Correction bac 2017 - Série C

Exercice 1

a Comme PGCD $(48; 35) = 1$, d'après le théorème de Bézout, l'équation $(E) : 48x+35y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b $48 \times (-8) = -384 = 1 + 35 \times (-11) \equiv 1\,[35]$.
D'où 48 et -8 sont inverses modulo 35.

c

$$\begin{aligned} 48x + 35y = 1 &\iff 48x - 1 = 35(-y), \text{ avec } y \in \mathbb{Z} \\ &\iff 48x - 1 \text{ est un multiple de } 35 \\ &\iff 48x - 1 \equiv 0\,[35] \\ &\iff 48x \equiv 1\,[35] \end{aligned}$$

Les équations $(E) : 48x + 35y = 1$ et $48x \equiv 1\,[35]$ sont équivalentes.

Solution particulière

D'après la question **b.**, $48 \times (-8) + 35 \times 11 = 1$.
D'où $(-8\,; 11)$ est une solution particulière de l'équation (E).

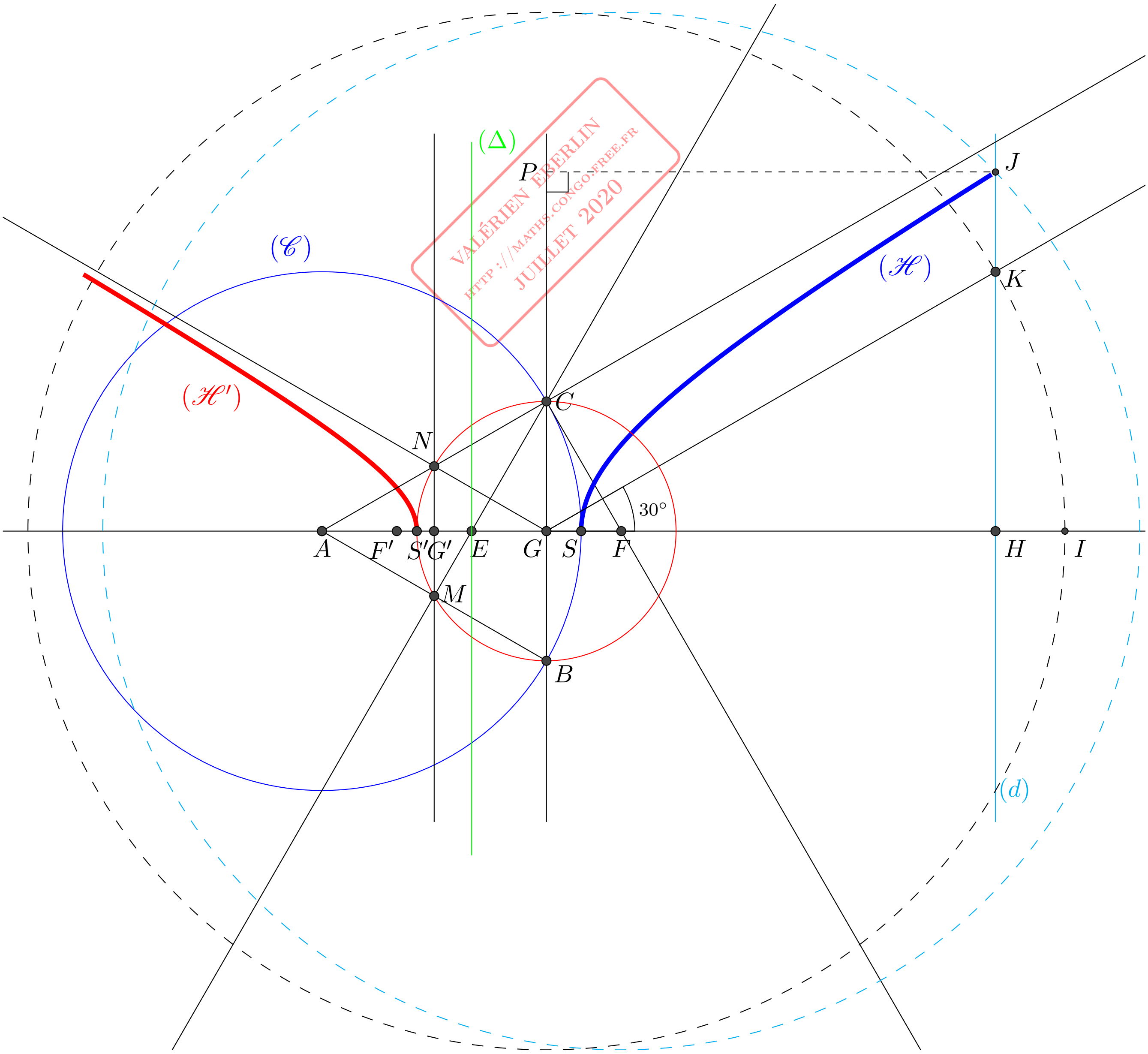
d -8 est une solution particulière de l'équation $48x \equiv 1\,[35]$.
Soit x une solution de l'équation $48x \equiv 1\,[35]$,

$$\begin{cases} 48x \equiv 1\,[35] \\ 48 \times (-8) \equiv 1\,[35] \end{cases} \iff 48x \equiv 48 \times (-8)\,[35] \iff 48(x+8) \equiv 0\,[35] \iff 35 \text{ divise } 48(x+8).$$

Comme 35 est premier avec 48, alors d'après le théorème de Gauss, 35 divise $x + 8$.
Il existe donc un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 8 = 35k$. D'où $x = -8 + 35k$.
Les solutions de l'équation $48x \equiv 1\,[35]$ sont l'ensemble $\{-8 + 35k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

En remplaçant x par $-8+35k$ dans l'équation $(E) : 48x+35y = 1$, on obtient $y = 11-48k$.
L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble $\{(-8+35k\,; 11-48k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2



4 $EA = EC$ car E est le centre de gravité du triangle ABC.

$EA = EF$ car F est le symétrique de A par rapport à E.

On en déduit que $[EC]$ est la médiane relative au $[AF]$ et a pour longueur la moitié de la longueur de $[AF]$.

Donc le triangle ACF est rectangle en C et par conséquent les droites (CF) et (CA) sont perpendiculaires.

5 <u>Axe focal</u>

A étant le centre l'hyperbole, l'axe focal est la perpendiculaire à la directrice (BC) passant par A. C'est par conséquent la droite (AG).

<u>F Foyer de (Γ)</u>

C est un point d'intersection du cercle principal et de la directrice (BC).

On en déduit que la droite (AC) est une asymptote de l'hyperbole (Γ).

Or C est également le projeté orthogonal du point F de l'axe focal (AG) sur l'asymptote (AC). Donc F est un foyer de l'hyperbole (Γ).

6 **a.** Voir la figure ci-dessus.

b. $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{c}{a}$ représente l'excentricité de l'hyperbole (Γ).

Dans le triangle ABF rectangle en B, on a :

$\cos(\widehat{FAB}) = \cos(30°) = \dfrac{AB}{AF}$. D'où $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{1}{\cos(30°)} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

7 Soit K, le point d'intersection de la perpendiculaire à (AH) passant par H et de la parallèle à (AC) passant par G.

$\cos(\widehat{HGK}) = \cos(30°) = \dfrac{GH}{GK}$. D'où $GK = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}GH$.

Le point I est donc le point d'intersection du cercle de centre G de rayon GK et de la demi-droite $[GH)$.

8 Comme $J \in (\Gamma)$, alors $\dfrac{JF}{JP} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ où P est le projeté orthogonale de J sur la directrice (BC).

Or $JP = GH$ et d'après 7., on a : $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}GH = GI$.

On en déduit que $JF = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}JP = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}GH = GI$

J est donc le point d'intersection de la droite (d) et du cercle de centre F de rayon GI.

9 Voir figure.

10 **a.**

Notons l'homothétie h par $h_{(A,\frac{1}{2})}$ et notons $h_{(\Omega,k)}$, l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

Centre de la similitude $h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}$

G est aussi le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Soit Ω, le centre de la similitude s et (Δ) son axe.

Alors s s'écrit aussi en la composée commutative $s = h_{(\Omega,\frac{1}{2})} \circ S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)} \circ h_{(\Omega,\frac{1}{2})}$.

D'où $s \circ s = h_{(\Omega,\frac{1}{4})}$.

On a :

$s(A) = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(A) = G$

$s \circ s(A) = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(G) = h_{(A,\frac{1}{2})}(G) = G'$ où G' est le milieu de $[AG]$.

On en déduit que $h_{(\Omega,\frac{1}{4})}(A) = G'$.

Ou encore $\overrightarrow{\Omega G'} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A}$.

En utilisant la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AG'} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\Omega A}$.

D'où $\overrightarrow{A\Omega} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AG'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.

Donc $\Omega = E$.

Axe de la similitude $s = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}$

L'axe de la similitude (Δ) est la perpendiculaire à la droite (AG) passant par E.

b. <u>Foyer de $(\mathscr{H}')$</u>

$s(F) = h_{(E,\frac{1}{2})} \circ S_{(\Delta)}(F) = h_{(E,\frac{1}{2})}(A) = F'$ où F' est le milieu de $[AE]$.

Comme F est le foyer de $(\mathscr{H})$, alors F', milieu de $[AE]$, est le foyer de $(\mathscr{H}')$.

<u>Directrice de $(\mathscr{H}')$</u>

$s(B) = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(B) = h_{(A,\frac{1}{2})}(B) = M$ où M est le milieu de $[AB]$.

$s(C) = h_{(A,\frac{1}{2})} \circ S_{(BC)}(C) = h_{(A,\frac{1}{2})}(C) = N$ où N est le milieu de $[AC]$.

Comme (BC) est la directrice de $(\mathscr{H})$ associé au foyer F, alors (MN) est la directrice de $(\mathscr{H}')$ associée au foyer F'.

<u>Asymptote de $(\mathscr{H}')$</u>

$s(A) = G$ et $s(C) = N$.

Comme (AC) est l'asymptote de l'arc $(\mathscr{H})$, alors (GN) est l'asymptote de l'arc $(\mathscr{H}')$.

<u>Sommet de $(\mathscr{H}')$</u>

$s(A) = G$ et $s(C) = N$.

Comme le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A de rayon $[AC]$ est le cercle principal de $(\mathscr{H})$, alors le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre G et de rayon GN est le cercle principal de $(\mathscr{H}')$.

On en déduit que S', point d'intersection de $(\mathscr{C}')$ et de l'axe focal est le sommet de $(\mathscr{H}')$ associé à F'.

c. Toute similitude conserve le rapport des distances.

On en déduit que l'excentricité de (Γ') est égale à l'excentricité de (Γ) et vaut $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 3

1 **a.** La fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est continue et $1 \in I$.

Alors la fonction $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I et on a : $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$.

b.

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x+1)$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$F'(x) = f(x)$	0	$-$	0	$+$	

- $\forall x \in]0\,;1[,\quad f(x) < 0$ et F est strictement décroissante.
- $\forall x \in]1\,;+\infty[,\quad f(x) > 0$ et F est strictement croissante.

2

L'inégalité $F(x) \geq \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ pour $x \geq 2$ est fausse. En effet, en intégrant par parties $F(x)$, on trouve : $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{3}{2}\right)\ln(x+1) - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{4} - 2\ln 2$.

D'où $F(x) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 = \left(\dfrac{x^2}{2} - x - \dfrac{3}{2}\right)\ln(x+1) - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{4} - 2\ln 2$.

Le tableau des valeurs de $F(x) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2$ réalisé à l'aide d'un tableur, pour x allant de 2 à 2.9 avec un pas de 0.05, montre que $F(x) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 < 0$ pour au moins les valeurs de x comprises entre 2 et 2.8.

B2 =(0,5*(A2)*A2-(A2)-1,5)*LN((A2)+1)-0,75*(A2)*A2+2,5*(A2)+0,75-2*LN(2)

	A	B	C	D	E
1	Valeur de x	"Valeur de F(x)-1/2*(x-1)^2"			
2	2	-0,284212794			
3	2,05	-0,278730741			
4	2,1	-0,272100307			
5	2,15	-0,264254395			
6	2,2	-0,255127398			
7	2,25	-0,244655138			
8	2,3	-0,232774812			
9	2,35	-0,219424938			
10	2,4	-0,204545301			
11	2,45	-0,188076913			
12	2,5	-0,169961959			
13	2,55	-0,150143759			
14	2,6	-0,12856673			
15	2,65	-0,105176339			
16	2,7	-0,079919076			
17	2,75	-0,052742411			
18	2,8	-0,023594766			
19	2,85	0,007574517			
20	2,9	0,040815211			

Cependant, l'on peut établir que $F(x) \geq F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x$, ce qui permettra de répondre aux questions suivantes.

a. Montrons que : $\forall\, x \geq 2,\;\; F(x) \geq F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x$

Soit $x \geq 2$.

Comme $f(t) \geq t - 1$ pour tout $t \geq 2$.

Alors par passage à l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_2^x f(t)\,dt \geq \int_2^x (t-1)\,dt$.

En ajoutant membre à membre l'expression $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,dt$ à la dernière inégalité, on a :

$$\int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt \geq \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^x (t-1)\,dt.$$

Il en résulte que $F(x) \geq F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x$ pour tout $x \geq 2$.

b. Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

$\forall\, x \geq 2,\;\; F(x) \geq F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x$.

Par passage à la limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \geq \lim\limits_{x\to+\infty} \left(F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x\right) = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

$\forall\, x \geq 2,\ F(x) \geq F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x$.

Alors : $\forall\, x \geq 2,\ \dfrac{F(x)}{x} \geq \dfrac{1}{x}\left(F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x\right)$.

Par passage à la limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} \geq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\left(F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x\right)$.

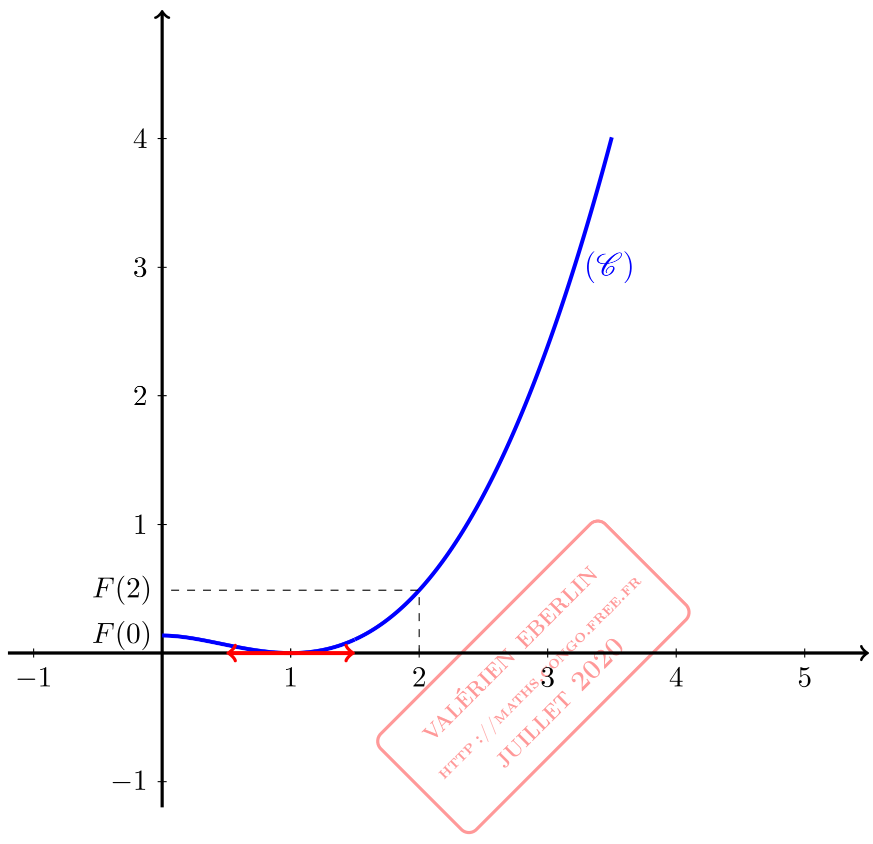
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\left(F(2) + \dfrac{x^2}{2} - x\right) = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$.

La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

c.

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	$F(0)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d.



3 **a.** $F(n+1)-F(n) = \int_1^{n+1} f(t)\,dt - \int_1^{n} f(t)\,dt = \int_n^{1} f(t)\,dt + \int_1^{n+1} f(t)\,dt = \int_n^{n+1} f(t)\,dt.$
D'où $u_n = F(n+1) - F(n)$.

b. <u>Erreur dans l'énoncé</u> : l'encadrement $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ n'est pas vérifié pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, on n'a pas $f(0) \leq u_0 \leq f(1)$ puisque $f(0) = 0$; $f(1) = 0$ et $u_0 = \int_0^1 f(t)\,dt = -\int_1^0 f(t)\,dt = -F(0) \neq 0$

<u>Montrons d'abord que f est croissante sur $[n, n+1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$</u>
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall x \in [n, n+1], \quad f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x-1}{x+1} > 0.$
On en déduit que f est strictement croissante sur $[n, n+1]$.

<u>Montrons que $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$</u>
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
F est continue et dérivable sur $[n, n+1]$.
De plus, $F'(n) \leq F'(x) \leq F'(n+1)$ pour tout $x \in [n; n+1]$ car F' est croissante.
Or $F' = f$. D'où $f(n) \leq F'(x) \leq f(n+1)$ pour tout $x \in [n; n+1]$.
D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$\forall x \in [n; n+1], \ \forall y \in [n; n+1]$ tels que $x \leq y$, $f(n)(y-x) \leq F(y)-F(x) \leq f(n+1)(y-x)$

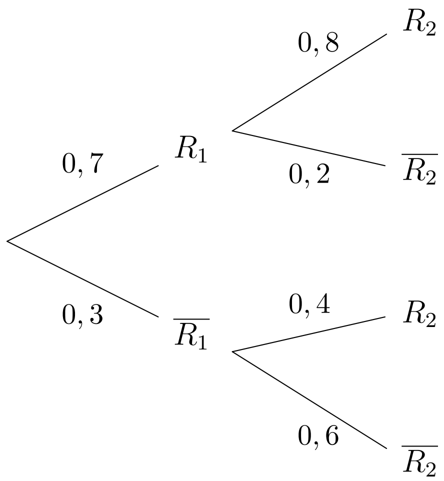
Ainsi, on peut appliquer l'inégalité précédente en $x = n$ et $y = n+1$.
On a alors :

$$f(n)\Big((n+1)-n\Big) \leq F(n+1) - F(n) \leq f(n+1)\Big((n+1)-n\Big).$$

D'où $f(n) \leq u_n \leq f(n+1)$.

Exercice 4

1



2 $p(R_1 \cap R_2) = 0,7 \times 0,8 = 0,56.$

3 $p(R_2) = 0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,4 = 0,68.$

4 $p(A) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,4 = 0,26.$

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2020