Correction bac 2019 - Série D

Exercice 1

1 **a.** L'équation Z^2-4Z+8 a pour discriminant réduit :$\Delta'=(-2)^2-1\times 8=-4=(2i)^2$. Elle admet donc deux racines distinctes : $Z_1=\frac{2-2i}{1}=2-2i$ et $Z_2=\frac{2+2i}{1}=2+2i$.

b. $|Z_1|=2\sqrt{2}$.

D'où $Z_1=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$.

2 **a.** $U=\dfrac{Z_B}{Z_A}=\dfrac{2+2i}{2-2i}=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=i$.

b. $\left|\dfrac{Z_B-Z_O}{Z_A-Z_O}\right|=|i|=1$. On en déduit que $OA=OB$.

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv\arg\left(\dfrac{Z_B-Z_O}{Z_A-Z_O}\right)[2\pi]=\arg(i)\,[2\pi]=\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$. On en déduit que le triangle OAB est rectangle en O.

Donc OAB est un triangle rectangle isocèle en O.

3 **a.** $Z'=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}Z \iff (Z'-Z_O)=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}(Z-Z_O)$ où $Z_O=0$.

f est donc une rotation de centre $Z_O=0$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

b. Forme trigonométrique de $Z_{A'}$

D'après 1. b., $Z_A=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{4}}$.

D'où : $Z_{A'}=\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}Z_A=\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}\times 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{4}}=2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}=2\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{12})\right)$.

Forme algébrique de $Z_{A'}$

$Z_{A'}=\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}Z_A=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-2i)=(1+\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})$.

c. En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires de la forme géométrique et trigonométrique de $Z_{A'}$, on en déduit que : $\cos(\frac{\pi}{12})=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{12})=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

D'où $\cos(\frac{\pi}{12})=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin(\frac{\pi}{12})=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 2

1 $f(\vec{i})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x'=2\times 1+3\times 0=2\\ y'=-1-2\times 0=-1\end{cases}$.

D'où $f(\vec{i})=2\vec{i}-\vec{j}$.

$f(\vec{j})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x'=2\times 0+3\times 1=3\\ y'=-0-2\times 1=-2\end{cases}$.

D'où $f(\vec{j})=3\vec{i}-2\vec{j}$.

2

$$\begin{array}{cc} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{i} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{j} \end{array}$$

3 $f(\overrightarrow{V})$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x' = 2\times 3 + 3\times(-4) = -6 \\ y' = -3 - 2\times(-4) = 5 \end{cases}$.

L'image du vecteur $\overrightarrow{V}$ est le vecteur $V'(-6;5)$.

4 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$

Comme le déterminant de la matrice associée à l'endomorphisme f est non nul, alors f est un endomorphisme bijectif (automorphisme).

5 **a.** Calcul de $f\circ f(\vec{i})$

$f\circ f(\vec{i}) = f\big((2;-1)\big)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x'' = 2\times 2 + 3\times(-1) = 1 \\ y'' = -2 - 2\times(-1) = 0 \end{cases}$.

D'où $f\circ f(\vec{i}) = \vec{i}$.

Calcul de $f\circ f(\vec{j})$

$f\circ f(\vec{j}) = f\big((3;-2)\big)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x'' = 2\times 3 + 3\times(-2) = 0 \\ y'' = -3 - 2\times(-2) = 1 \end{cases}$.

D'où $f\circ f(\vec{j}) = \vec{j}$.

b. $(\vec{i},\vec{j})$ est une base de $\mathscr{E}$.
De plus, $f\circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f\circ f(\vec{j}) = \vec{j}$.
Donc f une symétrie vectorielle.

c. Base de f
La base de f est l'ensemble : $\{\overrightarrow{u}\in\mathscr{E} \;/\; f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$.
Soit $\overrightarrow{u}(x\,,y)$ un élément de la base de f.

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \iff \begin{cases} 2x + 3y = x \\ -x - 2y = y \end{cases} \iff x + 3y = 0.$$

La base de f est la droite vectorielle d'équation $x + 3y = 0$.

Direction de f
La direction de f est l'ensemble : $\{\overrightarrow{u}\in\mathscr{E} \;/\; f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}\}$.
Soit $\overrightarrow{u}(x\,,y)$ un élément de la direction de f.

$$f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u} \iff \begin{cases} 2x + 3y = -x \\ -x - 2y = -y \end{cases} \iff x + y = 0.$$

La direction de f est la droite vectorielle d'équation $x + y = 0$.

Exercice 3

Partie I

1 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) < 0$.

2

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0

Partie II

1 **a.** $f(x) = g(x) \iff \dfrac{\ln x}{x} = 0 \iff x = 1$.

b. $\forall x \in]0;1[, \quad f(x) - g(x) = \dfrac{\ln x}{x} < 0$. On en déduit que la courbe $(\mathscr{C})$ est en dessous de la courbe $(\mathscr{C}')$ sur $]0;1[$.

$\forall x \in]1;+\infty[\; f(x) - g(x) = \dfrac{\ln x}{x} > 0$. On en déduit que la courbe $(\mathscr{C})$ est en dessus de la courbe $(\mathscr{C}')$ sur $]1;+\infty[$.

2 **a.** $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{u\to+\infty} (-u\ln u + u) = \lim_{u\to+\infty} u \ln u \left(-1 + \frac{1}{\ln u}\right) = -\infty$ où l'on a posé $u = \dfrac{1}{x}$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{\ln x}{x^2}$.

<u>Tableau de signes</u>

$f'(x)$ est du signe de $-\ln x$ et s'annule pour $x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
x^2	‖		$+$		
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

c.

<u>Tableau de variation</u>

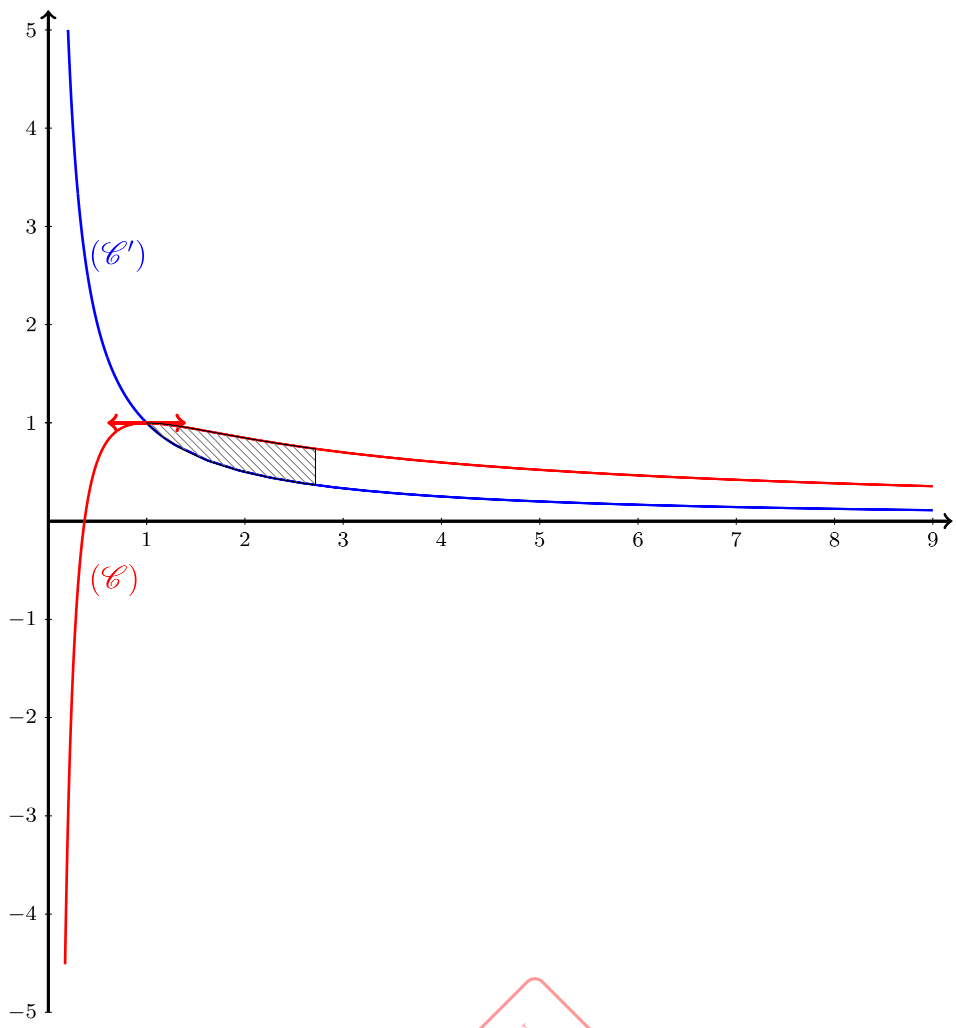
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow$	0

3 Asymptotes

$\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = -\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

Tracés de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$



Partie III

1 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2 . \dfrac{1}{x} . \ln x = \dfrac{\ln x}{x} = k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc h est une primitive de k sur $\mathbb{R}_+^*$.

VALÉRIEN EBERLIN
HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR
JUILLET 2020

2 $\displaystyle\int_1^{e}(f(x)-g(x))\,dx = \int_1^{e} h'(x)\,dx = [h(x)]_1^{e} = \frac{1}{2}\,\text{u.a} = \frac{1}{2}\times 4\,\text{cm}^2 = 2\,\text{cm}^2.$

Exercice 4

1 $\displaystyle \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\,p(X=x_i) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + a\times\frac{3}{8} + 3\times b = \frac{3}{8}(1+a+8b).$

2 **a.** $\mathrm{E}(X) = \dfrac{3}{2} \iff \dfrac{3}{8}(1+a+8b) = \dfrac{3}{2} \iff a+8b=3.$

D'autre part, comme p est une probabilité, alors $\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{8}+b=1$. On en déduit que $b=\dfrac{1}{8}$.

En remplaçant b par $\dfrac{1}{8}$ dans l'équation $a+8b=3$, on obtient $a=2$.

b. $\displaystyle \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p(X=x_i) - \mathrm{E}(X)^2 = 0^2\times\frac{1}{8} + 1^2\times\frac{3}{8} + 2^2\times\frac{3}{8} + 3^2\times\frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$

$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 0,86.$

3

X	$]-\infty\,;0[$	$[0\,;\,1[$	$[1\,;\,2[$	$[2\,;\,3\,[$	$[3\,;+\infty[$
$F(X)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1