Bac. Session de Juin 1997 T.SCExp

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ points)$

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 1)e^{-3x}$.
Trouve trois nombres réels a ; b et c tels que la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$ soit une primitive de f dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2………………..………………………………………………$(5\ points)$

Soit l'application $f: [0\ ;\ +\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{x^2}{x^2+1}$$

1) Trouve l'intervalle J tel que $J = f([0\ ;\ +\infty[\ )$
2) Montre que f est une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ sur J.
3) Représente graphiquement la courbe (C_f) de la fonction f et celle de sa bijection réciproque $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère orthonormé.
$(On\ ne\ demande\ pas\ d'expliciter\ l'application\ reciproque\ f^{-1}.)$

Problème………………………...………...……………………$(10\ points)$

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$
1) Dresse le tableau de variation de g.
2) Calcule $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\,)$ (unité graphique 2 cm)
1) Dresse le tableau de variation de f.
2) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $(\alpha < \beta)$
3) a) Montre que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f.
b) Etudie le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduis la position de (C) et (Δ).
4) Trace (C) et (Δ) dans le même repère.

Correction Bac 1997 **T.SCExp**

Exercice 1……………………………………………………..……$(5\ points)$

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 1)e^{-3x}$.
Trouvons trois nombres réels a ; b et c tels que la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$ soit une primitive de f dans $\mathbb{R}$.

F est une primitive de f si et seulement si $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.
Avec $\mathrm{F}'(x) = [-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c]e^{-3x}$.
$\mathrm{F}'(x) = f(x) \Leftrightarrow [-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c]e^{-3x} = (x^2 - 1)e^{-3x}$

$$\Leftrightarrow -3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = 0 \\ b - 3c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{2}{9} \\ c = \frac{7}{27} \end{cases}$$

D'où $F(x) = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{7}{27}\right) e^{-3x}$

Exercice 2……………….…………………………………………$(5\ points)$

Soit l'application f: $[0\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \to \frac{x^2}{x^2+1}$$

1) Trouvons l'intervalle J tel que $J = f([0\,;\,+\infty[\,)$

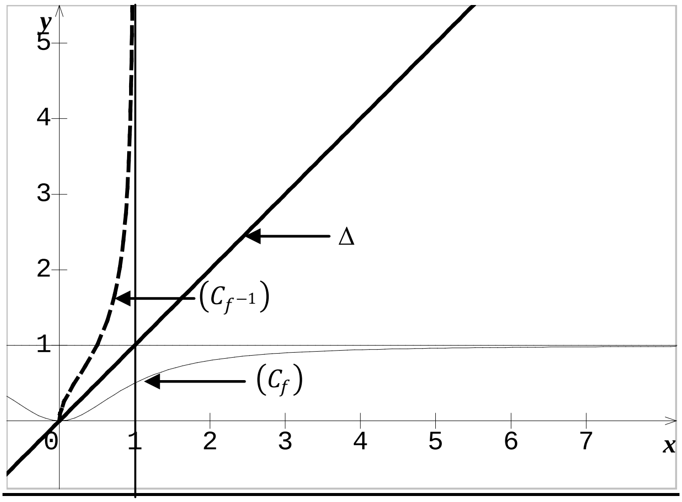
On a $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ => $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ => $\forall x \in [0\,;\,+\infty[,\ f'(x) > 0$

Alors$\forall x \in [0\,;\,+\infty[,\ f$ est strictement croissante de $[0\,;\,+\infty[$ vers l'intervalle :
$J = f([0\,;\,+\infty[\,)$ .Avec $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
=> $J = f([0\,;\,+\infty[\,) = [0\,;\,1[$

2) Montrons que f est une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ sur J.
f étant strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors elle réalise une bijection de $[0\,;\,+\infty[$ vers J.

3) Représentons graphiquement la courbe (C_f) de la fonction f et celle de sa bijection réciproque $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1},dans le même repère orthonormé.
Pour la construction (C_f) et $(C_{f^{-1}})$, se référer au théorème suivant :

Théorème :
La courbe représentative d'une fonction et celle de sa fonction réciproque sont symétrique par rapport à la première bissectrice Δ d'équation $y = x$.



<u>Problème</u>……………………………..………..……………………$(\mathbf{10}\ \boldsymbol{points})$

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dressons le tableau de variation de g.

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} -x^2 + 1 - \ln x = -(0)^2 + 1 - (-\infty) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + 1 - \ln x = -(+\infty)^2 + 1 - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$

$g(x) = -x^2 + 1 - \ln x \Rightarrow g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right)$.

Alors $\forall x \in\ ]\ 0\ ;\ +\infty[\ \ g'(x) < 0$. D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

2) Calculons $g(1)$ puis en déduis le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

$g(x) = -x^2 + 1 - \ln x \Rightarrow g(1) = 0$

Alors d'après le tableau de variation de g, on a :

$\forall x \in\ ]\ 0\ ;\ 1[\ \ g(x) > 0$ et $\forall x \in\ ]\ 1\ ;\ +\infty[\ \ g(x) < 0$

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe dans le repère orthonormé $(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) Dressons le tableau de variation de f.

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} = -\frac{1}{2}(0) + 1 + \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} = -\frac{1}{2}(+\infty) + 1 + \frac{1}{2}(0) = -\infty$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1 - lnx}{2x^2} = \frac{-x^2 + 1 - lnx}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$

$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[$, $2x^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après **Partie A 2)**, on a :

$\forall x \in \left]0\,;1\right[$ $g(x) > 0 \Rightarrow$ $\forall x \in \left]0\,;1\right[$ $f'(x) > 0$
et
$\forall x \in \left]1\,;+\infty\right[$ $g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in \left]1\,;+\infty\right[$ $f'(x) < 0$

x	0		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$			0			$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $(\alpha < \beta)$
D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in \left]0\,;1\right[$ f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $\left]0\,;1\right[$ vers $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une première solution α
De même , $\forall x \in \left]1\,;+\infty\right[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$ vers $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une deuxième solution β

3) a) Montrons que la droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f.
La droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f si et seulement si
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x}\right) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{lnx}{2x} + \frac{1}{2}x - 1$

$= \lim \frac{lnx}{2x} = \lim \frac{1}{2} \bullet \frac{lnx}{x} = \frac{1}{2}(0) = 0$

$x \to +\infty \qquad x \to +\infty$

D’où la droite (Δ)d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f

b) Etudions le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduis la position de (C) et (Δ).

L’étude du signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ nous permet d’en déduis que :

- $\forall x \in]\,0\,;\,1[\,;$ (C) est en dessous de la droite (Δ)

- $\forall x \in]\,1\,;\,+\infty[\,;$ (C) est au dessus de la droite (Δ)

4) Traçons (C) et (Δ) dans le même repère.