frac{3}{4} U_6 \\ \quad \vdots \\ U_n < \frac{3}{4} U_{n-1} \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 < U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} U_5$

$\Rightarrow \boxed{0 < U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times \frac{25}{32}}$

b) $0 < U_n < \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times \frac{25}{32}$

$\Rightarrow 0 < \lim\limits_{n \to +\infty} U_n < \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times \frac{25}{32}$

$\Rightarrow 0 < \lim\limits_{n \to +\infty} U_n < 0$

D'après le théorème du gendarme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Exercice 4 :

f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=2x-1+\ln x$

1° On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale de la courbe (C). On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-1+\ln x)=+\infty$. La branche infinie de (C), en $+\infty$, a une direction parallèle à celle de la droite d'équation $y=2x$.

2° a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=2+\frac{1}{x}>0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

b) f est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J=\mathbb{R}$.

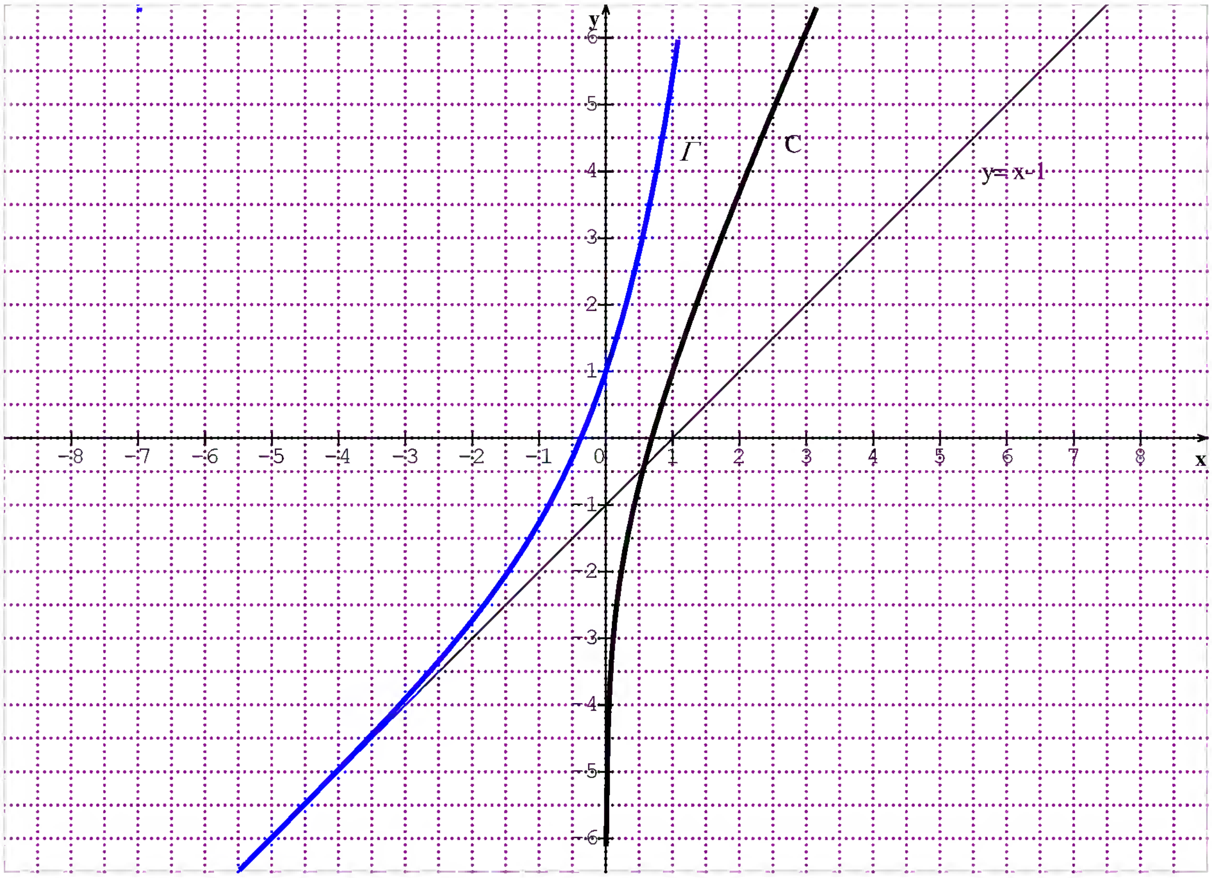
Le TV de f^{-1}

x	$-\infty$	$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$	$+$	
$f^{-1}(x)$	$0 \nearrow +\infty$	

c) f étant une bijection de $]0;+\infty[$ sur $J=\mathbb{R}$ et $0\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α. On a : $f(0{,}6)\times f(0{,}7)<0$ donc $0{,}6<\alpha<0{,}7$.

4° a) Une tangente est parallèle à la droite d'équation $y=3x$ si et seulement s'il existe $x\in]0;+\infty[$ tel que : $f'(x)=3$. $f'(x)=3 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x=1$. Il existe un seul point en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=3x$, c'est le point d'abscisse 1.

b) Tracé de (C) et Γ.



5° a) Soit $\int_\alpha^1 \ln x dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_\alpha^1 \ln x dx = [x\ln x]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 dx = -\alpha\ln\alpha - [x]_\alpha^1 = -\alpha\ln\alpha - 1 + \alpha$

b) L'aire demandée est $A = \int_\alpha^1 f(t)dt = \int_\alpha^1 (2t - 1 + \ln t)dt \Leftrightarrow$

$A = \left[t^2 - t\right]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 \ln t dt = -\alpha^2 + \alpha - \alpha\ln\alpha - 1 + \alpha = -\alpha^2 + 2\alpha - \alpha\ln\alpha - 1$ ua .

6° g la fonction définie sur ℝ par : $g(x) = x - 1 + 2e^x$

a) g est dérivable sur ℝ et $g'(x) = f'(x) \times e^x > 0$. D'autre part : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}=0$. La droite d'équation : $y=x-1$ est une asymptote oblique de la courbe Γ.

c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+2\frac{e^{x}}{x}\right)=+\infty$. La branche infinie de Γ, en $+\infty$, est de direction (Ox)

d) $g(x)=0\Leftrightarrow f\left(e^{x}\right)=0\Leftrightarrow e^{x}=\alpha\Leftrightarrow x=\ln\alpha$

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE — **Série : Sciences de la nature**
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE — **Épreuve : Mathématiques**
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION — **Durée : 4heures**
SERVICE DES EXAMENS — **Coefficient : 6**

Baccalauréat 2012 session Normale

Exercice (3points)

Pour éclairer une salle, on utilise deux lampes différentes.
On note F l'événement : « la première lampes est défaillante »
On note G l'événement : « la deuxième lampes est défaillante »
Des études ont montré que : P(F) =0,2 ; P(G)=0,3 ; P(F$\cap$ G) $=0,1$
Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

1) La probabilité de l'événement « les deux lampes sont défaillantes » est :

A : 0,1	B : 0,5	C : 0,6

2) La probabilité de l'événement « au moins une des deux lampes est défaillante » est :

A : 0,9	B : 0,4	C : 0,6

3) La probabilité de l'événement « les deux lampes fonctionnent » est :

A : 0,8	B : 0,6	C : 0,5

4) La probabilité de l'événement «exactement une des deux lampes est défaillante » est :

A : 0,3	B : 0,4	C : 0,6

5) Sachant que la deuxième est défaillante, la probabilité que la première lampe fonctionne est :

A : $\frac{1}{2}$	B : $\frac{2}{3}$	C : $\frac{1}{3}$

6) On définit une variable aléatoire X égale au nombre de lampes défaillante dans la salle. L'espérance mathématique de X est :

A : 0,8	B : 0,6	C : 0,5

Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2(4points)

1- a- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :
$z^2-4z+5=0$ **et soient** z_1 **et** z_2 **ses solutions telles que** $I_m(z_1)>0$
b-Écrire le nombre $z_3=i+z_1$ **sous forme trigonométrique**
2-Dans le plan complexe muni d'un repère (O ;$\vec{u},\vec{v}$**), on considère les points A et B d'affixes respectives** $z_A=z_1$ **et** $z_B=-1-i+z_2$
a- Placer les points A et B Déterminer la nature du triangle OAB
b-Déterminer l'affixe du point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme placer le point C
3- Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq 1-2i$ **on pose :** $f(z)=\frac{z-2-i}{z-1+2i}$

a- Écrire sous forme algébrique le nombre $w = f(3-i)$ interpréter graphiquement
b-Déterminer puis construire l'ensemble $\mathbb{\Gamma}_1$ des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$

c-Déterminer puis construire l'ensemble $\mathbb{\Gamma}_2$ des points M du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur

d-Déterminer puis construire l'ensemble $\mathbb{\Gamma}_3$ des points M du plan d'affixe z tels que $[f(z)-1] = \sqrt{10}$

Exercice 3 (6points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$
(C) la courbe représentative dans un repère (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$).
1a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (3x-1))$ interpréter graphiquement.
b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} - \infty$ interpréter graphiquement.
2a) Calculer la dérivée $f'(x)$ et étudier son signe.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β.
Vérifier que $-1,3 < \alpha < -1$ *et* $0,2 < \beta < 0,3$
b) Représenter la courbe (C)
4) On définit les suites (u_n)et (v_n) pour tout entier naturel n par : $u_n = e^{-2n-1}$ et $v_n = 3n - 1$
a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique décroissante.
b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique croissante.
c) Les suites (u_n)et (v_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.
5) Pour tout entier naturel n on pose :$S_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$
a) Calculer $S_n$en fonction de n
b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$

Exercice 4 (7points)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1} - ln(x+1)$
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$) unité 1cm.
1a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.
b) Montrer que $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$ interpréter graphiquement.
2a) Calculer $f'(x)$et vérifier que la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale dont on donnera une équation.
b) Dresser le tableau de variation de f.
3a) Calculer $f''(x)$ et vérifier que la courbe (C) admet un point d'inflexion A d'abscisse1.
b) Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A.
4a) Montrer que la restriction g de f sur I= $]0,+\infty[$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.
b) Dresser le tableau de variation deg^{-1}
c) Calculer$(g^{-1})'\left(\frac{3-2ln2}{2}\right)$
5a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β.
Vérifier que $-0,7 < \alpha < -0,6$ et$5,3 < \beta < 5,4$
b) Placer sur le repère (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$), les points d'intersections de la courbe (C) avec les axes, son point d'inflexion, les tangentes précédentes puis représenter la courbe (C).

c) Représenter la courbe (C') deg^{-1}.
6.a) Montrer que la fonction f admet des primitives sur$]-1,+\infty[$.
b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction $F(x) = ax - (x+b)ln(x+1)$ soit une primitive de f sur$]-1,+\infty[$.
c) Calculer, en fonction deβ, l'aire du domaine plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \beta$. Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} prés .

Corrigé baccalauréat 2012 session Normale

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	B	B	A	C

Exercice 2

1a) $z^2 - 4z + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$

$z_1 = \dfrac{4 + 2i}{2} = 2 + i$

$z_2 = \dfrac{4 - 2i}{2} = 2 - i$

b) $z_3 = i + z_1$

$= i + 2 + i$

$z_3 = 2 + 2i$

$|z_3| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$

arg $z_3 = arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}$

$z_3 = 2\sqrt{2}(cos\dfrac{\pi}{4} + isin\dfrac{\pi}{4})$

2) $z_A = z_1 = 2 + i$

$z_B = -1 - i + z_2$

$= -1 - i + 2 - i$

$Z_B = 1 - 2i$

a)$A(2, 1)$; $B(1, -2)$ **Voir la représentation graphique**

Démontrons que le triangle OAB est isocèle rectangle en O

On pose: K= $\frac{Z_A - Z_O}{Z_B - Z_O}$

$K = \dfrac{2 + i}{1 - 2i}$

$= \dfrac{(2 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)}$

$= \dfrac{2 + 4i + i - 2}{5}$

$= \dfrac{5i}{5}$

$K = i$

$$\begin{cases} |K| = 1 \Rightarrow \dfrac{OA}{OB} = 1 \\ argK = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{le triangle OAB est isocèle rectangle en 0} \end{cases}$$

b) Le quadrilatère OACB est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow z_C - z_B = z_A$

$\Leftrightarrow z_C = z_A + z_B$

$\Leftrightarrow z_C = 2 + i + 1 - 2i$

$\Leftrightarrow z_C = 3 - i$

3)

$f(z) = \dfrac{z - 2 - i}{z - 1 + 2i}$

a) $w = f(3 - i)$

$= \dfrac{3 - i - 2 - i}{3 - i - 1 + 2i}$

$= \dfrac{(1 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$

$= \dfrac{2 - i - 4i - 2}{5}$

$= \dfrac{-5i}{5}$

$w = -i$

$w = f(z_C) = f(3 - i)$

$= \dfrac{3 - i - 2 - i}{3 - i - 1 + 2i}$

$= \dfrac{3 - i - (2 + i)}{3 - i - (1 - 2i)}$

$w = \frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B}$

$\begin{cases} |w| = \frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B} = \frac{AC}{BC} \\ argw = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ **donc le triangle ABC est isocèle rectangle en C**

b) Γ_1 $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2-i}{z-1+2i}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{Z_M - Z_A}{Z_M - Z_B}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 1$

$\Leftrightarrow AM = BM$

Γ_1**est la médiatrice du** $[AB]$

c) Γ_2 **f(z) est imaginaire pur** $\Leftrightarrow \begin{cases} f(z) = 0 \\ arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \\ (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Γ_2 **est le cercle de diamètre** $[AB]$**privé du point B**

d) $[f(z) - 1] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$

$\left[\frac{z-2-i}{z-1+2i} - 1\right] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$

$\left[\frac{z-2-i-z+1-2i}{z-1+2i}\right] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$

$\left[\frac{-1-3i}{z-1+2i}\right] = \sqrt{10} \Leftrightarrow$

$\frac{\sqrt{10}}{|z-1+2i|} = \sqrt{10} \Leftrightarrow$

$\sqrt{10}|z - 1 + 2i| = \sqrt{10} \Leftrightarrow$

$|z - 1 + 2i| = 1 \Leftrightarrow$

$$|Z_M - Z_B| = 1 \Leftrightarrow$$

$$BM = 1$$

Γ_3 Le cercle de centre B et de rayon 1

Corrigé l'Exercice3

$f(x) = e^{-2x-1} + 3x - 1$

1a- $D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 = 0 - \infty - 1 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (3x - 1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 - 3x + 1$

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x-1} = 0$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (3x - 1)) = 0$

(C) admet une asymptote oblique d'équation $y = 3x - 1$au voisinage de $+\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x-1} + 3x - 1 = +\infty - \infty - 1\ F.I$

$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{e^{2x+1}} + 3x - 1\right)$$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\frac{1}{xe^{2x+1}} + 3 - \frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\frac{1}{xe^{2x}e} + 3 - \frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(2e^{-1} \times \frac{1}{2xe^{2x}} + 3 - \frac{1}{x}\right)$

On pose $t = 2x$ si $x \to -\infty ; t \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{t}{2}\left(2e^{-1} \times \frac{1}{te^t} + 3 - \frac{2}{t}\right)$ **On sait que** $\lim\limits_{x \to -\infty} te^t = 0^- \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{te^t} = -\infty$

$$= -\infty(-\infty + 3 - 0) = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x-1}+3x-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^{2x+1}} + 3 - \frac{1}{x}$

$= -\infty$

(C) admet une branche infinie de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$

2a)

$f'(x) = -2e^{-2x-1} + 3$

$= \frac{-2}{e^{2x+1}} + 3$

$f'(x) = \frac{3e^{2x+1}-2}{e^{2x+1}}$

$e^{2x+1} > 0 \Rightarrow$ **Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur**

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3e^{2x+1} - 2 = 0$

$\Rightarrow 3e^{2x+1} - 2 = 0$

$\Rightarrow 3e^{2x+1} = 2$

$\Rightarrow e^{2x+1} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow 2x + 1 = ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow 2x = -1 + ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$$x = \frac{-1 + ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2} \cong -0,7$$

Signe de $f'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{-1+\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}$		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	

b) TV de f

$$f\left(\frac{-1 + ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right) = e^{-2\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right)-1} + 3 \times \frac{-1 + ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2} - 1$$

$$= e^{1-ln\left(\frac{2}{3}\right)-1} + \frac{-3 + 3ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2} - 1$$

$$= e^{-ln\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{-3 + 3ln\left(\frac{2}{3}\right) - 2}{2}$$

$= e^{ln\left(\frac{3}{2}\right)} + \dfrac{-5+3ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}$

$= \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}ln(\frac{2}{3})$

$f\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right) = -1 + \frac{3}{2}ln(\frac{2}{3})$

$f\left(\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right) \approx 1,6$

3a) f **est continue et décroissante de** $\left]-\infty, \frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}\right]$ **vers** $\left[-1 + \frac{3}{2}ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$ **et** f **change de signe une seule fois donc il existe un unique réel** $\alpha \in]0;1[$ **tel que** $f(\alpha) = 0$

$f(-1,3) > 0$,$f(-1,2) < 0 \Rightarrow f(-1,3) \times f(-1,2) < 0$

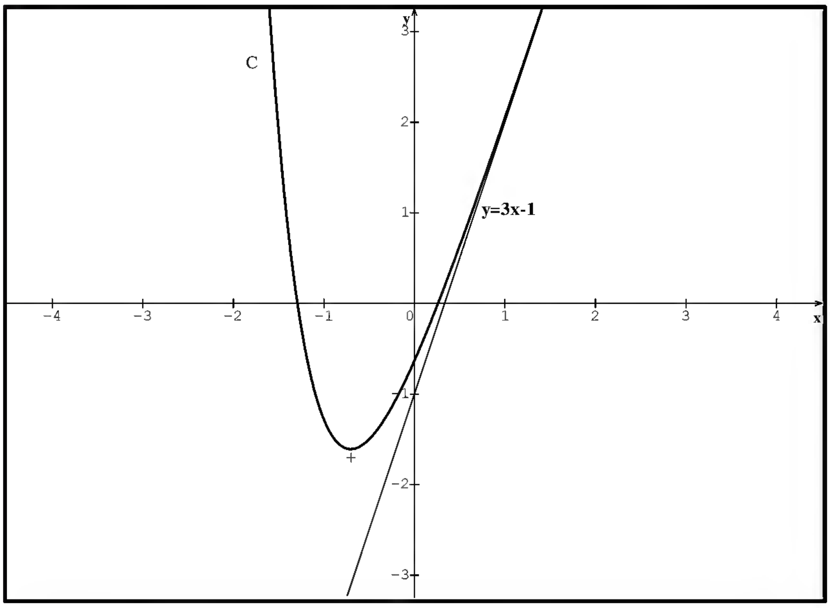
$\Rightarrow -1,3 < \alpha < -1,2$

f **est continue et croissante de** $\left[\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}; +\infty\right[$ **vers** $\left[-1 + \frac{3}{2}ln\left(\frac{2}{3}\right), +\infty\right[$ **et** f **change de signe une seule fois donc il existe un unique réel** $\beta \in \left[\frac{-1+ln\left(\frac{2}{3}\right)}{2}; +\infty\right[$ **tel que** $f(\beta) = 0$

$f(0,3) > 0$,$f(0,2) < 0 \Rightarrow f(0,3) \times f(0,2) < 0$

$\Rightarrow 0,2 < \beta < 0,3$

b)



4) $u_n = e^{-2n-1}$

a) $u_{n+1} = e^{-2(n+1)-1}$

$= e^{-2n-2-1}$

$= e^{-2} \times e^{-2n-1}$

$u_{n+1} = e^{-2} \times u_n$

La suite (u_n) **est une suite géométrique de raison** $q = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$

$u_n = e^{-2n-1} > 0$

Le premier terme de cette suite est positif et sa raison $q = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$, nous pouvons en déduire qu'elle est décroissante

b) $v_n = 3n - 1$

$v_{n+1} = 3(n+1) - 1$

$= 3n + 3 - 1$

$= 3n - 1 + 3$

$v_{n+1} = v_n + 3$

La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3 > 0$

La raison de la suite arithmétique est positif nous pouvons en déduire qu'elle est croissante.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{2n+1}} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3n + 1 = +\infty$

les suites (u_n) et v_n ne sont pas adjacentes puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

$5a) f(n) = e^{-2n-1} + 3n - 1 = u_n + v_n$

$S_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

$S_n = u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + \cdots .. + u_n + v_n$

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots .. + u_n + v_0 + v_1 + v_2 + \cdots .. + v_n$

S_n est la somme de deux suites l'une arithmétique el l'autre géométrique

$$S_n = \frac{u_0}{1-q}(1 - q^{n+1}) + \frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(-1 + 3n - 1)}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n - 2)}{2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 - 2n + 3n - 2}{2}$$

$$S_n = \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 + n - 2}{2}$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2 + n - 2}{2} = \frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}} + \infty = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{e^{-1}}{1 - \frac{1}{e^2}}\left(1 - \left(\frac{1}{e^2}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{3n^2 + n - 2}{2n^2} = \frac{3}{2}$$

Exercice 4

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} - ln(x+1)$$

1a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+1} - ln(x+1)$

$= 2 - \infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x+1}{x+1} - ln(x+1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{\ln(x+1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{(x+1)}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}$$

$On\ pose\ \ t = x+1 \Rightarrow x = t-1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2(t-1)+1}{(t-1)^2+t-1} - \frac{t}{t-1} \times \frac{\ln t}{t}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2t-1}{t^2-2t+1+t-1} - \frac{t}{t-1} \times \frac{\ln t}{t}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2t-1}{t^2-t} - \frac{t}{t-1} \times \frac{\ln t}{t}\right) = 0$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$ $\Rightarrow$ **la courbe (C) de f admet une branche infinie de direction (OX) au voisinage de** $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty + \infty\ F.I$

On pose $t = x+1 \Rightarrow\ x = t-1$ $\begin{cases} si\ x \to (-1)^+ \\ \quad t \to 0^+ \end{cases}$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{t\to0^+} \left(\frac{2(t-1)+1}{t} - \ln t\right)$$

$$= \lim_{t\to0^+} \left(\frac{2t-1-t\ln t}{t}\right) \qquad \text{On a} \lim_{t\to0^+} t\ln t = -\infty$$

$$= -\infty$$

$\boxed{\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty}$ $\Rightarrow$ **La courbe (C) de f admet une asymptote verticale d'équation** $x = -1$

2a) $f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}$

$$= \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1-x-1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x = 0$

$\Rightarrow x = 0$

La dérivée s'annule en $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ La courbe (C) admet une tangente horizontale en $x_0 = 0$ d'équation $y = f(0) = 1$

b) TV de f

x	-1		0		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	−	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3a)

$$f''(x) = \frac{-(x+1)^2 - 2(x+1)(-x)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1)(-x-1+2x)}{(x+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{x-1}{(x+1)^3}$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow$ La courbe (C) admet un point d'inflexion A d'abscisse 1

b) Équation de la tangente (T) à la courbe (C) en A

$f'(1) = \frac{-1}{4}$, $f(1) = \frac{3}{2} - \ln 2 = \frac{3-2\ln 2}{4}$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$$y = -\frac{1}{4}(x-1) + \frac{3}{2} - \ln 2$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \ln 2$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4} - \ln 2$$

4 a) g est continue et décroissante de I= $[0, +\infty[$ vers J= $]-\infty, 1]$donc g réalise une bijection

b) TV de g^{-1}

x	$-\infty$		1
$(g^{-1}(x))'$		−	0
$g^{-1}(x)$	$+\infty$	↘	0

$c)\ g(1) = \frac{3-2ln2}{2} \Rightarrow g^{-1}\left(\frac{3-2ln2}{2}\right) = 1$

$$(g^{-1})'\left(\frac{3-2ln2}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{3-2ln2}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{g'(1)}$$

$$= \frac{1}{\frac{-1}{4}}$$

$$(g^{-1})'\left(\frac{3-2ln2}{2}\right) = -4$$

5 a) f**est continue et croissante de** $]-1,0]$**vers** $]-\infty;1]$**et** f **change de signe une seule fois donc il existe un unique réel** $\alpha \in]0;1[$ **tel que** $f(\alpha) = 0$

$f(-0,7) \cong -0,97 < 0\ ,\ f(-0,6) \cong 0,41 > 0 \Rightarrow f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$

$$\Rightarrow\ -0,7 < \alpha < -0,6$$

f**est continue et décroissante de** $[0;+\infty[$ **vers** $]-\infty;1]$ **et** f **change de signe une seule fois donc il existe un unique réel** $\beta \in [0;+\infty[$ **tel que** $f(\beta) = 0$

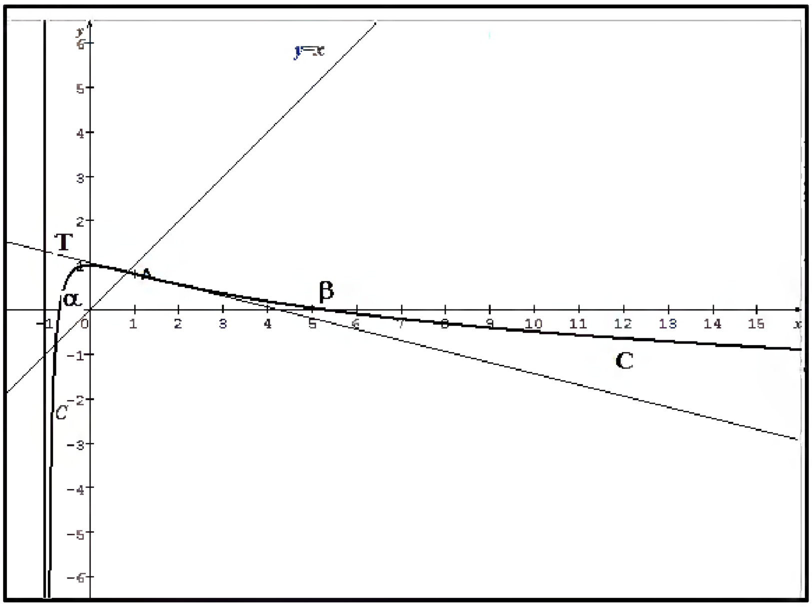
$f(5,3) \cong 7,20207873 \times 10^{-4} > 0$

$f(5,4) \cong -0,012 < 0$

$\Rightarrow f(5,3) \times f(5,4) < 0$

$\Rightarrow\ 5,3 < \beta < 5,4$

b)



6 a) **f est la somme de deux fonctions dérivables sur** $]-1,+\infty[$ **donc f est dérivable sur**$]-1,+\infty[$

b) $F(x) = ax - (x+b)ln(x+1)$

F(x) est la primitive de f si es seulement si F'**(x)=** $f(x)$

$$F'(x) = a - ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \times (x+b)$$

$$F'(x) = a - \frac{x+b}{x+1} - ln(x+1)$$

$$F'(x) = \frac{ax+a-x-b}{x+1} - ln(x+1)$$

$$F'(x) = \frac{(a-1)x+a-b}{x+1} - ln(x+1)$$

$$F'(x) = \frac{2x+1}{x+1} - ln(x+1)$$

Par identification :

$$\begin{cases} a-1=2 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=a-1=2 \end{cases}$$

$$\boxed{F(x) = 3x - (x+2)ln(x+1)}$$

c) $A(\beta) = \int_0^{\beta} f(x)dx$

$=[3x - (x+2)ln(x+1)]_0^{\beta}$

$= 3\beta - (\beta+2)ln(\beta+1)$

$A(\beta) \cong 2,46$

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 2012 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n - 2 \end{cases}$

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

1) La suite (V_n) définie par : $V_n = U_n - 1$ est une suite

A : géométrique	B : arithmétique	C : ni géométrique et ni arithmétique

2) La suite (T_n) définie par : $T_n = ln(V_n)$ est une suite

A : géométrique	B : arithmétique	C : bornée

3) La suite (W_n) définie par : $W_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite

A : croissante	B : décroissante	C : non monotone

4) le terme général de la suite (U_n) est

A : $U_n = 1 + 3^n$	B : $U_n = 2 \times 3^n$	C : $U_n = 2n + 1$

5) La somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ est égal à

A : $S_n = \frac{1+3^{n+1}}{2}$	B : $S_n = n + \frac{1}{2} + \frac{3^{n+1}}{2}$	C : $S_n = \frac{1-3^n}{2}$

6) La limite de la suite (U_n) est

A : $-\infty$	B : 0	C : $+\infty$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$

2) Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq -3 - 2i$ on pose :$f(z) = \frac{z-2-i}{z+3+2i}$

Écrire sous forme algébrique le nombre $P = f(1 - 2i)$

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal (O ;$\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = -3 - 2i$ et $z_C = 1 + 2i$

a)Placer les points A, B et C

b) Écrire le nombre $q = f(z_C)$ sous forme trigonométrique en déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer et construire dans lé même repère les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

$*\ \Gamma_1$ tel que $|f(z)| = 1$

$*\ \Gamma_2$ tel que f(z) soit imaginaire pur

$*\ \Gamma_3$ tels que $[f(z) - 1] = 2\sqrt{34}$

Exercice 3 (6points)

Soit f la fonction définie sur]0; +∞[par :f (x) = x − 2 − 2ln x.

1. **Calculer,** $\lim\limits_{n\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ **et** $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - x)$

et interpréter graphiquement. **(1pt)**

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
(1pt)

3. Donner l'équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse $x_0 = 1$. (0,75pt)

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β et que $0.4 < \alpha < 0.5$; $5.3 < \beta < 5.4$. Démontrer que $\alpha^2 e^{\beta} = \beta^2 e^{\alpha}$. (0,5pt)

5. Soit g la restriction de f sur J =]0;2[.

a) Montrer que g réalisé une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5pt)

b) Calculer $(g^{-1})'(-1)$ (On pourra utiliser la question 3) (0,5pt)

6. a)Tracer les courbes (C)et (C') respectivement des fonctions f et g^{-1} dans un repère orthonormé (O; i, j). (0,5pt)

b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $2x - 2 - m - 2\ln x = 0$. (0,5pt)

7. a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_1^2 \ln x dx$. (0,25pt)

b) Calculer l'aire du domine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. (0,25pt)

Exercice 4 (6points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 1$

1a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g

2a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution , Vérifier que : $0.5 < \alpha < 0.6$

b) Justifier que si : $x \leq \alpha$ alors $g(x) \leq 0$ et si $x \geq \alpha$ $g(x) \geq 0$

3) Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par: $f(x) = \dfrac{e^x - x}{x+1}$

a) Justifier et interpréter les limites suivantes $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

c) dresser le tableau de variation de f

d) Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha}$ et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} prés

4) Tracer la courbe (C) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Corrigé baccalauréat 2012 session Complémentaire

Exercice 1

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	A	A	B	C

Exercice 2:

1° Résolution de : $z^2-2z+5=0$. $\Delta'=(-1)^2-1\times 5=-4=(2i)^2$; $z_1=1+2i$ et $z_2=1-2i$.

2° $p=f(1-2i)=\dfrac{1-2i-2-i}{1-2i+3+2i}=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}i$.

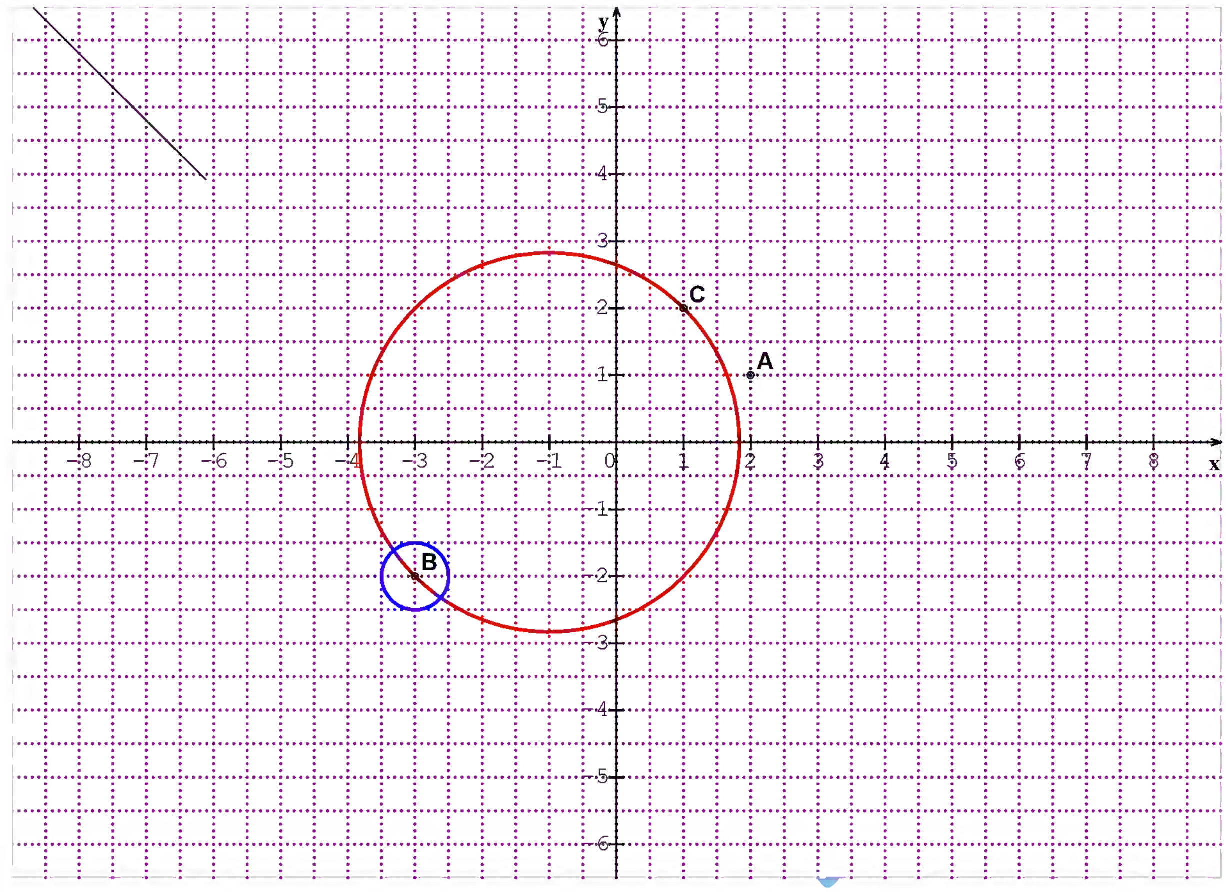
3° a) Schéma voir figure.

b) $q=f(1+2i)=\dfrac{1+2i-2-i}{1+2i+3+2i}=\dfrac{-1+i}{4+4i}=\dfrac{(-1+i)(1-i)}{4(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{8}=\dfrac{1}{4}i$. Donc $q=\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

On remarque que : $q=\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ donc $\arg q=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|q|=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{4}$. Le triangle ABC est rectangle en C.

c) Remarquons d'abord que : $f(z)=\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ donc $|f(z)|=\dfrac{MA}{MB}$ et $\arg f(z)=\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\ [2\pi]$ s'il existe.

- $M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow |f(z)|=\dfrac{MA}{MB}=1$. L'ensemble est la médiatrice du segment $[BC]$.
- $M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(z)=0 \\ \text{ou} \\ \arg f(z)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M=A \\ \text{ou} \\ \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$. L'ensemble est le cercle de diamètre $[BC]$, privé du point B.
- $M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow |f(z)-1|=2\sqrt{34}$. On a $f(z)-1=\dfrac{z-2-i}{z+3+2i}-1=\dfrac{z-2-i-z-3-2i}{z+3+2i}=\dfrac{-5-3i}{z+3+2i}$ donc $|f(z)-1|=\dfrac{|-5-3i|}{|z+3+2i|}=\dfrac{\sqrt{34}}{MB}$. Alors $M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{34}}{MB}=2\sqrt{34} \Leftrightarrow MB=\dfrac{1}{2}$. L'ensemble est le cercle de centre B et de rayon $\dfrac{1}{2}$



Exercice 3:

f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=x-2-2\ln x$

1° On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-2)=-2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to 0^+} f(x)=+\infty$. La droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale de la courbe (C). On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2-2\ln x\right)=-\infty$. La branche infinie de (C), en $+\infty$, a une direction parallèle à celle de la droite d'équation $y=x$.

2° f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ et le signe de $f'(x)$ est celui de $x-2$ car $x>0$.

x		0		2		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$		-1	$\searrow$	$-2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3° Une équation de la tangente à (C), en $x_0=1$, est : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$, soit $y=-x$.

4° D'après le TV de f, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions : $0<\alpha<2<\beta$. D'autre part $f(0.4)\times f(0.5)<0$ et $f(5.3)\times f(5.4)<0$ donc $0.4<\alpha<0.5$ et $5.3<\beta<5.4$.

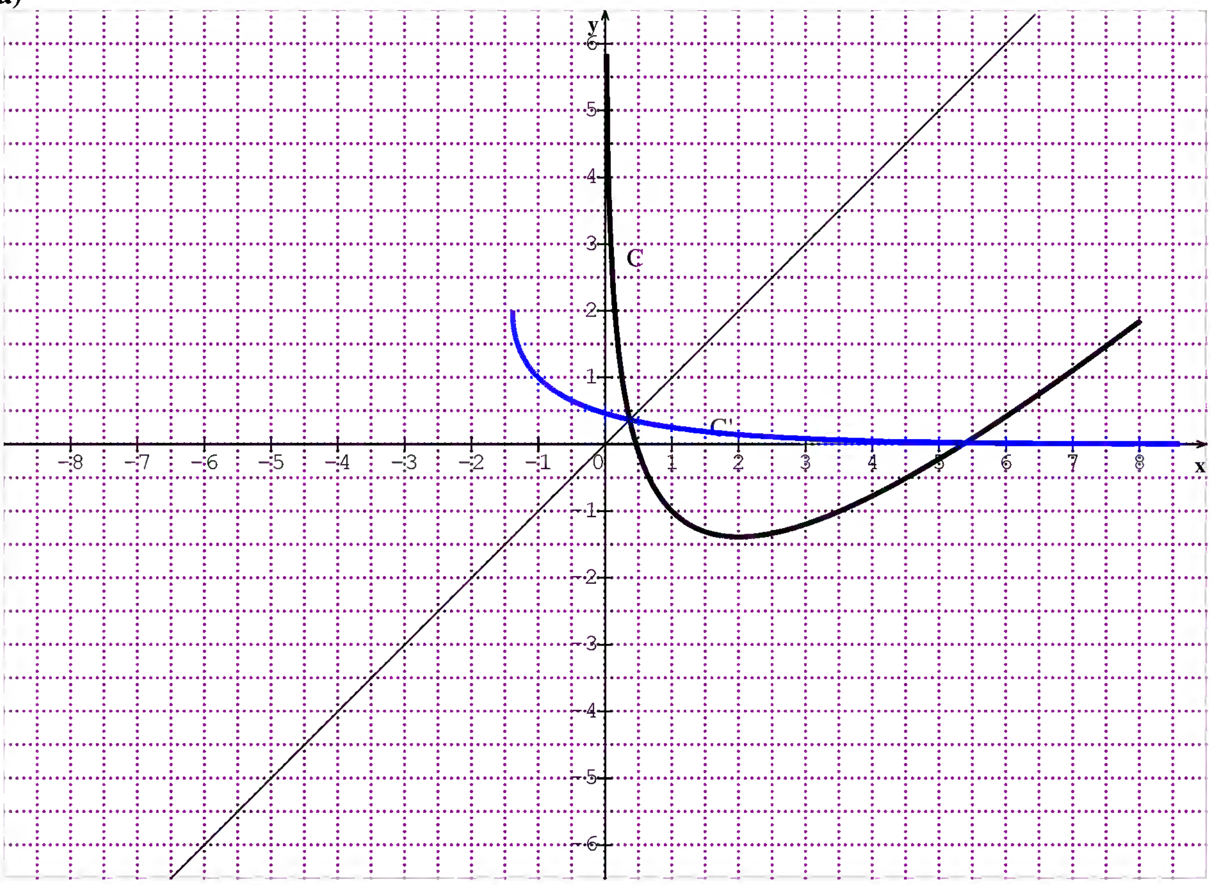
On a : $f(\alpha)=\alpha-2-2\ln\alpha=\ln e^{\alpha}-2-\ln\alpha^2$. De même $f(\beta)=\beta-2-2\ln\beta=\ln e^{\beta}-2-\ln\beta^2$. Or $f(\alpha)=f(\beta)=0$ donc $\ln e^{\alpha}-2-\ln\alpha^2=\ln e^{\beta}-2-\ln\beta^2 \Leftrightarrow \ln e^{\alpha}+\ln\beta^2=\ln e^{\beta}+\ln\alpha^2 \Leftrightarrow$ $\ln\left(e^{\alpha}\times\beta^2\right)=\ln\left(e^{\beta}\times\alpha^2\right)$. Soit encore $\beta^2e^{\alpha}=\alpha^2e^{\beta}$.

5° a) La fonction g est continue et strictement décroissante de $I=]0,2[$ sûr $J=]-2\ln 2,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de I sûr J.

b) On a : $g(1)=f(1)=-1 \Leftrightarrow g^{-1}(-1)=1$ donc $\left(g^{-1}\right)'(-1)=\dfrac{1}{g'(1)}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

6° Tracés des courbes :

a)



b) L'équation $2x-2-m-2\ln x=0 \Leftrightarrow x-2-2\ln x=-x+m \Leftrightarrow f(x)=-x+m$. Toute solution de l'équation est l'abscisse d'un point commun à (C) et la droite $D_m : y=-x+m$.

Valeurs de m	Nombre de solutions
$m<0$	0
$m=0$	1 une solution double
$m>0$	2

7° a) Soit $\int_1^2 \ln x dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$. $\int_1^2 \ln x dx = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - [x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$

b) L'aire demandée est $A = -\int_1^2 f(t)dt = -\int_1^2 (t-2-2\ln t)dt \Leftrightarrow$

$A = -\left[\frac{1}{2}(t-2)^2\right]_1^2 + 2\int_1^2 \ln x dx = \frac{1}{2} + 2(2\ln 2 - 1) = -\frac{3}{2} + 4\ln 2$ ua.

Exercice 4:

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - 1$

1° a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, limite remarquable, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$. Aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) $g'(x) = 1\times e^x + x\times e^x - 0 = (1+x)e^x$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$-1 \searrow$	$-1-\frac{1}{e}$	$\nearrow +\infty$

2° a) L'expression $g(x)$ est strictement négative sur $]-\infty,-1]$ tandis que g réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sûr $\left[-1-\frac{1}{e},+\infty\right[$, donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α. Comme $g(0.5)\times g(0.6) < 0$, alors $0.5 < \alpha < 0.6$.

b) D'après le TV de g on a : $g(]-\infty,\alpha]) = \left[-1-\frac{1}{e},0\right]$ donc, si $x \le \alpha$ alors $g(x) \le 0$ et $g([\alpha,+\infty[) = [0,+\infty[$ donc, si $x \ge \alpha$ alors $g(x) \ge 0$.

3° La fonction f est définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - x}{x+1}$

a) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-}(e^x - x) = 1 - \frac{1}{e} > 0 \\ \lim\limits_{x\to-1^-}(x+1) = 0^- \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$; On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^+}(e^x - x) = 1 - \frac{1}{e} > 0 \\ \lim\limits_{x\to-1^+}(x+1) = 0^+ \end{cases}$ doncce qui veut dire que la droite d'équation : $x = -1$ est une asymptote verticale

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x+1} - 1 + \frac{1}{x+1}\right) = -1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right) = 0$ ce qui s'interprète par le fait que la droite d'équation : $y = -1$ est une asymptote horizontale en $-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\times\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1$.

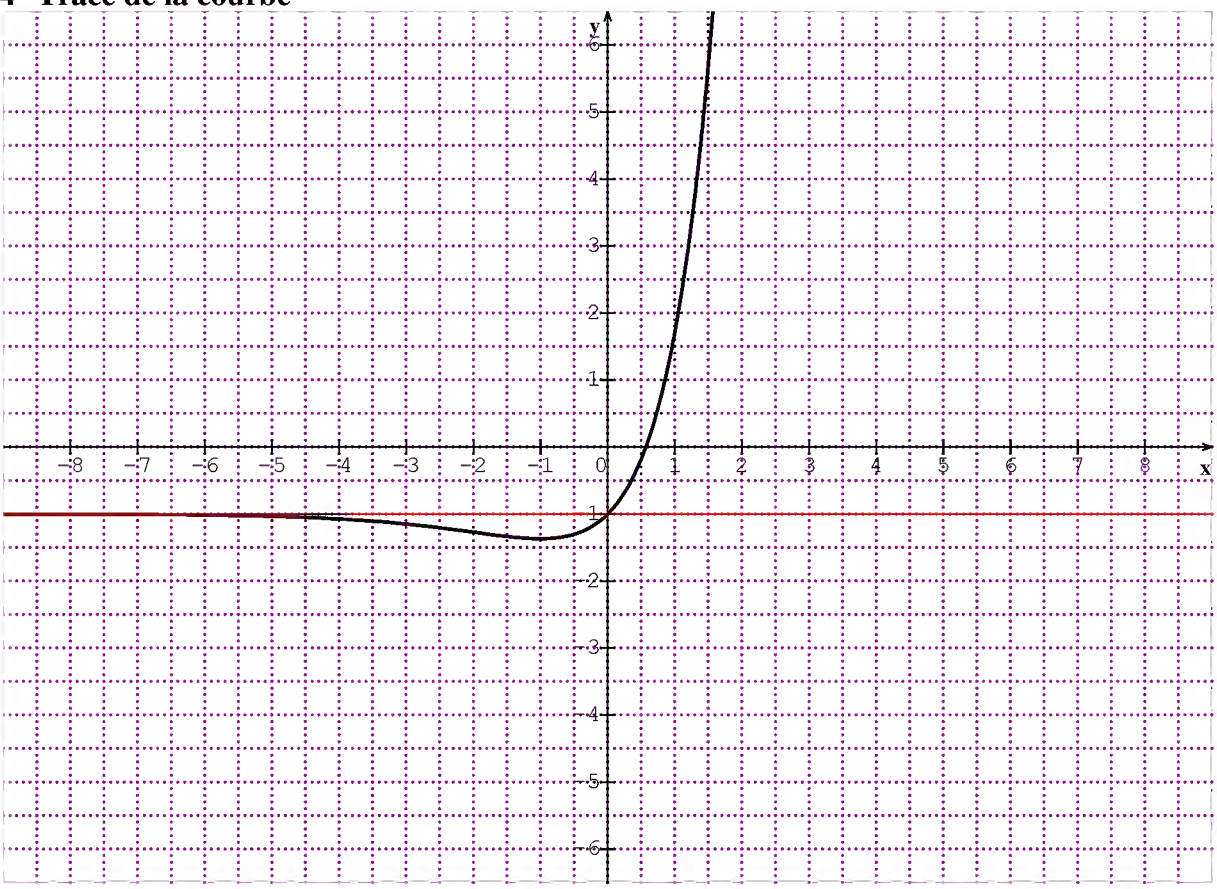
On peut écrire $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{e^x}{x^2}\times\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)$. Or $\frac{e^x}{x^2} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}{4\times\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4}\times\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2$. On pose $t = \frac{x}{2}$ alors $(x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\times\left(\frac{e^t}{t}\right)^2\times\frac{2t}{2t+1}-\frac{1}{2t+1}\right) = +\infty$. On en déduit que la branche infinie en $+\infty$ est de direction (Oy).

b) $f'(x) = \frac{(e^x-1)(x+1)-1\times(e^x-x)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x+e^x-x-1-e^x+x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x-1}{(x+1)^2}$ ou encore $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

c) Tableau de variation de f.

d) On a : $f(\alpha) = \frac{e^\alpha-\alpha}{\alpha+1}$; Or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$. Par suite $f(\alpha) = \frac{\frac{1}{\alpha}-\alpha}{\alpha+1} = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2+\alpha}$.

4° Tracé de la courbe



RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE — **Série : Sciences de la nature**
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE — **Épreuve : Mathématiques**
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION — **Durée : 4heures**
SERVICE DES EXAMENS — **Coefficient : 6**

Baccalauréat 2013 session Normale

Exercice 1 (**3points)**

Une urne contient 4boules blanches et 2boules noires indiscernables au toucher.
On effectue au hasard un tirage de 2 boules simultanément de l'urne.
On note A_0l'événement « on a obtenu aucune boule noire »
On note A_1l'événement « on a obtenu une seule boule noire »
On note A_2l'événement « on a obtenu deux boules noires »
Soit x la variable aléatoire qui, associe le nombre de boules noires tirées.
Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le nombre de tirages possibles est :	C_6^2	A_6^2	6^2
2	La probabilité p (A_0)est :	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{15}$	$\left(\frac{4}{6}\right)^2$
3	La probabilité p (A_1)est :	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

4	La probabilité p (A_2)est :	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$
5	L'espérance mathématique de X est :	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{15}$	4

Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question	1	2	3	4	5
Réponse					

Exercice2 (5points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Résoudre dans l'équation : (E_1) $z^2+2z+10=0$

On note$z_1$et $z_2$ses solutions avec $I_m(z_2)\leq 0$

b) Résoudre dans l'équation : (E_2) $z^2-4z+20=0$

On note$z_3$et $z_4$ses solutions avec $I_m(z_4)\leq 0$

2) on considère les points A, B, K, L et E d'affixes respectives :

$z_A=z_1$; $z_B=z_2$, $z_K=z_3$, $z_L=z_4$et $z_E=z_3-2i$

a) Placer les points A, B, K, L et E dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Écrire $z_E=z_3-2i$ sous forme algébrique et trigonométrique.

c) Déterminer la nature du quadrilatère ABLE et du triangle AKE.

3) Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq -1+3i$ on pose : $f(z)=\frac{z-2-4i}{z+1-3i}$

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

$*\Gamma_1$ tel que $|f(z)|=1$

$*\Gamma_2$ tel que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$

Exercice3 (4points)

On considère la suite numérique (u_n)définie par $u_0=6$ et pour tout $n\in$,

$U_{n+1}=3U_n+10n-13$

1a) Calculer u_1, $u_2$et vérifier que $U_3=43$

b) Justifier que la suite numérique(u_n)n'est ni géométrique ni arithmétique.

2) On définit la suite numérique(v_n) par : pour tout entier $n\in$, $V_n=U_n+5n-4$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.Exprimer v_n en fonction de n.

b) A partir de quel terme a-t-on $V_n\geq 2013$

c) En déduire que, pour tout $n\in$, $U_n=2\times 3^n-5n+4$

3) Pour tout entier naturel n, on pose$S_n=U_0+U_1+\cdots\ldots+U_n$.

Déterminer l'expression de$S_n$en fonction de n.

Exercice 4 (8points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$par : $g(x)=x^2-3+2lnx$

1a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.

Vérifier que $1,34\leq\alpha\leq 1,35$.

c) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle$]0,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$par : $f(x) = x - 2 + \frac{1-lnx}{x^2}$

On note Γ sa courbe représentative dans le plan, muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$orthonormé

1a) Démontre que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - (x-2)) = 0$

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes

c) Étudier le signe de $d(x) = f(x) - (x-2)$, Résumer dans un tableau et interpréter graphiquement.

2a) Calculer $f'(x)$et justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3\alpha^3-4\alpha^2-1}{2\alpha^2}$ et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1}prés

c) En déduire le tableau de variation de f

3a) Donner l'équation de la tangente T à Γ au point A d'abscisse $x_0 = 1$

b) Montrer que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un deuxième point autre que A d'abscisse β telle que $1,9 \leq \beta \leq 2$

c) Tracer l'allure de la courbe dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

4) Soit n un entier naturel $n \geq 3$,on considère l'aire du domaine E du plan compris entre la courbe et les droites d'équations respectives $y = x - 2, x = 3$ et $x = n$

a) Justifier que cette aire, exprimé encm^2, est donnée par :$I_n = \int_3^n \frac{-1+lnx}{x^2}dx$

b) Calculer $J_0 = \int_3^n \frac{lnx}{x^2}dx$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduireI_n en fonction de n

c) Calculer la limite de l'aire$I_n$du domaine E quand n tend vers +∞

FIN

Corrigé baccalauréat 2013 session Normale

Exercice 1

Question n°	1	2	3	4	5
Réponse	A	B	A	C	A

Exercice 2

1a) $z^2 + 2z + 10 = 0$

$\Delta = 4 - 40 = -36 = 36i^2 = (6i)^2$

$$z_1 = \frac{-2+6i}{2} = -1 + 3i$$

$$z_2 = \frac{-2-6i}{2} = -1 - 3i$$

$S = \{-1+3i; -1+3i\}$

b) $z^2 - 4z + 20 = 0$

$\Delta = 4 - 80 = -64 = 64i^2 = (8i)^2$

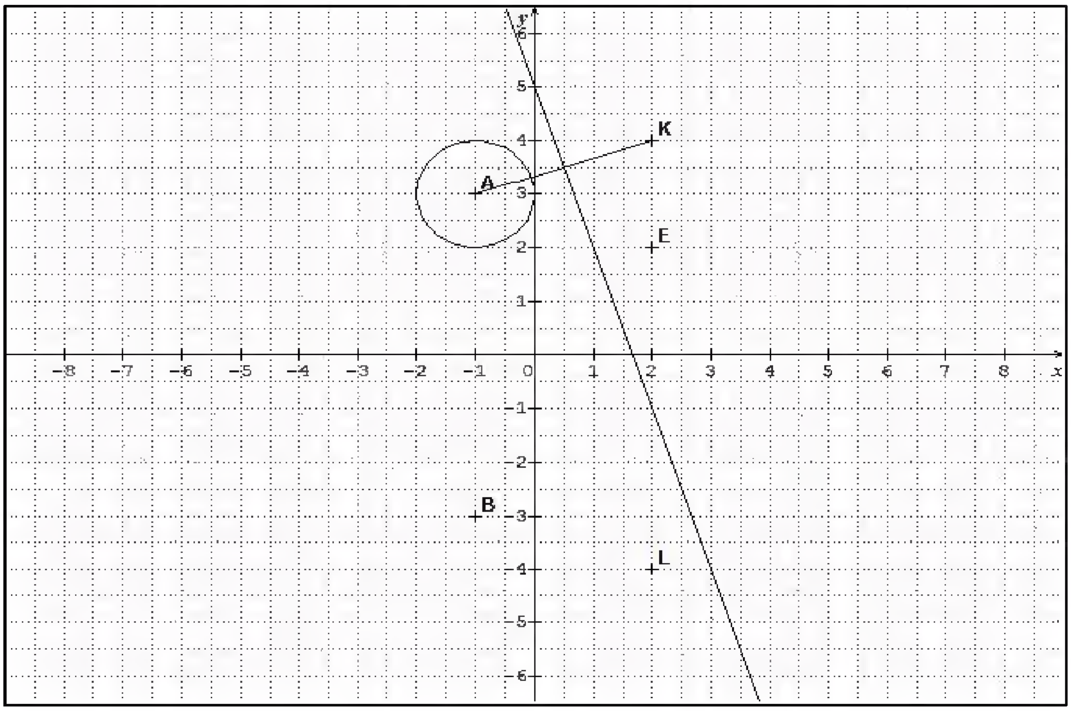
$$z_3 = \frac{4+8i}{2} = 2 + 4i$$

$$z_4 = \frac{4-8i}{2} = 2 - 4i$$

$\Rightarrow$ S=$\{2+4i; 2-4i\}$

2) $z_A = z_1 = -1 + 3i$; $z_B = z_2 = -1 - 3i$, $z_K = z_3 = 2 + 4i$, $z_L = z_4 = 2 - 4i$,
$z_E = z_3 - 2i = 2 + 4i - 2i = 2 + 2i$

a)



b) $|z_E| = |2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg z_E = arg(2+2i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\boxed{z_E = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

c)

$le\ milieu$ du segment$[AL] = \dfrac{ZA+ZL}{2} = \dfrac{-1+3i+2-4i}{2} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

$le\ milieu$ du segment$[BE] = \dfrac{ZB+ZE}{2} = \dfrac{-1-3i+2+2i}{2} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Les segments$[AL]$ et $[BE]$ ont le même milieu donc le quadrilatère ABLE est un parallélogramme.

$AE = |Z_E - Z_A| = |2+2i+1-3i| = |3-i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$AK = |Z_K - Z_A| = |2+4i+1-3i| = |3+i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$AE = AK = \sqrt{10} \Rightarrow$ **Le triangle AKE est isocèle en A**

3) $f(z) = \frac{z-2-4i}{z+1-3i}$

$*\ |f(z)| = 1 \Rightarrow$

$$\left|\frac{z-2-4i}{z+1-3i}\right| = 1$$

$$\left|\frac{z-(2+4i)}{z-(-1+3i)}\right| = 1$$

$$\left|\frac{Z_M - Z_K}{Z_M - Z_A}\right| = 1$$

$$\frac{KM}{AM} = 1$$

$KM = AM$

$\Rightarrow \mathbb{\Gamma}_1$ **Est la médiatrice du segment**$[AK]$ **.**

$* \, |f(z) - 1| = \sqrt{10} \;\Rightarrow$

$\left|\frac{z-2-4i}{z+1-3i} - 1\right| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\left|\frac{z-2-4i-z-1+3i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\left|\frac{-3-i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\frac{\sqrt{10}}{|z+1-3i|} = \sqrt{10} \Rightarrow$

$\sqrt{10}|z+1-3i| = \sqrt{10} \Rightarrow$

$|z+1-3i| = 1 \Rightarrow$

$|Z_M - (-1+3i)| = 1 \Rightarrow$

$|Z_M - Z_A| = 1 \Rightarrow$

$AM = 1$

$\mathbb{\Gamma}_2$ **est le cercle de centre A et de rayon** $r = 1$

Corrigé l'Exercice 3

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = 3U_n + 10n - 13 \end{cases}$$

$1a)\ U_1 = 3U_0 - 13 = 3 \times 6 - 13 = 18 - 13 = 5$

$U_2 = 3U_1 + 10 - 13 = 3 \times 5 + 10 - 13 = 15 + 10 - 13 = 12$

$U_3 = 3U_2 + 10 \times 2 - 13 = 3 \times 12 + 20 - 13 = 36 + 20 - 13 = 43$

b)

$$\begin{cases} U_1 - U_0 = 5 - 6 = -1 \\ U_2 - U_1 = 12 - 5 = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{U_1 - U_0 \neq} \boxed{U_2 - U_1} \Rightarrow (U_n) n'est\ pas\ une\ suite\ arithmétique$$

$$\begin{cases} \frac{U_1}{U_0} = \frac{5}{6} \\ \frac{U_2}{U_1} = \frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1} \Rightarrow} (U_n)\ n'est\ pas\ une\ suite\ géométique$$

2°a) $V_n = U_n + 5n - 4$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} + 5(n+1) - 4 \\ &= 3U_n + 10n - 13 + 5n + 5 - 4 \\ &= 3U_n + 15n - 12 \\ &= 3(U_n + 5n - 4) \\ V_{n+1} &= 3V_n \end{aligned}$$

(V_n) $est\ une\ suite\ géométique$ **de** $raison\ q = 3$ **et de premier terme**

$v_0 = U_0 - 4 = 6 - 4 = 2$

$V_n = V_0 q^n = 2 \times 3^n$

b) $V_n \geq 2013 \Rightarrow\ 2 \times 3^n \geq 2013$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 3^n \geq \frac{2013}{2} \\ &\Rightarrow n\ln 3 \geq \ln\left(\frac{2013}{2}\right) \\ &\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{2013}{2}\right)}{\ln 3} \end{aligned}$$

$v_n \geq 2013 \;\Rightarrow n \geq \frac{6,914234245}{1,098612289} = 6,29360723$

$V_n \geq 2013$ **à partir de** V_7

c) $V_n = U_n + 5n - 4 \Rightarrow U_n = V_n - 5n + 4$

$\Rightarrow U_n = 2 \times 3^n - 5n + 4$

3) $S_n = U_0 + U_1 + \cdots \ldots + U_n$

(S_n) est **la somme de la suite géométrique** (V_n) **et la suite arithmétique** (w_n) **définie par** $w_n = -5n + 4$

D'où $S_n = \frac{V_0}{1-q}(1 - q^{n+1}) + \frac{(n+1)(w_0+w_n)}{2}$

$$S_n = \frac{2}{1-3}(1 - 3^{n+1}) + \frac{(n+1)(4 - 5n + 4)}{2}$$

$$S_n = -(1 - 3^{n+1}) + \frac{(n+1)(8 - 5n)}{2}$$

$$S_n = -1 + 3^{n+1} + \frac{8n - 5n^2 + 8 - 5n}{2}$$

$$S_n = -1 + 3^{n+1} + \frac{3n - 5n^2 + 8}{2}$$

$$S_n = -1 + 3^{n+1} + \frac{3}{2}n - \frac{5}{2}n^2 + 4$$

$$S_n = 3 + 3^{n+1} + \frac{3}{2}n - \frac{5}{2}n^2$$

Exercice 4

Partie A

$g(x) = x^3 - 3 + 2lnx$

1a) $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} (x^3 - 3 + 2lnx) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 3 + 2lnx) = +\infty - 3 + \infty = +\infty$

b) $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$

TV de g

x	0	$+\infty$
g'(x)	‖	+
g(x)	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

2a) g est continue et strictement croissante de $]0, +\infty[$ **vers J=ℝ donc g réalise une bijection.**

b) g réalise une bijection et change de signe une seule fois donc il existe un unique réel $\alpha > 0$ **tel que** $g(\alpha) = 0$

$g(1,34) < 0$ **et** $g(1,35) > 0 \Rightarrow$ $g(1,34) \times g(1,35) < 0$ **donc** $1,34 < \alpha < 1,35$

Signe de g(x)

c) $\begin{cases} \text{Si } x \in]0, \alpha] \Rightarrow g(x) \leq 0 \\ \text{Si } x \in [\alpha, +\infty[\Rightarrow g(x) \geq 0 \end{cases}$

Partie B

1a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x - 2 + \frac{1-lnx}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} x - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}$

$= 0 - 2 + \infty + \infty$

$= +\infty$

$\lim\limits_{n\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to +\infty} x - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}$

$= +\infty - 2 + 0 - 0$

$= +\infty$

$\lim\limits_{n\to +\infty} f(x) - (x-2) = \lim\limits_{n\to +\infty} x - 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2} - x + 2$

$= \lim\limits_{n\to +\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{lnx}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (x-2) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \Gamma$ $admet$ **une asymptote verticale** d'é$quation$ $x = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - (x-2) = 0 \Rightarrow \Gamma admet$ **une asymptote oblique** d'é$quation$ $y = x - 2$

c) $d(x) = f(x) - (x-2)$

$d(x) = \frac{1 - lnx}{x^2}$

$x^2 > 0 \Rightarrow$ **le signe de** $d(x)$ **est celui de** $1 - lnx$

$d(x) = 0 \Rightarrow 1 - lnx = 0$

$\Rightarrow lnx = 1$

$\Rightarrow x = e$

x	$-\infty$	e		$+\infty$
Signe d(x)	+	0	−	
P.R	Γ/D	O	D/Γ	

2a)

$f'(x) = 1 + \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 - lnx)}{x^4}$

$f'(x) = 1 + \frac{-x - 2x + 2xlnx}{x^4}$

$= 1 + \frac{-3x + 2xlnx}{x^4}$

$= \frac{x^4 - 3x + 2xlnx}{x^4}$

$= \frac{x(x^3 - 3 + 2lnx)}{x^4}$

$= \frac{x^3 - 3 + 2lnx}{x^3}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$x \in]0, +\infty[\Rightarrow x^3 > 0$ **donc le signe de** $f'(x)$ **est celui de** $g(x)$

b)

$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{1 - ln\alpha}{\alpha^2}$

on a $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 3 + 2ln\alpha = 0$

$\Rightarrow 2ln\alpha = 3 - \alpha^3$

$\Rightarrow \ln\alpha = \frac{3-\alpha^3}{2}$

On remplace $ln\alpha$ dans l'expression de $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{1 - \frac{(3-\alpha^3)}{2}}{\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{\frac{2-3+\alpha^3}{2}}{\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{-1+\alpha^3}{2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 - 4\alpha^2 - 1 + \alpha^3}{2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha^3 - 4\alpha^2 - 1}{2\alpha^2}$$

$f(\alpha) \cong -0,2$

c) TV de f

x	0		α		$+\infty$
f '(x)			0		
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3a) $f(x_0) = f(1) = 0$

$f'(x_0) = f'(1) = -2$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

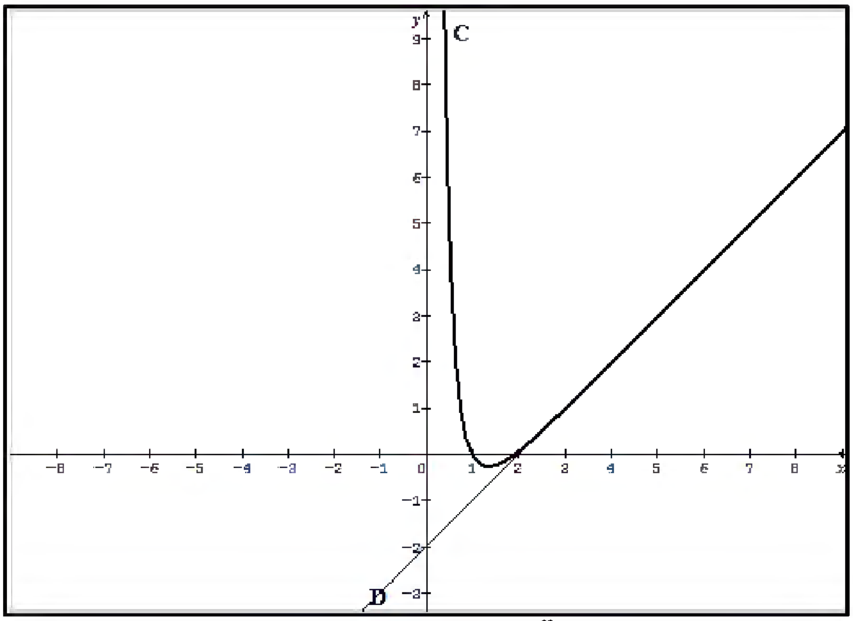
$y = -2(x-1)$

$y = -2x + 2$

b) $f(1) = 0 \Rightarrow$ la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un premier A point d'abscisse 1
Puisque f change de signe 2fois sur $]0, +\infty[$ donc il existe un deuxième point autre que A d'abscisse $\beta \in [\alpha, +\infty[$

$\begin{cases} f(1,9) = -0,006 < 0 \\ f(2) = 0,076 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(1,9) \times f(2) < 0 \Rightarrow 1,9 < \beta < 2$

c)



4) Sur $[\beta,+\infty[$ on a $d(x)<0 \Rightarrow I_n = -\int_3^n d(x)dx$

$$\Rightarrow \quad I_n = -\int_3^n \frac{1-lnx}{x^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \int_3^n \frac{-1+lnx}{x^2}dx$$

b) $J_n = \int_3^n \frac{lnx}{x^2}dx$

on pose $\begin{cases} u = lnx \to u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} \to v = \frac{-1}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$J_n = \left[\frac{-lnx}{x}\right]_3^n + \int_3^n \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow$$

$$J_n = \frac{-lnn}{n} + \frac{ln3}{3} + \left[\frac{-1}{x}\right]_3^n$$

d'où

$$\boxed{J_n = \frac{-lnn}{n} + \frac{ln3}{3}}$$

$$I_n = \int_3^n \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{lnx}{x^2}\right)dx$$

$$I_n = \int_3^n -\frac{1}{x^2}dx + \int_3^n \frac{lnx}{x^2}dx$$

$$I_n = \int_3^n -\frac{1}{x^2}dx + J_n$$

$$I_n = \left[\frac{1}{x}\right]_3^n + \frac{-lnn}{n} + \frac{ln3}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3}$$

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{lnn}{n} + \frac{ln3}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3}$$

$$I_n = \frac{ln3}{3} - \frac{lnn}{n}$$

c)

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{ln3}{3} - \frac{lnn}{n} = \frac{ln3}{3}$$

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE **Série : Sciences de la nature**
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE **Épreuve : Mathématiques**
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION **Durée : 4heures**
SERVICE DES EXAMENS **Coefficient : 6**

Baccalauréat 201 3 session Normale

Exercice *1* (3points)

On considère la suite arithmétique (U_n) de raison $r = 3$ et de premier terme $U_0 = 15$
Pour chaque question, parmi les réponses proposées, une seule est exacte

N	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le terme général de la suite(U_n)est :	$U_n = 3 + 15n$	$U_n = 15 + 3n$	$U_n = 3n + 12$
2	La valeur de U_{10} est :	$U_{10} = 153$	U_{10} =13	U_{10} =45
3	Si$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \cdots U_n = 204$	$n = 204$	$n = 30$	$n = 7$

4	La suite (V_n) de terme général $V_n = \frac{1}{U_n}$	Convergente	Croissante	géométrique
5	La suite (V_n) de terme général $T_n = e^{U_n}$ est :	arithmétique	Géométrique	Majorée
5	Si (W_n) est une suite numérique telle que pour tout n : $V_n \le W_n \le U_n$, alors (W_n)est	Minorée	Décroissante	Divergente

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci- dessous. Aucune justification n'est demandée

N° question	1	2	3	4	5
Réponse Exacte					

Exercice 2(5points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes (E): $z^2 - 6z + 18 = 0$

2) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes (E') : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$

3) Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle chacun des nombres :

$u = 3 + 3i$ et $v = \sqrt{3} - i$

4) On pose $w = (3 + 3i)(\sqrt{3} - i)$

a) **Écrire w sous forme algébrique**

b) En utilisant 3) écrire w sous forme trigonométrique et exponentielle

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 3(6points)

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + ln(x + 1)$

1a) Montre que $\lim\limits_{x \to -(-1)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ et interpréter graphiquement.

2-Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

3a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution α Vérifier que :$1,2 < \alpha < 1,3$

c) Construire la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

4- pour tout $x > -1$; on pose $u(x) = (x + 1)ln(x + 1)$

a) Calculer $u'(x)$ et montrer que pour tout $x > -1$ on a $f(x) = u'(x) + x - 3$

b) En déduire la primitive F de la fonction f sur$]-1, +\infty[$ qui vérifie $F(0) = 0$

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) de f et les droites d'équations : $x = \alpha$ et $x = 0$

5- soit f^{-1}la réciproque de f. (C')sa courbe représentative dans le repère précédent.

a) Déterminer de ce qui précède les limites: $\lim\limits_{x \to -\infty} f^{-1}(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$

b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(-2)$ et donner l'équation de la tangente à la courbe (C')au point d'abscisse $x_0 = -2$

<u>Exercice 4</u> (6points)

1-on considère la fonction numérique g définie par $g(x) = (2x+3)e^{x+1} + 1$

a) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$

b) Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g .

c) en déduire que pour tout réel x ; $g(x) > 0$

2) On considère la fonction numérique f définie :$f(x) = x - 3 + (2x+1)e^{x+1}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Montrer que la droite D d'équation $y = x - 3$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

puis déterminer leurs positions relatives.

3a) Écrire $f'(x)$ en fonction de $g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

4a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α puis vérifier que $0 < \alpha < 0{,}1$

5a) Montrer que la solution α vérifie l'égalité $\ln\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}\right) - \alpha = 1$

5a) Montrer qu'il existe un unique point A auquel la tangente T à (C) est parallèle à l'asymptote oblique d'équation $y = x - 3$.Donner l'équation de$T$.

b) Construire la courbe (C), la tangente T et l'asymptote D

c) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation$(2x+1)e^{x+1} - m - 3 = 0$

FIN

Corrigé Baccalauréat 2013 session Complémentaire

Exercice 1 :

Question N°	1	2	3	4	5	6
Réponse	B	C	C	A	B	A

Exercice 2 :

1° Résolution de : $z^2 - 6z + 18 = 0$. $\Delta' = (-3)^2 - 1\times 18 = -9 = (3i)^2$; $z_1 = 3 + 3i$ et $z_2 = 3 - 3i$.

2° Résolution de : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$. $\Delta' = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 1\times 4 = -1 = (i)^2$; $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

3° $u = 3 + 3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$;

$v = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

4° $w = (3+3i)(\sqrt{3}-i) = u \times v$

a) $w = (3+3i)(\sqrt{3}-i) = 3\sqrt{3} - 3i + 3i\sqrt{3} + 3 = 3(1+\sqrt{3}) + 3i(-1+\sqrt{3})$ ..

b) On a $|w| = |u| \times |v| = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$; $\arg w = \arg u + \arg v = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ $[2\pi]$. Alors : $w = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

c) Par identification des deux écritures de w on trouve :

$$\begin{cases} 6\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = 3(1+\sqrt{3}) \\ 6\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = 3(-1+\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} x - 2 + \ln(x+1) = -1 - 2 - \infty = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - 2 + \ln(x+1) = +\infty - 2 + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-2+\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{2}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x - 2 + \ln(x+1) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} -2 + \ln(x+1) = +\infty$

La courbe (C) admet une branche infinie de direction la droite Δd'équation $y = x$ au voisinage de+ ∞.

Étudions le signe de $f(x) - x$

$f(x) - x = -2 + \ln(x+1)$
$f(x) - x = 0 \Rightarrow -2 + \ln(x+1) = 0$
$\Rightarrow \ln(x+1) = 2$
$\Rightarrow x + 1 = e^2$
$\Rightarrow x = e^2 - 1$

$A(e^2 - 1 ; e^2 - 1)$

$2f'(x) = 1 + \frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow$ f est strictement croissante

T.V de f

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

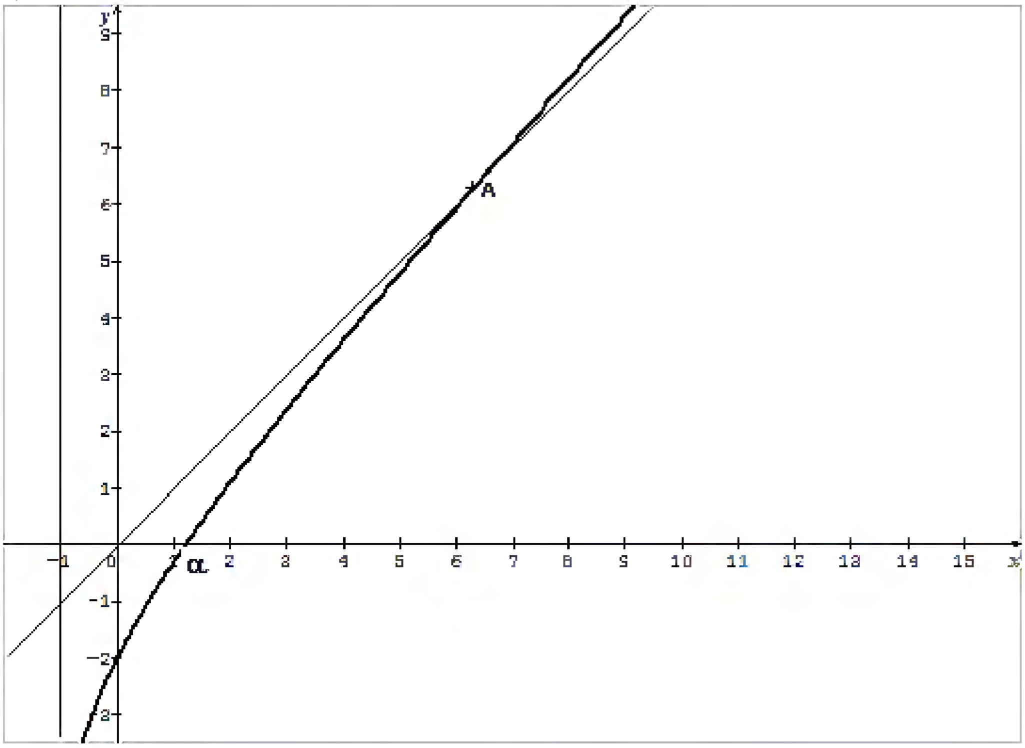
3a) f est continue et strictement croissante de $I =]-1,+\infty[$ vers J=$\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection

b) f une bijection de I vers J et 0$\in J$ donc l'équation f(x)=0 admet une unique solution α

$f(1,2) = -1,15 \times 10^{-2} < 0$ **et** $f(1,3) = 0,13 > 0$

$f(1,2) \times f(1,3) < 0 \Rightarrow 1,2 < \alpha < 1,3$

c)



4a) $u(x) = (x+1)ln(x+1)$

$u'(x) = ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \times (x+1)$

$u'(x) = ln(x+1) + 1 \Rightarrow ln(x+1) = u'(x) - 1$

$f(x) = x - 2 + ln(x+1)$ **remplaçons** $ln(x+1)$ **par** $u'(x) - 1$

d'où $f(x) = x - 2 + u'(x) - 1 \Rightarrow f(x) = u'(x) + x - 3$

c) $f(x) = u'(x) + x - 3 \Rightarrow F(x) = u(x) + \frac{x^2}{2} - 3x + k$

$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + (x+1)ln(x+1)$

d) $A = \int_0^{\alpha} f(x)dx = [F(x)]_0^{\alpha} = F(\alpha) - F(0) = \frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha + (\alpha+1)ln(\alpha+1)$

5a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = 1$

b) $\left(f^{-1}\right)'(-2)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(-2))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$

$y=(f^{-1})'(-2)(x+2)+f^{-1}(2)$

$y=\frac{1}{2}(x+2)=\frac{1}{2}x+1$

Exercice 4

1a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)e^{x+1}+1=(+\infty)(+\infty)+1=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)e^{x+1}+1=1$ *Puisque* $\lim\limits_{x\to-\infty}(\alpha x+\beta)e^{\alpha x+\beta}=0$

b) $g'(x)=2e^{x+1}+e^{x+1}(2x+3)=(2+2x+3)e^{x+1}=(2x+5)e^{x+1}$

$g'(x)=0 \Rightarrow (2x+5)e^{x+1}=0$

$\Rightarrow 2x+5=0$

$\Rightarrow x=\frac{-5}{2}=-2,5$

T Vde g

x	$-\infty$		$-2,5$		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
g(x)	1	$\searrow$	$-2e^{\frac{-3}{2}}+1$	$\nearrow$	$+\infty$

$g\left(-\frac{5}{2}\right)=-2e^{-\frac{3}{2}}+1>0$

g admet un minimum positif donc g est positive

$\forall x\in\mathbb{R}: g(x)>0$

2a) $f(x)=x-3+(2x+1)e^{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-3+(2x+1)e^{x+1}=-\infty-3+0=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-3+(2x+1)e^{x+1}=+\infty-3+(+\infty)(+\infty)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{x-3+(2x+1)e^{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{3}{x}+\left(2+\frac{1}{x}\right)e^{x+1}=1-0+\infty=+\infty$

La courbe C de f admet une branche infinie de direction (OY) au voisinage de+ ∞

c) Montrons que la droite (D) d'équation y=x-3 est une asymptote à (C) au voisinage de$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{x+1}=0\Rightarrow$ **Que la droite (D) d'équation** $y=x-3$ **est une asymptote à (C) au voisinage de**$-\infty$

$f(x)-y=(2x+1)e^{x+1}$

$e^{x+1}>0$ **d'où le signe de** $f(x)-y$ **est celui de** $2x+1$

$f(x)-y=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

C∩Δ= $B(-0,5,-3,5)$

3a) $f'(x)=1+2e^{x+1}+e^{x+1}(x+1)$

$=1+e^{x+1}(2+x+1)$

$=1+(2x+1)e^{x+1}$

$f'(x) = g(x > 0$

b) TV de f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4a) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers J=$\mathbb{R}$ d'où f réalise une bijection

b) f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers J et $0 \in J$ donc il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$

$f(0) = -3 + e \cong -0,3 < 0$; $f(0,1) = 0,7 > 0$

$f(0) \times f(0,1) < 0 \Rightarrow 0 < \alpha < 0,1$

c) $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha - 3 + (2\alpha + 1)e^{\alpha+1} = 0$

$$\Rightarrow (2\alpha + 1)e^{\alpha+1} = 3 - \alpha$$

$$\Rightarrow e^{\alpha+1} = \frac{3-\alpha}{2\alpha+1}$$

$$\Rightarrow \alpha + 1 = ln\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}\right)$$

$$\Rightarrow ln\left(\frac{3-\alpha}{2\alpha+1}\right) - \alpha = 1$$

5a) Test parallèle à l'asymptote oblique $y = x - 3$ ssi $f'(x_0) = 1$

$$\Rightarrow 1 + (2x_0 + 3)e^{x_0+1} = 1$$

$$\Rightarrow (2x_0 + 3)e^{x_0+1} = 0$$

$$\Rightarrow 2x_0 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{-3}{2}$$

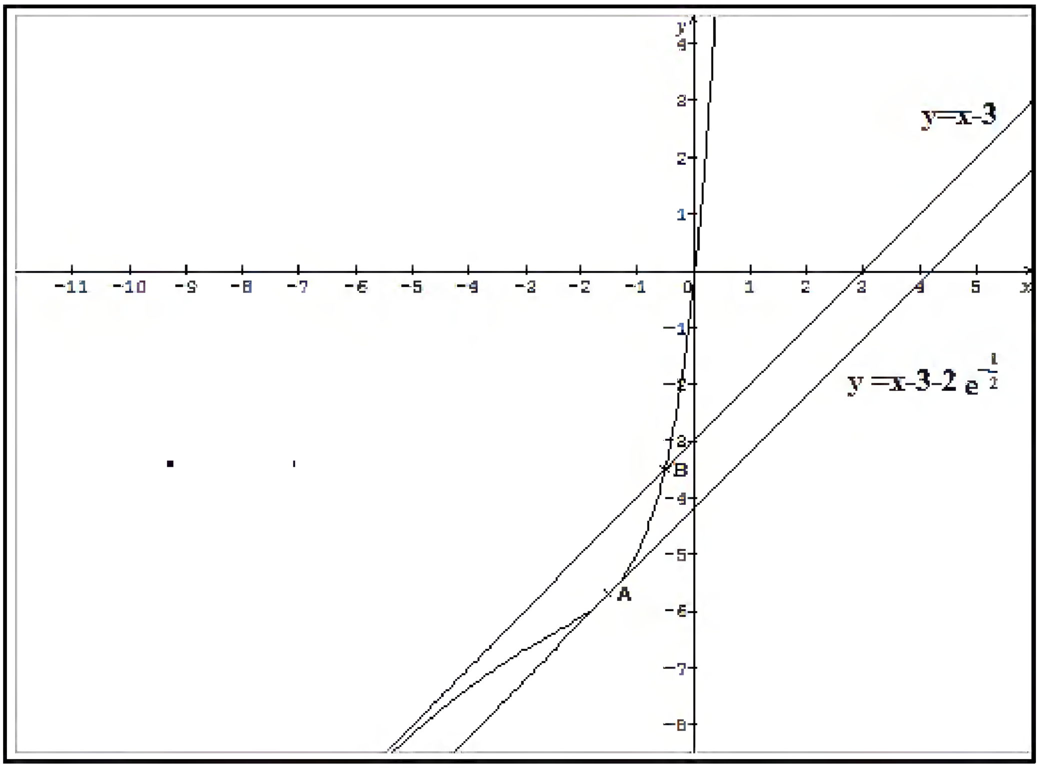
$f(x_0) = f\left(\frac{-3}{2}\right) = -\frac{9}{2} - 2e^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow$ **B** $\left(\frac{-3}{2}, -\frac{9}{2} - 2e^{\frac{-1}{2}}\right)$

Équation de la tangent T : $y = f'(x_0)\left(x + \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{-3}{2}\right)$

$$y = x + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} - 2e^{\frac{-1}{2}}$$

$$y = x - 3 - 2e^{\frac{-1}{2}}$$

b) traçage



c)

$(2x+1)e^{x+1} - m - 3 = 0 \Rightarrow\ m = -3 + (2x+1)e^{x+1}$

$\Rightarrow x + m = x - 3 + (2x+1)e^{x+1}$

$\Rightarrow\ f(x) = x + m$

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + m$ est le nombre d'intersection entre la courbe (C) et la droite (D_m) d'équation $y = x + m$

$$\begin{cases} x \in \left]-\infty, -3 - 2e^{-\frac{1}{2}}\right[: 0solution \\ m = -3 - 2e^{\frac{-1}{2}} : 1seule\ solution \\ x \in \left]-3 - 2e^{-\frac{1}{2}}, -3\right[: 2solutions \\ m = -3 : 1seule\ solution \\ ]-3, +\infty[: 1seule\ solution \end{cases}$$

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE — Série : Sciences de la nature
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE — Épreuve : Mathématiques
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION — Durée : 4heures
SERVICE DES EXAMENS — Coefficient : 6

Baccalauréat 2014 session Normale

Exercice 1 (3points)

Une cage contient six pigeons dont quatre femelles et deux pigeons mâles ; parmi ces pigeons, on dispose de deux couples de plumage blanc et de deux femelles de plumage gris. On tire simultanément deux oiseaux de cette cage (les tirages sont équiprobables).

1) on considère les probabilités :

p_1 la probabilité de l'événement A : « Les deux oiseaux tirés son de plumage gris »

p_2 la probabilité de l'événement B : « Les deux oiseaux tirés son de même couleur »

p_3 la probabilité de l'événement C : « Les deux oiseaux tirés son de même sexe »

2) On suppose dans cette question, que le tirage a donné deux oiseaux de même couleur .On note p_4 la probabilité que ces deux oiseaux soient de même sexe.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	Le nombre de tirages possibles est :	6^2	A_6^2	C_6^2
2	La probabilité $p_1$est :	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$
3	La probabilité $p_2$est :	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{15}$
4	La probabilité $p_3$est :	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$
5	La probabilité $p_4$est :	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{7}{15}$

Recopie et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse Aucune justification n'est demandée :

Question N°	1	2	3	4	5
Réponse					

Exercice2 (5points)

On considère Le plan complexe muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes chacune des équations suivantes:

$(E_1)\quad z^2-2z+17=0 \quad (E_2)\quad z^2+8z+17=0$

2) Pour tout nombre complexe z tel que$z\neq -4-i$, on pose : $f(z)=\frac{z-1+4i}{z+4+i}$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$Z_A=-4-i$,$Z_B=1-4i$ et $Z_C=4+i$

a) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C ; et déterminer la nature du triangle ABC.

b) Calculer $\alpha=f(-1+4i)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.

c)Déterminer puis construire l'ensembleΓ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$

d) Déterminer puis construire l'ensembleΓ_2 des points M du plan d'affixe z tels le nombre f(z) soit imaginaire pur.

3) on considère la suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0=4+i$,et pour tout entier naturel n ,$z_{n+1}=\frac{\alpha}{2}z_n$ .On appelle M_n le point d'affixe z_n .

a) Calculer z_1, z_2
b) Montrer que la suite de terme général $V_n = |z_n|$ est une suite géométrique.
c) On pose $S_n = OM_0 + OM_1 + \cdots + OM_n$ Donner l'expression de S_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$

Exercice 3 (7points)

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x - 1 + 2e^x$.Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) unité 1cm.

1a) Justifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Calculer et donner une interprétation graphique de : $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (2x - 1))$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2a) Dresser le tableau de variation de f
b) Montrer que f réalise une bijection de ℝ sur un intervalle J que l'on déterminera.
c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans ℝ une unique solution α puis vérifier que$-0,3 < \alpha < -0,2$.
3) Construire les courbes (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproquef^{-1} dans le repère (O ;$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).
4a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en $x_0 = \alpha$
b) Vérifier que : $(f^{-1})'(0)= \frac{1}{-2\alpha+3}$
5) On considère la suite (U_n)définie pour tout entier naturel n par : $U_n = f(n)$
a) Montrer que (U_n) est la somme de deux suites ; une arithmétique et une géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
b) on pose $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ .Donner l'expression de S_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$

Exercice 4(7points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :$g(x) = x - 3 + 3lnx$

1a) calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g
2a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans ℝ une unique solution α puis vérifier que$1,59 < \alpha < 1,60$.
b) En déduire le signe de g sur l'intervalle$]0, +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :$f(x) = \frac{(x-3)lnx}{x}$
On peut donc aussi écrire :$f(x) = \frac{(x-3)}{x} lnx$ (1) et $f(x) = lnx - \frac{3lnx}{x}$ (2)
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)

1a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0^+}$ f(x)= $+\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty}$ f(x) = $+\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - lnx) = 0$
b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.
2a) Calculer la dérivée $f'(x)$ .vérifier que $f'(x)$ et g(x) ont le même signe.
b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-3)^2}{3\alpha}$ et donner une valeur approchée de$f(\alpha)$ à 10^{-1}
c) Dresser le tableau de variation de fonction f.
3a) Déterminer une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse.
b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Tracer (C) et T
c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $2x^2 - mx + xlnx - 3lnx = 0$.

4a) Calculer l'intégrale $J = \int_1^e \frac{lnx}{x} dx$.

b) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^e lnx dx$.

c) Justifier que l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est donnée par $S = -\int_1^e f(x) dx$. Calculer cette aire.

Fin

Corrigé baccalauréat 2014 Session Normale

Exercice 1

Question N°	1	2	3	4	5
Réponse	C	B	B	C	B

Corrigé Exercice 2

1)(E_1) $\quad z^2-2z+17=0$

$\Delta = 4-68=-64=64i^2=(8i)^2$

$$z_1=\frac{2-8i}{2}=1-4i$$

$z_2=1+4i$

$S_1=\{1-4i\,,1+4i\}$

(E_2) $\quad z^2+8z+17=0$

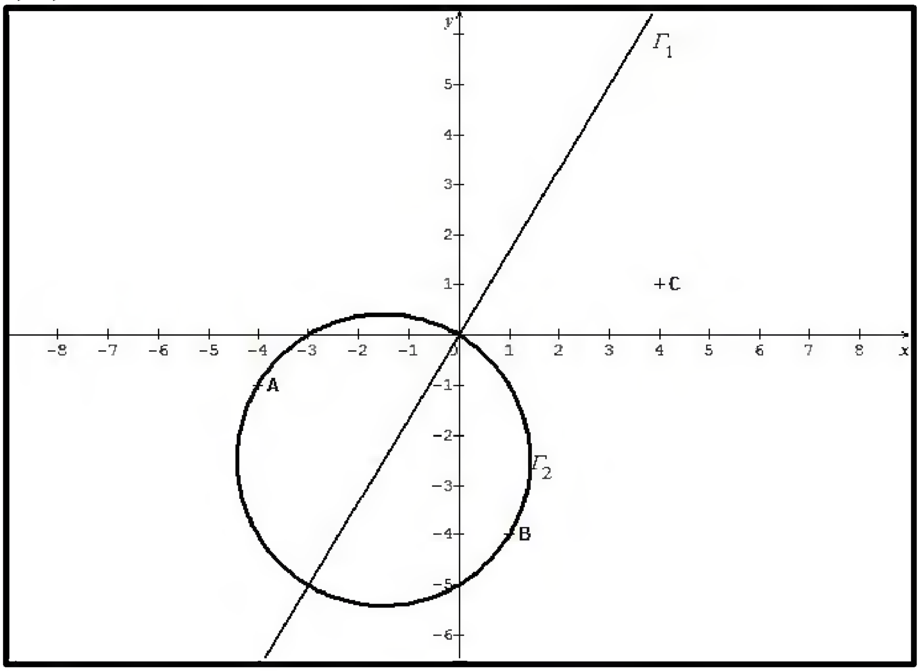
$\Delta = 64-68=-4=4i^2=(2i)^2$

$$z_3=\frac{-8-2i}{2}=-4-i$$

$z_4=-4+i$

$S_2=\{-4-i\,,-4+i\}$

2) a)



Démontrons que le triangle ABC est isocèle rectangle en B

on pose :

$$K=\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$$

$$=\frac{-4-i-1+4i}{4+i-1+4i}$$

$$=\frac{-5+3i}{3+5i}$$

$$=\frac{(-5+3i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}$$

$$= \frac{-15+25i+9i+15}{9+25} = \frac{34i}{34} = i$$

$$K = i \quad \Rightarrow \begin{cases} |K| = 1 \Rightarrow \frac{BA}{BC} = 1 \\ argK = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Le triangle ABC est isocèle rectangle en B

b) $\alpha = f(-1+4i)$

$$\alpha = \frac{-1+4i-1+4i}{-1+4i+4+i}$$

$$= \frac{-2+8i}{3+5i}$$

$$= \frac{(-2+8i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}$$

$$= \frac{-6+10i+24i+40}{9+25}$$

$$= \frac{34+34i}{34}$$

$$\alpha = 1+i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$$

c) $|f(z)| = 1 \Rightarrow$

$$\left|\frac{z-1+4i}{z+4+i}\right| = 1 \Rightarrow \left|\frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A}\right| = 1 \Rightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Rightarrow \Gamma_1 \text{ est la médiatrice du } [AB]$$

d) $f(z)$ **est imaginaire pur ssi** $\begin{cases} f(z) = 0 \text{ ou} \\ argf(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

$\Rightarrow \Gamma_2$Le cercle de diamètre$[AB]$ privé de A

3)

$$z_{n+1} = \frac{\alpha}{2}z_n = \frac{(1+i)}{2}z_n$$

a)

$$z_1 = \frac{(1+i)}{2}z_0$$

$$z_1 = \frac{(1+i)(4+i)}{2} = \frac{4+i+4i-1}{2} = \frac{3+5i}{2}$$

$$z_2 = \frac{(1+i)}{2}z_1 = \frac{(1+i)}{2}\left(\frac{3+5i}{2}\right) = \frac{(1+i)(3+5i)}{4} = \frac{3+5i+3i-5}{4} = \frac{-2+8i}{4}$$

$$z_2 = \frac{-1+4i}{2}$$

b) $V_n = |z_n| \Rightarrow V_{n+1} = |z_{n+1}|$

$$V_{n+1} = \left|\frac{(1+i)}{2}z_n\right|$$

$$= \left|\frac{1+i}{2}\right||z_n|$$

$$V_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}V_n$$

$V_n$est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et de premier terme $V_0 = |z_0| = |4+i| = \sqrt{17}$

c) $S_n = OM_0 + OM_1 + \cdots + OM_n$

$= |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n|$

$= V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

est la somme de $(n+1)$ terme d'un suite géometrique

$$S_n = \frac{\sqrt{17}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{\sqrt{17}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2\sqrt{17}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{17}}{2-\sqrt{2}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\right) = \frac{2\sqrt{17}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{17}(2+\sqrt{2})}{4-2} = \sqrt{17}(2+\sqrt{2})$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 2\sqrt{17} + \sqrt{34}$$

Exercice 3

$f(x) = 2x - 1 + 2e^x.$

. 1a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x - 1 + 2e^x) = -\infty - 1 + 0 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x - 1 + 2e^x) = +\infty - 1 + \infty = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (2x-1)\big) = \lim_{x\to-\infty} (2x - 1 + 2e^x - 2x + 1) = \lim_{x\to-\infty} 2e^x = 0$ **$\Rightarrow$ la courbe (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$ au voisinage de $-\infty$**

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1+2e^x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + 2\frac{e^x}{x}\right) = 2 - 0 + \infty.$**$\Rightarrow$ la courbe (C) admet une branche infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$**

2a) $f'(x) = 2 + 2e^x > 0$

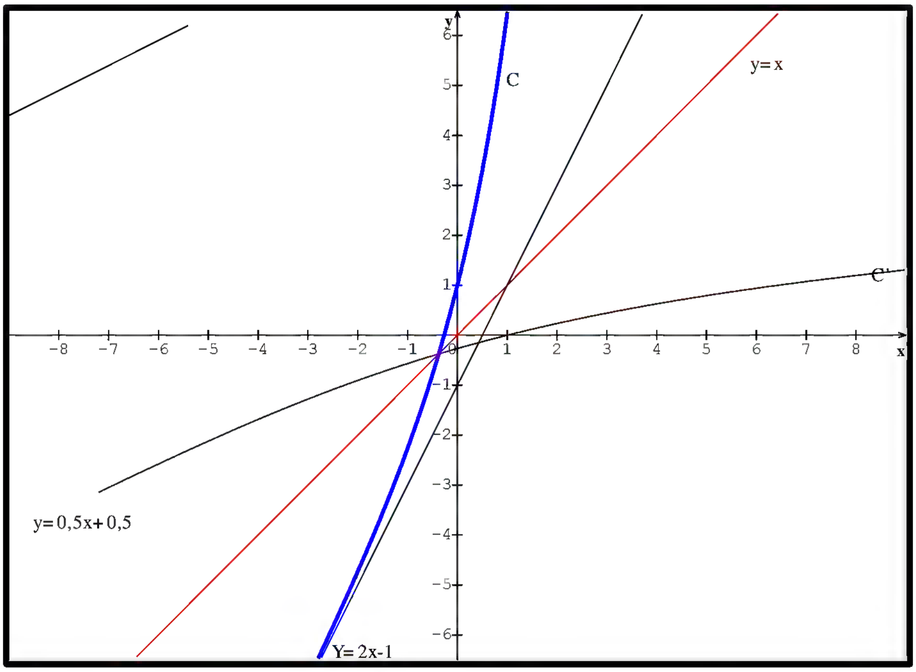
x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

b) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers J=$\mathbb{R}$ d'où f réalise une bijection

c) f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers J et $0 \in J$ donc il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$

$f(-0{,}3) \approx -0{,}11 < 0$; $f(-0{,}2) \approx 0{,}23 > 0$

$f(-0{,}3) \times f(-0{,}2) < 0 \Rightarrow -0{,}3 < \alpha < -0{,}2$



4a)

$f(\alpha)=0 \Rightarrow 2\alpha-1+2e^{\alpha}=0 \Rightarrow 2e^{\alpha}=-2\alpha+1$

$f'(\alpha)=2+2e^{\alpha}$ remplaçons $2e^{\alpha}$ par $-2\alpha+1 \Rightarrow$

$f'(\alpha)=2-2\alpha+1=3-2\alpha$

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha) \Rightarrow y=(3-2\alpha)(x-\alpha)=(3-2\alpha)x-\alpha(3-2\alpha)$

b) $f(\alpha)=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=\alpha$

$$(\mathrm{f}^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{f'(\alpha)}=\frac{1}{3-2\alpha}$$

5a) $U_n=f(n)=2n-1+2e^{n}=v_n+w_n$

$U_n$est la somme de deux suites l'une arithmétique $v_n=2n-1$ de raison $r=2$ et de premier terme $v_0=-1$

et l'autre géométrique définie par $w_n=2e^{n}$ de raison $q=e$ et de premier terme $w_0=2$

b) $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n=S_{V_n}+S_{W_n}$

$$=\frac{(n+1)(V_0+v_n)}{2}+\frac{w_0}{1-q}(1-q^{n+1})$$

$$S_n=\frac{(n+1)(-1+2n-1)}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=\frac{(n+1)(2n-2)}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=\frac{2n^2-2n+2n-2}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=\frac{2n^2-2}{2}+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$S_n=n^2-1+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} n^2-1+\frac{2}{1-e}(1-e^{n+1})=+\infty-1+\infty=+\infty$$

Exercice 4

$g(x)=x-3+3lnx$

1a) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x-3+3lnx = 0-3-\infty = -\infty$

, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x-3+3lnx = +\infty-3+\infty = +\infty$

b)$g'(x) = 1+\frac{3}{x} > 0$

x	0		$+\infty$
g'(x)		+	
g(x)		$-\infty \nearrow$	$+\infty$

2a) g est continue et strictement croissante de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ donc il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$

$g(1,59) \approx -0,0187 < 0$ et $g(1,60) \approx 0,010 > 0$

$g(1,59) \times g(1,60) < 0 \Rightarrow 1,59 < \alpha < 1,60$

b) Signe de g :

X	0		α		$+\infty$
g(X)		-	0	+	

Partie B

1a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x-3)lnx}{x} = -3\times(-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} lnx - \frac{3lnx}{x} = +\infty - 0 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)-lnx) = \lim\limits_{x\to +\infty} lnx - \frac{3lnx}{x} - lnx = \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{3lnx}{x} = -3\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}$ f(x)$= +\infty \Rightarrow$ la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)-lnx) = 0 \Rightarrow$ **la fonction $h(x) = lnx$ est asymptote à f au voisinage de $+\infty$**

2a) $f(x) = lnx - \frac{3lnx}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \left(\frac{\frac{3}{x}\times x - 3lnx}{x^2}\right) = \frac{1}{x} - \left(\frac{3-3lnx}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2} - \left(\frac{3-3lnx}{x^2}\right) = \frac{x-3+3lnx}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$x^2 > 0 \Rightarrow$ **le signe de$f'(x)$ est celui de $g(x)$**

b) $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha - 3 + 3ln\alpha = 0$

$\Rightarrow 3ln\alpha = 3 - \alpha$

$\Rightarrow ln\alpha = \frac{3-\alpha}{3}$

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha-3)ln\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha-3)\left(\frac{3-\alpha}{3}\right)}{\alpha} = \frac{(\alpha-3)\left(\frac{3-\alpha}{3}\right)}{\alpha} = \frac{(3-\alpha)(\alpha-3)}{3\alpha}$$

$$= \frac{-(\alpha-3)(\alpha-3)}{3\alpha}$$

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha-3)^2}{3\alpha}$$

$f(\alpha) \approx -0,4$

c)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3a) $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

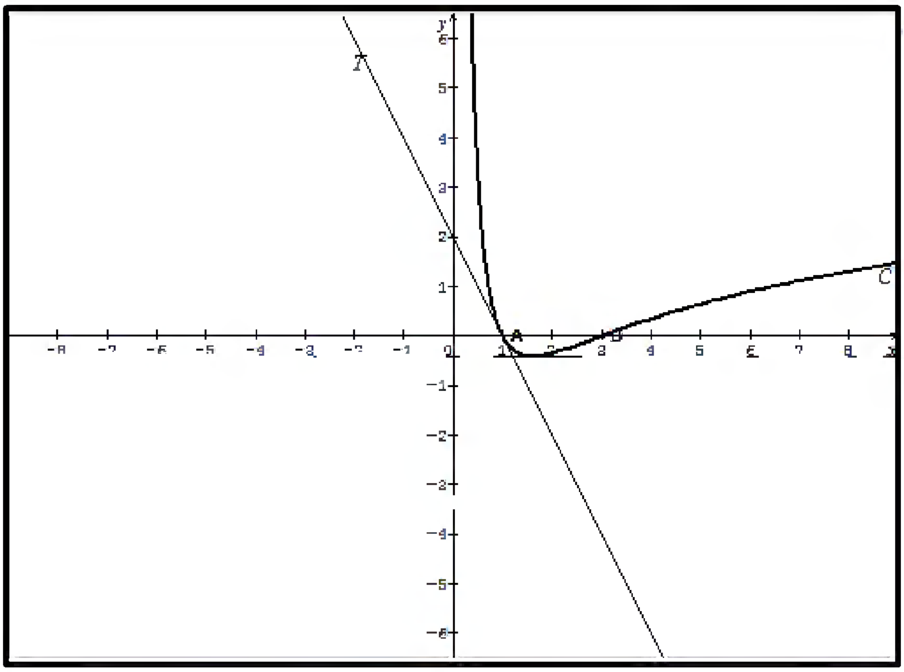
$f'(1) = -2$ **.** $f(1) = 0$ **,les coordonnées du point A(1,0)**

Équation de la tangente T en A : $y = -2(x-1) = -2x + 2$

b) Intersection de (C) avec (OX) $\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{(x-3)\ln x}{x} = 0$$
$$\Rightarrow (x-3)\ln x = 0$$
$$\begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ ou \ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$
$$S = \{1, 3\}$$

Les coordonnées des points d'intersections de (C) avec (OX) sont : $A(1,0)$ *et* $B(3,0)$



c) $2x^2 - mx + x\ln x - 3\ln x = 0$

$mx = 2x^2 + x\ln x - 3\ln x$

$m = \dfrac{2x^2 + x\ln x - 3\ln x}{x}$

$m = 2x + \ln x - \dfrac{3\ln x}{x}$

$-2x + m = \ln x - \dfrac{3\ln x}{x}$

$-2x + m = f(x)$

Les solutions de l'équation $f(x) = -2x + m$ **sont les abscisses des points d'intersections entre la courbe (C) de f et la droite** (D_m) **d'équation** $y = -2x + m$

m	$-\infty$	2	$+\infty$
nombre de solutions	0 solution	1solution	2solutions

4a)

$$J=\int_1^e \frac{lnx}{x}dx=\left[\frac{(lnx)^2}{2}\right]_1^e=\frac{1}{2}$$

b) calcukons I à l'aide d'une I .P.P

$$I=\int_1^e lnxdx$$

On pose $\begin{cases} u=lnx \Rightarrow u'=\frac{1}{x} \\ v'=1 \Rightarrow v=x \end{cases}$

$$I=[xlnx]_1^e-\int_1^e dx$$

$$I=e-[x]_1^e$$

$$I=e-e+1$$

$$I=1$$

c)signe de f

x	0		1		3		$+\infty$
lnx		-	0	+		+	
x-3		-		-	0	+	
f(x)		+	0	-	0	+	

sur $[1,e]$ $f(x)\leq 0 \Rightarrow S=-\int_1^e f(x)dx$

$$S=-\int_1^e f(x)dx=-\left(\int_1^e lnxdx-3\int_1^e \frac{lnx}{x}dx\right)$$

$$S=-(I-3J)$$

$$S=-\left(1-\frac{3}{2}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}$$

RÉPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
DIRECTION DES EXAMENS ET DE L'ÉVALUATION
SERVICE DES EXAMENS

Série : Sciences de la nature
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4heures
Coefficient : 6

Baccalauréat 201 4 session Complémentaire

Exercice 1 (3 points)

Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte 8 questions indépendantes. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule correcte. Un élève répond au hasard à chaque question du QCM. On note X le nombre de réponses correctes qu'il a données. On considère les événements suivants :

A : L'élève a toutes les réponses correctes.
B : L'élève n'a aucune réponse correcte.
C : L'élève a au moins une réponse correcte.
D : L'élève a exactement deux réponses correctes.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble de valeurs de X est :	$\{0,1,2,...,8\}$	$\{0,1,...,4\}$	$\{1,2,...,8\}$
2	La probabilité de l'événement A est :	$\frac{1}{4}\times 8$	$\left(\frac{1}{4}\right)^8$	$\left(\frac{1}{8}\right)^8$
3	La probabilité de l'événement B est :	$1-\left(\frac{1}{4}\right)^8$	$\left(\frac{3}{4}\right)^8$	$1-\left(\frac{7}{8}\right)^8$
4	La probabilité de l'événement C est :	$1-\left(\frac{1}{4}\right)^8$	$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^7$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^8$
5	La probabilité de l'événement D est :	$C_8^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^6$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^6$
6	Le nombre de réponses correctes de l'élève, que l'on peut espérer est :	8	6	2

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère les nombres : $z_1=\frac{-1+7i}{3+4i}$, $\quad z_2=(1+i)^2 \quad$ **et** $z_3=\frac{4-8i}{1+3i}$.

a) Donner la forme algébrique de chacun des nombres z_1, z_2 **et** z_3.

b) Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres z_1, z_2 **et** z_3.

2.a) Placer dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ **les points** A, B **et** C **d'affixes respectives** $z_A=1+i$, $z_B=2i$ **et** $z_C=-2-2i$.

b) Montrer que le triangle ABC **est rectangle .**

c) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z tel que : $\left|\frac{z+2+2i}{z-2i}\right|=1$.

d) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Placer D.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+2z+10=0$.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2+2x+1)e^x$

Soit C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que la courbe C admet deux tangentes horizontales que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variation f.

3) Déterminer l'intersection de C avec les axes des coordonnées puis construire C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0 et calculer $(g^{-1})'(1)$.

5.a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$.

Exercice 4 (7 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=2-x-\ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $1{,}55\le\alpha\le1{,}56$

c) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=(1-\frac{1}{x})(1-\ln x)$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2.a) Calculer la dérivée $f'(x)$. Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Tracer (C).

4.a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $I=\int_1^x \ln t\,dt$.

b) En remarquant que $f(x)=1-\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ln x$, donner une primitive F de f sur $[1;+\infty[$.

c) Calculer l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Fin

Corrigé baccalauréat 2014 session complémentaire

Exercice 1 :

Question N°	1	2	3	4	5	6
Réponse	A	B	B	C	A	C

Exercice 2 :

1° a) $z_1 = \dfrac{-1+7i}{3+4i} = \dfrac{(-1+7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{25+25i}{25} = 1+i$.

$z_2 = (1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$.

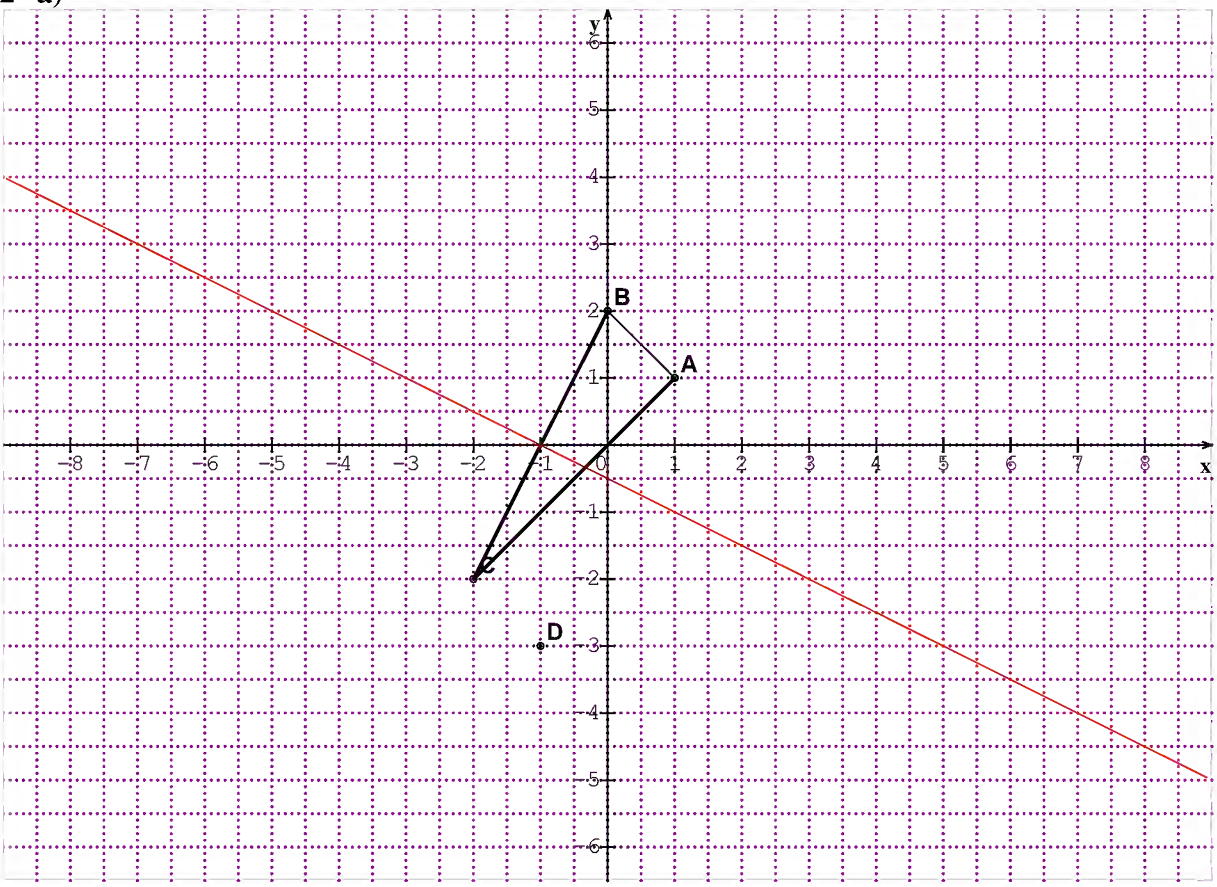
$z_3 = \dfrac{4-8i}{1+3i} = \dfrac{(4-8i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{-20-20i}{10} = -2-2i$.

b) $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = 2(0+i) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

$z_3 = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$.

2° a)



b) On a : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{2i-1-i}{-2-2i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{-2(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{-4} = -\frac{1}{2}i$;

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Le triangle ABC est rectangle en A.

c) $M \in \Delta \Leftrightarrow \frac{|z-(-2-2i)|}{|z-2i|} = \frac{MC}{MB} = 1$. L'ensemble est la médiatrice du segment $[BC]$.

d) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$

$z_D = -2-2i-2i+1+i = -1-3i$.

3° 1° Résolution de : $z^2+2z+10=0$. $\Delta' = (1)^2 - 1\times 10 = -9 = (3i)^2$; $z_1 = -1+3i$ et $z_2 = -1-3i$.

Exercice 3 :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2+2x+1)e^x$.

1° a) Écrivons $f(x) = x^2e^x + 2xe^x + e^x$. On a : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ainsi que $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (Limites remarquables).

On peut écrire $x^2e^x = \left(xe^{\frac{x}{2}}\right)^2$. En posant $t = \frac{x}{2}$, on trouve $x^2e^x = (2te^t)^2$ ($x\to-\infty \Leftrightarrow t\to-\infty$). Il vient : $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = \left(2\lim_{t\to-\infty} te^t\right)^2 = 0$; soit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. La droi te d'équation : $y=0$ est une asymptote horizontale à (C), en $-\infty$.

b) On a : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+1) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On peut écrire $\frac{f(x)}{x} = \left(x+2+\frac{1}{x}\right)e^x$ et

$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{1}{x}\right) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty$. On en déduit que la branche infinie en $+\infty$ est de direction (Oy).

2° a) $f'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x+1)e^x = (x^2+4x+3)e^x$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow (x=-3 \text{ ou } x=-1)$

(C) admet deux tangentes horizontales aux points d'abscisses $x=-3$ et $x=-1$ d'équations respectives : $y = \frac{4}{e^3}$ et $y=0$.

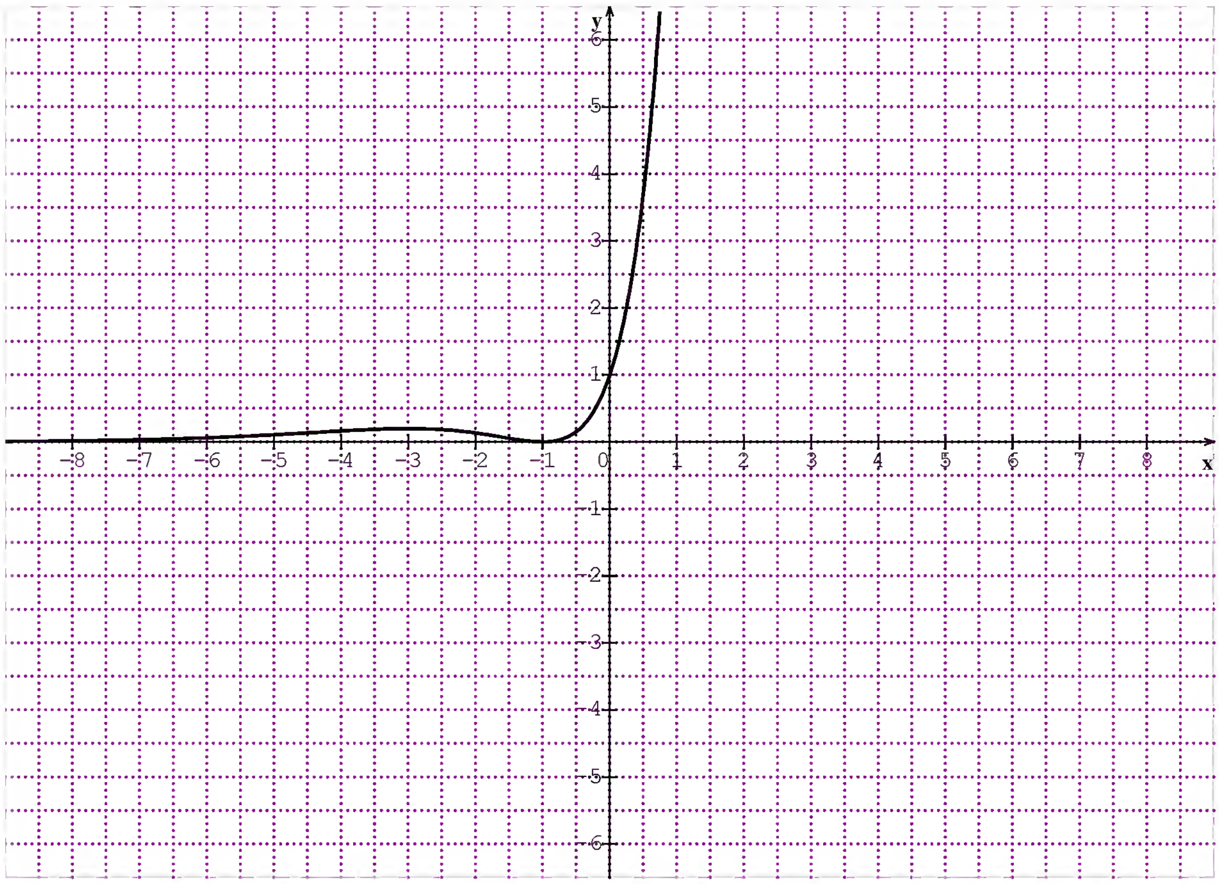
b) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3°) $f(0)=1$ donc $(C)\cap(y'Oy)=\{A(0,1)\}$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ donc $(C)\cap(x'Ox)=\{B(-1,0)\}$.

Tracé de (C).



4° a) La fonction g est continue et strictement croissante de $I=[0,+\infty[$ sur $J=[1,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de I sur J.

b) On a : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=3x+1$; $g(0)=1 \Leftrightarrow g^{-1}(1)=0$ donc $\left(g^{-1}\right)'(1)=\dfrac{1}{g'(0)}=\dfrac{1}{3}$.

5° a) Soit $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$ telle que $F'(x)=f(x)$.

$F'(x)=(2ax+b)e^x+\left(ax^2+bx+c\right)e^x=\left(ax^2+(2a+b)x+b+c\right)e^x$. En identifiant avec l'expression de $f(x)$, on trouve : $\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=2 \\ b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$. Donc $F(x)=\left(x^2+1\right)e^x$.

b) L'aire en unités d'aire est : $A=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_{-1}^{0}=F(0)-F(-1)=1$.

Exercice 4 :

Partie A : g la fonction définie sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ par : $g(x)=2-x-\ln x$

1° a) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}(2-x)=2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to 0^+} g(x)=+\infty$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = -1 - \frac{1}{x} < 0$

.

x		0		$+\infty$
$g'(x)$			$-$	
$g(x)$		$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2° a) La fonction g est continue et strictement décroissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $J = \mathbb{R}$.

b) On a $0 \in \mathbb{R}$, il existe α unique de $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $g(1{,}55) \times g(1{,}56) < 0$.

c) Le signe de $g(x)$ est :

x		0		α		$+\infty$
$g(x)$			$+$	0	$-$	

Partie B

f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(1 - \ln x)$

1° a) On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to 0^+} f(x) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = (1) \times (-\infty) = -\infty$.

On a : $\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = (1) \times (0) = 0$.

b) La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale.

La branche infinie, en $+\infty$, est de direction (Ox).

2° a) $f'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2 - x - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

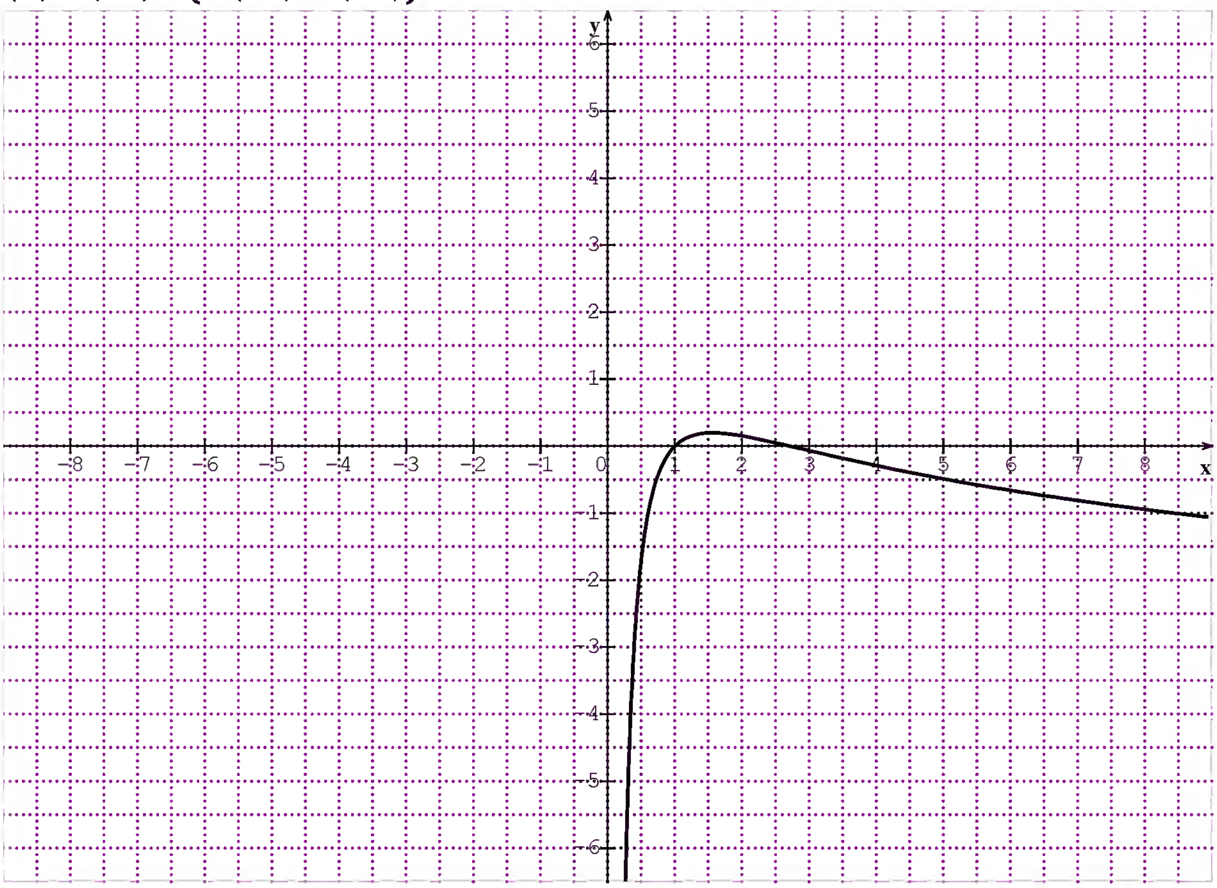
b) On a : $f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(1 - \ln \alpha)$; Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 - \alpha$. Par suite $f(\alpha) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)(1 - 2 + \alpha) = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$.

c) Le TV de f :

x		0		α		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3° On résout l'équation $f(x)=0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)=0 \Leftrightarrow (x=1 \text{ ou } x=e)$.

$(C)\cap(Ox)=\{A(1,0);B(e,0)\}$



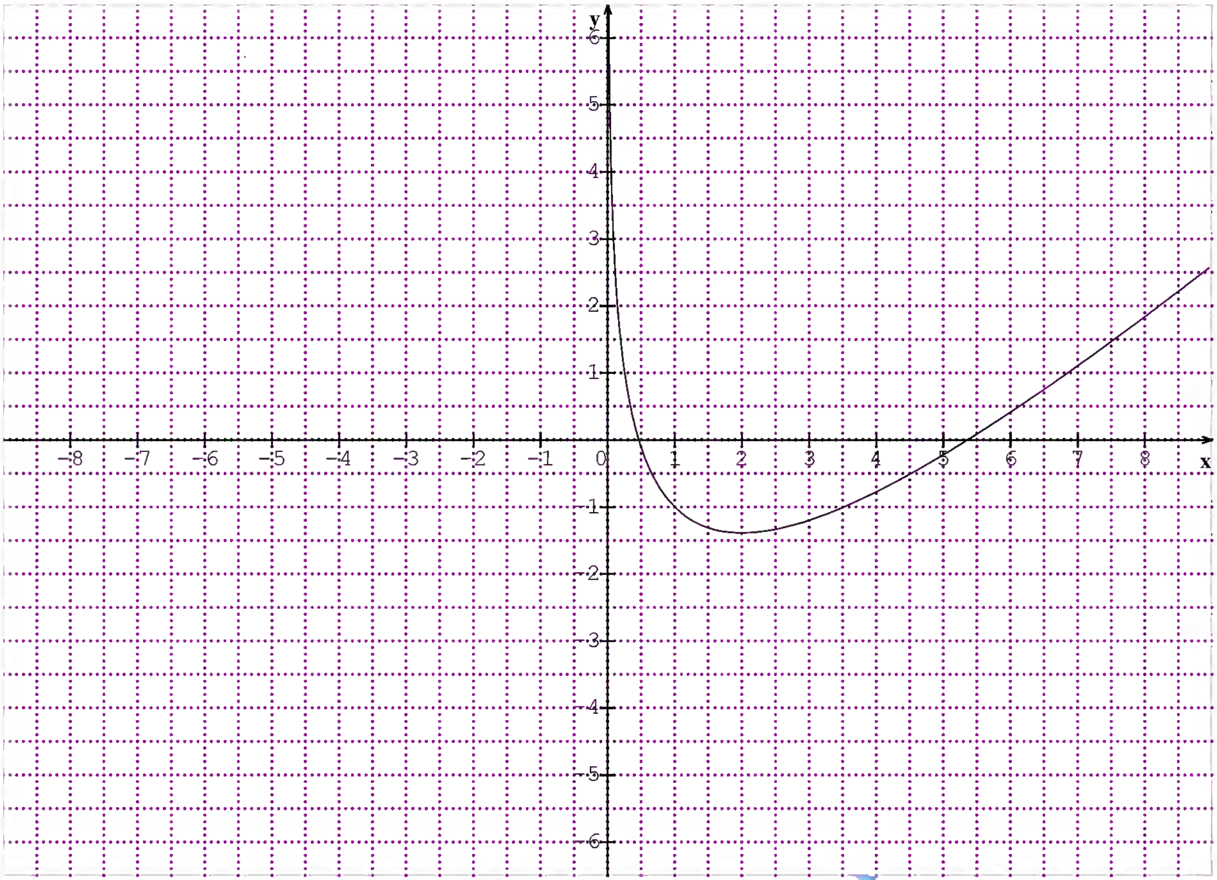
4° a) Soit $\int_1^x \ln t dt$. **On procède par intégration par parties en posant :** $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v(t)=\ln t \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(t)=t \\ v'(t)=\frac{1}{t} \end{cases}$. $\int_1^x \ln t dt=[t\ln t]_1^x-\int_1^x dt = x\ln x-[t]_1^x = x\ln x - x + 1$

b) Une primitive de f est $F(x)=\int_1^x\left(1-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\ln t\right)dt = 2x - x\ln x - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

c) L'aire demandée est : $S=\int_1^e f(x)dx=[F(x)]=F(e)-f(1)$.

Donc $S = 2e - e - 1 + \frac{1}{2} - 2 = e - \frac{5}{2}$ **ua**



b) L'équation $2x-2-m-2\ln x=0 \Leftrightarrow x-2-2\ln x=-x+m \Leftrightarrow f(x)=-x+m$. Toute solution de l'équation est l'abscisse d'un point commun à (C) et la droite $D_m : y=-x+m$.

Valeurs de m	Nombre de solutions
$m<0$	0
$m=0$	1 une solution double
$m>0$	2

7° a) Soit $\int_1^2 \ln x dx$. On procède par intégration par parties en posant : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$. $\int_1^2 \ln x dx=[x\ln x]_1^2-\int_1^2 dx=2\ln 2-[x]_1^2=2\ln 2-1$

b) L'aire demandée est $A=-\int_1^2 f(t)dt=-\int_1^2 (t-2-2\ln t)dt \Leftrightarrow$

$A=-\left[\dfrac{1}{2}(t-2)^2\right]_1^2+2\int_1^2 \ln x dx=\dfrac{1}{2}+2(2\ln 2-1)=-\dfrac{3}{2}+4\ln 2$ ua.

Exercice 4:

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=xe^x-1$

1° a) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$, limite remarquable, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$. Aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

b) $g'(x)=1\times e^x+x\times e^x-0=(1+x)e^x$. $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$-1 \searrow$	$-1-\frac{1}{e}$	$\nearrow +\infty$

2° a) L'expression $g(x)$ est strictement négative sur $]-\infty,-1]$ tandis que g réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $\left[-1-\frac{1}{e},+\infty\right[$, donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α. Comme $g(0.5)\times g(0.6)<0$, alors $0.5<\alpha<0.6$.

b) D'après le TV de g on a : $g(]-\infty,\alpha])=\left[-1-\frac{1}{e},0\right]$ donc, si $x\le\alpha$ alors $g(x)\le 0$ et $g([\alpha,+\infty[)=[0,+\infty[$ donc, si $x\ge\alpha$ alors $g(x)\ge 0$.

3° La fonction f est définie sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-x}{x+1}$

a) On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-}(e^x-x)=1-\frac{1}{e}>0\\ \lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)=0^-\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$; On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+}(e^x-x)=1-\frac{1}{e}>0\\ \lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)=0^+\end{cases}$ donc

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ ce qui veut dire que la droite d'équation : $x=-1$ est une asymptote verticale

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x+1}-1+\frac{1}{x+1}\right)=-1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x+1}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=0$ ce qui s'interprète par le fait que la droite d'équation : $y=-1$ est une asymptote horizontale en $-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\times\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)=1$.

On peut écrire $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^x}{x^2}\times\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)$. Or $\dfrac{e^x}{x^2}=\dfrac{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2}{4\times\frac{x^2}{4}}=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2$. On pose $t=\dfrac{x}{2}$ alors $(x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\times\left(\frac{e^t}{t}\right)^2\times\frac{2t}{2t+1}-\frac{1}{2t+1}\right)=+\infty$.

On en déduit que la branche infinie en $+\infty$ est de direction (Oy).

b) $f'(x)=\dfrac{(e^x-1)(x+1)-1\times(e^x-x)}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x+e^x-x-1-e^x+x}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x-1}{(x+1)^2}$ **ou encore** $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

c) Tableau de variation de f .

d) On a : $f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha-\alpha}{\alpha+1}$ **; Or** $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha-1=0 \Leftrightarrow e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$. **Par suite** $f(\alpha)=\dfrac{\frac{1}{\alpha}-\alpha}{\alpha+1}=\dfrac{1-\alpha^2}{\alpha^2+\alpha}$.

4° Tracé de la courbe