Correction bac 2020 - Série D

Exercice 1

1 $i\overline{z_2} = 1 - 2i \iff \overline{i\overline{z_2}} = \overline{1-2i} \iff -iz_2 = 1 + 2i \iff z_2 = -2 + i.$

En remplaçant z_2 par $-2+i$ dans la première équation $z_1 + z_2 = -3 + i$, on en déduit $z_1 = -1$.

En remplaçant z_2 par $-2+i$ dans la dernière équation $z_2 \times z_3 = -1 - 2i$, on en déduit que $z_3 = \dfrac{-1-2i}{-2+i} = \dfrac{(-1-2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = i$.

D'où $z_1 = -1$; $z_2 = -2 + i$ et $z_3 = i$.

2 **a.** $P(i) = i^3 + (3-2i)i^2 + (1-4i)i - 1 - 2i = -i - (3-2i) + (1-4i)i - 1 - 2i = 0.$

b. Dans l'expression $(z-i)(z-z_0)(z+2-i)$, le terme de degré 0 est $iz_0 \times (2-i)$.

On en déduit, par identification, que $z_0(1+2i) = -1 - 2i$.

D'où $z_0 = \dfrac{-1-2i}{1+2i} = -1$.

c. $P(z) = 0 \iff (z-i)(z+1)(z+2-i) = 0 \iff z = i,\ z = -1$ et $z = -2+i$.

D'où l'ensemble des solutions $\{i\,;\,-1\,;\,-2+i\}$.

3 **a.** L'expression complexe de la rotation R est de la forme $z' - z_A = a(z - z_A)$ où a est un nombre complexe tel que $|a| = 1$.

Comme $R(B) = C$ alors $z_C - z_A = a(z_B - z_A)$. On en déduit que $a = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1+i}{-1+i} = -i$.

D'où l'écriture complexe de R : $z' = -i(z+1) - 1 = -iz - i - 1$.

b. Comme $a = -i = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$, on en déduit que l'angle de rotation de R est $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

1 **a.** $\det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$.

Comme le déterminant de la famille $\{\vec{u},\vec{v}\}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est non nul, alors la famille $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est également une base de $\mathbb{R}^2$.

b.

$$\begin{cases} \vec{i} + \vec{j} = \vec{u} & \Big| E_1 \\ -\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{v} & \Big| E_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\vec{i} = 2\vec{u} - \vec{v} & \Big| E'_1 = 2E_1 - E_2 \\ 3\vec{j} = \vec{u} + \vec{v} & \Big| E'_2 = E_1 + E_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{i} = \dfrac{2}{3}\vec{u} - \dfrac{1}{3}\vec{v} \\ \vec{j} = \dfrac{1}{3}\vec{u} + \dfrac{1}{3}\vec{v} \end{cases}$$

2 **a.** $f(\vec{i}) = f\left(\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}\right) = \frac{2}{3}f(\vec{u}) - \frac{1}{3}f(\vec{v}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{2}{3}(\vec{i}+\vec{j}) + \frac{1}{3}(-\vec{i}+2\vec{j}) = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}$

$f(\vec{j}) = f\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}\right) = \frac{1}{3}f(\vec{u}) + \frac{1}{3}f(\vec{v}) = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} = \frac{1}{3}(\vec{i}+\vec{j}) - \frac{1}{3}(-\vec{i}+2\vec{j}) = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$

b. $f \circ f(\vec{i}) = f\left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}\right) = \frac{1}{3}f(\vec{i}) + \frac{4}{3}f(\vec{j}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}\right) = \vec{i}$

$f \circ f(\vec{j}) = f\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}\right) = \frac{2}{3}f(\vec{i}) - \frac{1}{3}f(\vec{j}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}\right) = \vec{j}$

c. f est un endomorphisme tel que $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$ où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. C'est donc une symétrie vectorielle.

d. La symétrie vectoriel f est telle que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On en déduit que :

- la base $\mathscr{E}$ est l'espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$;
- la direction $\mathscr{D}$ est l'espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{v}$.

Exercice 3

Partie A

1 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^{2-x}$.

b. $h'(x)$ s'annule en $x = 2$ et est du signe de $x - 2$ sur $\mathbb{R}$.
$h'(x) > 0$ pour tout $x \in]2; +\infty[$.
$h'(x) < 0$ pour tout $x \in]-\infty; 2[$.

c.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

2 h est strictement décroissante de $]-\infty; 2]$ sur $[0; +\infty[$. On en déduit que : $\forall x \in]-\infty; 2]$, $0 \leq h(x) < +\infty$.
Et, h est strictement croissante de $[2; +\infty[$ sur $[0; 1[$. On en déduit que : $\forall x \in [2; +\infty[$, $0 \leq h(x) \leq 1$.

Donc $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie B

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x . \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \mathrm{e}^{2-x})}_{=1} = +\infty.$

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR NOVEMBRE 2020

2 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (1 + \mathrm{e}^{2-x}) + x(-\mathrm{e}^{2-x}) = (1-x)\,\mathrm{e}^{2-x} + 1 = h(x)$.

b.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)=h(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

3 **a.** f est une fonction continue, strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$.
Donc f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty;+\infty[$.

b. f et f^{-1} ont même sens de variation.
Comme f admet une tangente horizontale en $x=2$, alors f^{-1} admet une tangente verticale en $f(2)=4$. D'où f^{-1} n'est pas dérivable en 4.
On en déduit le tableau de variation de f^{-1}.

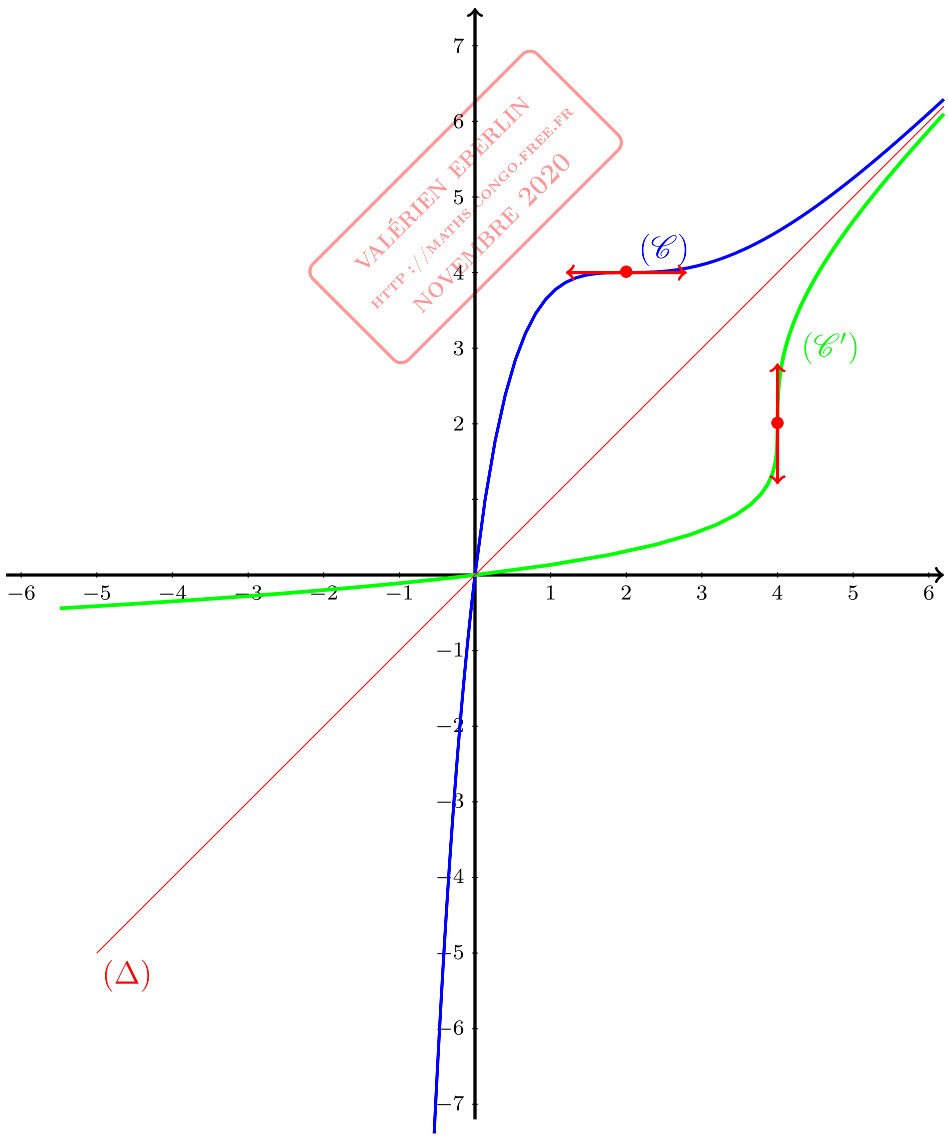
x	$-\infty$		4		$+\infty$
$(f^{-1})'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f^{-1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

4 **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\mathrm{e}^{2-x})=+\infty$.
On en déduit que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{2-x}=0$.
On en déduit que la droite d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

c. On a : $f(x)-x=x\,\mathrm{e}^{2-x}$.
$\forall x>0,\quad f(x)-x>0$. Alors la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (Δ) sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall x<0,\quad f(x)-x<0$. Alors la courbe $(\mathscr{C})$ est en dessous de la droite (Δ) sur $\mathbb{R}_-$.

5



Exercice 4

1

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) \times p(B) \\ &= 0,9 \times 0,95 \\ &= 0,855 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} p(C) &= 1 - p(A \cap B) \\ &= 1 - 0,855 \\ &= 0,145 \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} p(A\cup B) &= p(A)+p(B)-p(A\cap B)\\ &= 0,9+0,95-0,855\\ &= 0,995 \end{aligned}$$