Correction bac 2021 - Série D

Exercice 1

1 **a.** Comme $(2i)^3 + 8i = 8i^3 + 8i = -8i + 8i = 0$, alors $a = 2i$ est une solution de l'équation $(E) : z^3 + 8i = 0$.

b.

$$\begin{aligned}(z-2i)(z^2+2iz-4) &= z^3 + 2iz^2 - 4z - 2iz^2 + 4z + 8i\\ &= z^3 + 2iz^2 - 2iz^2 - 4z + 4z + 8i\\ &= z^3 + 8i\end{aligned}$$

c. Factorisons l'expression $z^2 + 2iz - 4$

Le discriminant réduit étant : $\delta = i^2 + 4 = 3$, on en déduit que les solutions de l'équation $z^2 + 2iz - 4 = 0$ sont : $z_1 = \dfrac{-i-\sqrt{3}}{1} = -i - \sqrt{3}$ et $z_2 = \dfrac{-i+\sqrt{3}}{1} = -i + \sqrt{3}$.

Solutions de l'équation (E)

$$\begin{aligned}z^3 + 8i = 0 &\iff (z-2i)(z^2+2iz-4) = 0\\ &\iff z - 2i = 0 \text{ ou } z^2 + 2iz - 4 = 0\\ &\iff z = 2i \text{ ou } z = -i - \sqrt{3} \text{ ou } z = -i + \sqrt{3}\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (E) sont l'ensemble $S = \{2i\ ;\ -i-\sqrt{3}\ ;\ -i+\sqrt{3}\}$.

2 **a.** $u = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} - 3i} = -\dfrac{(\sqrt{3}-3i)(\sqrt{3}-3i)}{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En remarquant que $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$, on en déduit que :

- $|u| = 1$;
- $\arg(u) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

b.

Comme $|u| = \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$. Alors $|z_C - z_A| = |z_B - z_A|$ c'est à dire $AC = AB$.

Le triangle ABC étant isocèle en A, on en déduit que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ [2\pi]$

Or $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi] = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (D'après 2.a.).

Donc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Donc le triangle ABC est équilatéral.

3 **a.** Soit $z' = az + b$, l'expression complexe de la similitude directe S.

$$\begin{cases} S(A) = A \\ S(C) = I \end{cases} \iff \begin{cases} a \times 2i + b = 2i & (1) \\ a(\sqrt{3} - i) + b = -i & (2) \end{cases}.$$

En multipliant l'équation (2) par -1 puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (1), on obtient $a = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

En remplaçant a par $\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ dans l'équation (1), on obtient $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

D'où l'écriture complexe de S :

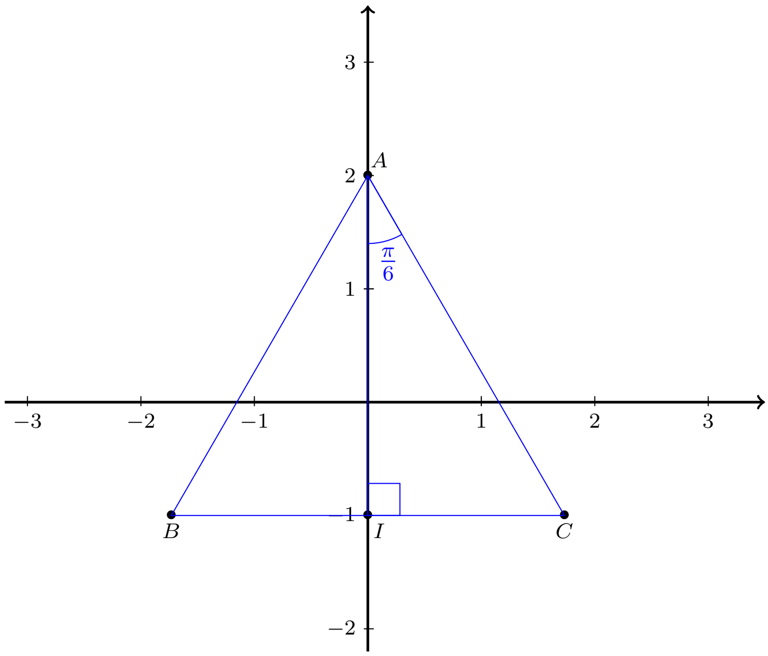
$$z' = \left(\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

b. $|a| = \left|\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où $a = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.

S est la similitude d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de rapport $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Autre méthode



- Angle et rapport de la similitude S

  Comme $S(A) = A$ et $S(C) = I$, alors $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})$ est l'angle de la similitude S et $k = \frac{AI}{AC}$ son rapport.
  Or le triangle ABC est équilatéral et I est le pied de la hauteur issue de A.
  Donc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}) \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et $\frac{AI}{AC} = \cos(\frac{\pi}{6})$ avec $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

  L'angle de la similitude S est $-\frac{\pi}{6}$ et son rapport est $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Expression complexe de la similitude S

  L'expression complexe de la similitude S étant de la forme $z'-z_A = k\,\mathrm{e}^{i\theta}(z-z_A)$, on a :

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}(z-z_A)+z_A \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)(z-2i)+2i \\
&= \left(\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1 **a.**

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{0} \\ f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_2} \end{cases} \iff \left\{\begin{array}{l} -f(\overrightarrow{i})+5f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{0} \\ -2f(\overrightarrow{i})+5f(\overrightarrow{j}) = -2\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j} \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} f(\overrightarrow{i}) = 2\vec{i}-5\vec{j} \\ -5f(\overrightarrow{j}) = -2\vec{i}+5\vec{j} \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} E_1' = E_1-E_2 \\ E_2' = -2E_1+E_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} f(\overrightarrow{i}) = 2\vec{i}-5\vec{j} \\ f(\overrightarrow{j}) = \dfrac{2}{5}\vec{i}-\vec{j} \end{cases}$$

b.

$$\begin{array}{cc} f(\overrightarrow{i}) & f(\overrightarrow{j}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{5} \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \overrightarrow{i} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \overrightarrow{j} \end{array}$$

2 $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(mat(f)) = \begin{vmatrix} 2 & \frac{2}{5} \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 2\times(-1)-(-5)\times\dfrac{2}{5} = 0$.

Comme le déterminant de la matrice de f est nul, alors l'endomorphisme f n'est pas bijectif.

3 **a.**

$$\begin{aligned}
f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'} &\iff f(x\vec{i}+y\vec{j}) = x'\vec{i}+y'\vec{j} \\
&\iff xf(\vec{i})+yf(\vec{j}) = x'\vec{i}+y'\vec{j} \\
&\iff x(2\vec{i}-5\vec{j})+y(\frac{2}{5}\vec{i}-\vec{j}) = x'\vec{i}+y'\vec{j} \\
&\iff (2x+\frac{2}{5}y)\vec{i}+(-5x-y)\vec{j} = x'\vec{i}+y'\vec{j}
\end{aligned}.$$

D'où les coordonnées de $\overrightarrow{u'}$: $\begin{cases} x' = 2x+\dfrac{2}{5}y \\ y' = -5x-y \end{cases}$

b.

$$\begin{aligned} f(f(\vec{i})) = f(2\vec{i} - 5\vec{j}) &= 2f(\vec{i}) - 5f(\vec{j}) \\ &= 2(2\vec{i} - 5\vec{j}) - 5\left(\frac{2}{5}\vec{i} - \vec{j}\right) \\ &= 4\vec{i} - 10\vec{j} - 2\vec{i} + 5\vec{j} \\ &= 2\vec{i} - 5\vec{j} \\ &= f(\vec{i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f(\vec{j})) = f(\frac{2}{5}\vec{i} - \vec{j}) &= \frac{2}{5}f(\vec{i}) - f(\vec{j}) \\ &= \frac{2}{5}(2\vec{i} - 5\vec{j}) - \left(\frac{2}{5}\vec{i} - \vec{j}\right) \\ &= \frac{4}{5}\vec{i} - 2\vec{j} - \frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j} \\ &= \frac{2}{5}\vec{i} - \vec{j} \\ &= f(\vec{j}) \end{aligned}$$

c. f est un endomorphisme tel que $f \circ f(\vec{u}) = f(\vec{u})$ pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$. C'est donc une projection vectorielle de base l'ensemble des vecteurs invariants par f et de direction, le noyau de f.

d. Base de f

La base de f est l'ensemble des éléments invariants par f : $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(\vec{u}) = \vec{u}\}$.
Soit $\vec{u}(x\,,y)$ un élément de la base de f.

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \iff \begin{cases} 2x + \dfrac{2}{5}y = x \\ -5x - y = y \end{cases} \iff 5x + 2y = 0.$$

On en déduit que la base de f est la droite vectorielle d'équation $5x + 2y = 0$, engendrée par le vecteur $(-2\,;5)$.

Direction de f

La direction de f est l'ensemble $\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(\vec{u}) = \vec{0}\}$.
Soit $\vec{u}(x\,,y)$ un élément de la direction de f.

$$f(\vec{u}) = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x + \dfrac{2}{5}y = 0 \\ -5x - y = 0 \end{cases} \iff 5x + y = 0.$$

On en déduit que la direction de f est la droite vectorielle d'équation $5x + y = 0$, engendrée par le vecteur $(-1\,;5)$.

Exercice 3

Partie A

1 La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et est de la forme u^2 où u est la fonction logarithme. Or la dérivée de u^2 est donnée par : $(u^2)' = 2u.u'$.

On en déduit que $\forall x \in]0\,;+\infty[,\quad f'(x) = 2(\ln x).\dfrac{1}{x}$.

2 $f'(x)$ s'annule en $x = 1$ et est du signe de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.
$f'(x) < 0$ pour tout $x \in]0;1[$.
$f'(x) > 0$ pour tout $x \in]1\,;+\infty[$.

La fonction f est décroissante sur $]0;1[$ puis croissante sur $]1\,;+\infty[$.

3 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2 = \underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)}_{-\infty} \times \underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)}_{-\infty} = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)}_{+\infty} \times \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)}_{+\infty} = +\infty.$

4

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

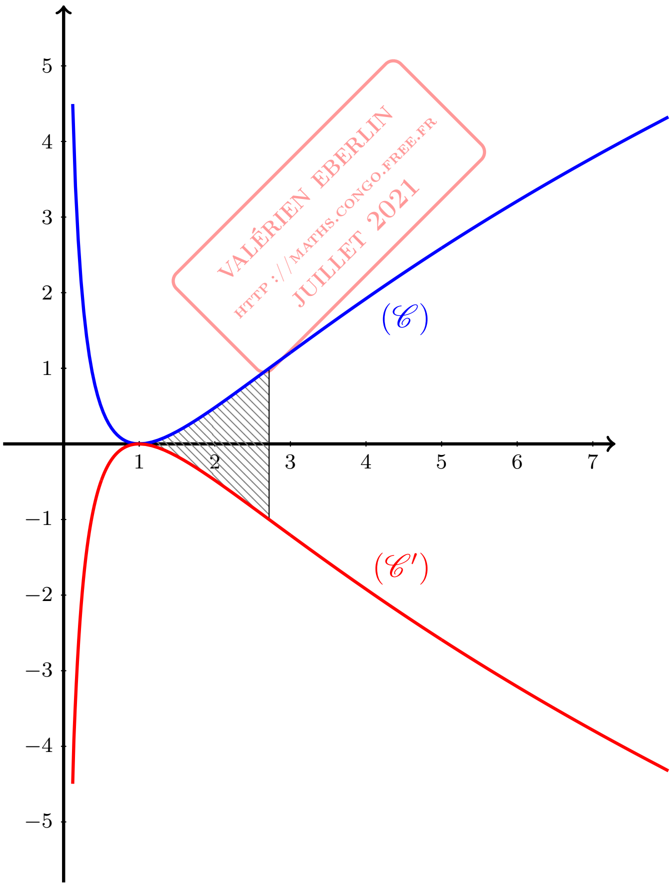
5 Posons $x = \dfrac{1}{u^2}$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{\left(\ln \dfrac{1}{u^2}\right)^2}{\dfrac{1}{u^2}} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} (-2\ln u)^2 u^2 = 4 \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} (u \ln u)^2 = 0$$

car $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} (u \ln u) = 0$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

6



Partie B

1 Si (x, y) est un point de la courbe $(\mathscr{C})$, alors $(x, -y)$ est un point de la courbe $(\mathscr{C}')$.
Les points de la courbe $(\mathscr{C}')$ s'obtiennent à partir de ceux de la courbe $(\mathscr{C})$ par la symétrie axiale d'axe (Oy).

2

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP ://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2021

Partie C

1 La fonction H définie sur $]0\,;+\infty[$, est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et l'on a :

$$\begin{aligned} H'(x) &= (\ln x)^2 + x.\frac{2\ln x}{x} - 2\ln x - 2x.\frac{1}{x} + 2 \\ &= (\ln x)^2 + 2\ln x - 2\ln x - 2 + 2 \\ &= (\ln x)^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Comme $H'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, alors H est une primitive de la fonction f.

2

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} (f(x) - g(x))\,dx &= \int_1^{\mathrm{e}} (f(x) - (-f(x)))\,dx \\ &= 2\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,dx \\ &= 2\left[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= 2(\mathrm{e} - 2) \end{aligned}$$

D'où l'aire $\mathscr{A}$ de la portion cherché est : $\mathscr{A} = 2(\mathrm{e}-2) \times 4\,\mathrm{cm}^2 = 8(\mathrm{e}-2)\,\mathrm{cm}^2$.

Exercice 4

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable X, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable Y.
Dans ce cas, on a : $\sum_i n_{i\bullet} = \sum_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

1

Loi marginale de X.

X	0	1	2	3	4
$n_{i\bullet}$	10	18	27	18	7

Loi marginale de Y.

Y	1	2	3
$n_{\bullet j}$	13	30	37

2

On sait que $\overline{X} = 1,93$ et $\overline{Y} = 2,3$.

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet} x_i^2 - \overline{X}^2 \\ &= \frac{1}{80}\left[10\times(0)^2 + 18\times 1^2 + 27\times 2^2 + 18\times 3^2 + 7\times 4^2\right] - 1,93^2 \\ &= 1,275 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y) &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\bullet j}y_j^2 - \overline{Y}^2 \\ &= \frac{1}{80}\left[13\times(1)^2 + 30\times 2^2 + 37\times 3^2\right] - 2,3^2 \\ &= 0,535\end{aligned}$$

3 L'équation de la droite de régression linéaire de Y en X est donnée par :

$$Y = aX + b \text{ où } a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} \text{ et } b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

Ainsi, $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} = \dfrac{0,44}{1,275} = 0,345$ et $b = 2,3 - 0,345\times 1,93 = 1,634$.

Donc l'équation de la droite de régression linéaire est : $Y = 0,345X + 1,634$.

4 Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}}$.

D'où $\rho_{X,Y} = \dfrac{0,44}{\sqrt{1,275}.\sqrt{0,535}} = 0,533$.