Correction bac 2014 - Série D

Exercice 1

1 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle conjugué du nombre complexe z, le nombre $\overline{z} = x - iy$.

2 **a.** Posons $Z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$.

$$Z^3 = 1 \iff r^3\,\mathrm{e}^{i3\theta} = 1\,\mathrm{e}^{i0} \iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta \equiv 0\,[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta_k = \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

D'où les solutions suivantes :

$z_0 = 1\,\mathrm{e}^{i\theta_0} = \mathrm{e}^{i0} = 1$.

$z_1 = 1\,\mathrm{e}^{i\theta_1} = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_2 = 1\,\mathrm{e}^{i\theta_2} = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) - i\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Montrons que les solutions non réelles, sont conjuguées entre elles.

On a $\overline{z_1} = \overline{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z_2$.

3 On peut remarquer que $Z_1 = 2 \times z_2$. On en déduit que $Z_1^3 = 2^3 \times z_2^3$.
Or z_2 est solution de l'équation (E) c'est à dire $z_2^3 = 1$.
Ainsi, $Z_1^3 = 2^3 \times z_2^3 = 8 \times 1 = 8$.

4 **a.** Soit z est une solution de l'équation (E). Alors $z^3 = 1$.

On en déduit que $(2z)^3 = 8 \times z^3 = 8$. Ce qui signifie que $2z$ est solution de l'équation (E').

Les solutions de l'équation (E') sont donc les doubles des solutions de l'équation (E).

D'où : $z'_0 = 2z_0 = 2$; $z'_1 = 2z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z'_2 = 2z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

b. Comme z'_1 et z'_2 sont des solutions de l'équation (E') alors ${z'_1}^3 = 8$ et ${z'_2}^3 = 8$.

On en déduit que : $\left(\dfrac{z'_1}{z'_2}\right)^3 = \dfrac{{z'_1}^3}{{z'_2}^3} = \dfrac{8}{8} = 1$.

Donc $\dfrac{z'_1}{z'_2}$ est une solution de l'équation (E).

Exercice 2

1 $f(\vec{i})$ est le vecteur de coordonnées : $\begin{cases} x' = 0 + 0 = 0 \\ y' = 1 + 0 + 0 = 1 \\ z' = 1 \end{cases}$ Donc $f(\vec{i}) = \vec{j} + \vec{k}$

$f(\vec{j})$ est le vecteur de coordonnées : $\begin{cases} x' = 1 + 0 = 1 \\ y' = 0 + 1 + 0 = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$ Donc $f(\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$

$f(\vec{k})$ est le vecteur de coordonnées : $\begin{cases} x' = 0+1 = 1 \\ y' = 0+0+1 = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$ Donc $f(\vec{k}) = \vec{i}+\vec{j}$

2

$$\begin{array}{cccl} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) & f(\vec{k}) & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{i} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{j} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } \vec{k} \end{array}$$

3 **a.** Un sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si :

(i) $\mathscr{E} \neq \emptyset$

(ii) Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u} \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathscr{E}$ alors $\vec{u}+\vec{v} \in \mathscr{E}$.

(iii) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathscr{E}$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda\overrightarrow{u} \in \mathscr{E}$.

b. (i) $(0,0,0) \in \mathscr{H}$ car $0-0+0=0$. D'où $\mathscr{H} \neq \emptyset$.

(ii) Soit $\overrightarrow{u}\,(x,y,z) \in \mathscr{H}$ et $\overrightarrow{v}\,(x',y',z') \in \mathscr{H}$.
$\overrightarrow{u}\,(x,y,z) \in \mathscr{H} \iff x-y+z=0$.
$\overrightarrow{v}\,(x',y',z') \in \mathscr{H} \iff x'-y'+z'=0$.
On a : $(x+x')-(y+y')+(z+z') = \underbrace{(x-y+z)}_{=0} + \underbrace{(x'-y'+z')}_{=0} = 0$.
Donc le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ de coordonnées $(x+x', y+y', z+z')$ appartient à $\mathscr{H}$.

(iii) Soit $\overrightarrow{u}\,(x,y,z) \in \mathscr{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\overrightarrow{u}\,(x,y,z) \in \mathscr{H} \iff x-y+z=0$.
On a : $\lambda x - \lambda y + \lambda z = \lambda\underbrace{(x-y+z)}_{=0} = 0$.
Donc le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ appartient à $\mathscr{H}$.

4 Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, un élément du noyau de f. Alors, $f\big((x,y,z)\big) = \overrightarrow{0}$.

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=-y \\ x=0 \end{cases}$$

Un vecteur (x,y,z) du noyau s'écrit : $(x,y,z) = (0,y,-y) = y(0,1,-1)$.
Le noyau de f est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1} = (0,1,-1)$, d'équation : $\begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$.

5 Soit $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, un élément de l'image de f. Alors, il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f\big((x,y,z)\big) = (x',y',z')$.

$$f\big((x,y,z)\big) = (x',y',z') \iff \begin{cases} y+z = x' \\ x+y+z = y' \\ x = z' \end{cases}.$$

L'on relève sans difficulté que : $x'-y'+z'=0$.

Les coordonnées (x',y',z') de l'image de f vérifient $y' = x'+z'$.

D'où : $(x', y', z') = (x', x' + z', z') = x'(1, 1, 0) + z'(0, 1, 1)$.

On en déduit que l'image de f est le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (0, 1, 1)$, d'équation $x - y + z = 0$.

Exercice 3

1 Comme $\mathrm{e}^x + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction $x : \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} - x$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$.

2 La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} - 1 = -\frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

Les fonctions $x : \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x : \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ étant strictement positives, on en déduit que g' est strictement négative sur $\mathbb{R}$.

3 Tableau de variation de g

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} - x \right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} - x \right) = +\infty$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

4 La fonction g est continue, strictement décroissante sur $]-\infty\,; +\infty[$.
De plus, $0 \in \left] \lim\limits_{x \to +\infty} g(x); \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) \right[=]-\infty\,; +\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty\,; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On en déduit que $\dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1} = \alpha$ et α est solution de l'équation $\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = x$.

5 **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad h'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$.

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :
$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) > 0$.

b. Tableau de variation de h

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = 0.$$

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2020

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	$0 \nearrow 1$

c. h est strictement croissante sur $]-\infty\,;+\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$.
Donc : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq h(x) \leq 1$.

6 **a.** Notons $\mathscr{P}_n$, la propriété : $u_n \leq 1$.
Montrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.

Initialisation

$u_0 = 0 \leq 1$.

$u_1 = h(u_0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0+1} = \dfrac{1}{2} \leq 1$.

Donc les propriétés $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vérifiées.

Hérédité

Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que $u_n \leq 1$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $u_{n+1} \leq 1$.

On a : $u_n \leq 1$.
D'après 5. c., $h(u_n) \leq 1$. D'où $u_{n+1} \leq 1$.
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n.

b. Notons $\mathscr{P}_n$, la propriété : $u_n \leq u_{n+1}$.
Montrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$.

Initialisation

$u_0 = 0$ et $u_1 = h(u_0) = \dfrac{1}{2}$. D'où $u_0 \leq u_1$.

Donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que $u_n \leq u_{n+1}$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

On a $u_n \leq u_{n+1}$.
Comme h est une fonction croissante, alors $h(u_n) \leq h(u_{n+1})$. D'où $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
La propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout n.

c. La suite (u_n) est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

Pour justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$, les étapes (i) ; (ii) et (iii) sont nécessaires.

(i) Montrons d'abord que : $\forall x \in [0;1],\ 0 < h'(x) \leq \dfrac{\mathrm{e}}{4}$

Soit $x \in [0;1]$.
Alors $x \geq 0$. On en déduit que $\mathrm{e}^x \geq 1$ et $\mathrm{e}^x + 1 \geq 2$.
Par croissance de la fonction carré sur $[0;1]$, on a $(\mathrm{e}^x+1)^2 \geq 4$.
Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;1]$, on a $\dfrac{1}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \leq \dfrac{1}{4}$.

D'où $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \leq \dfrac{\mathrm{e}^x}{4}$.

$\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}$ (car $x \leq 1$). On en déduit que $0 < \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{4}$.

D'où $0 < h'(x) \leq \dfrac{\mathrm{e}}{4}$

(ii) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
h est continue et dérivable sur $[0;1]$.
De plus, $|h'(x)| = h'(x) \leq \dfrac{\mathrm{e}}{4}$ pour tout $x \in [0;1]$.
D'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x \in [0;1],\ \forall y \in [0;1],\ |h(x) - h(y)| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|x-y|$$

Comme $h(\alpha) = \alpha$, on en déduit d'après 5.c., que $\alpha \in [0;1]$.
De plus, d'après 5. c. et par définition de la suite (u_n) , on en déduit que $u_n \in [0;1]$.
Ainsi, on peut appliquer l'inégalité précédente en $x = u_n$ et $y = \alpha$.
On a alors :

$$|h(u_n) - h(\alpha)| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|$$

Mais $h(u_n) = u_{n+1}$ par définition de la suite (u_n) et rappelons que $h(\alpha) = \alpha$.
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|$.

(iii) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$

Soit $\mathscr{P}_n$, la propriété : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n$.

Initialisation

D'après (ii), on a $|u_1 - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_0 - \alpha|$.
La propriété $\mathscr{P}_1$ est vérifiée.

Hérédité

Supposons $\mathscr{P}_n$ c'est à dire supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ c'est à dire montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.
D'après (ii), $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha|$ et par hypothèse de récurrence, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
Ainsi, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}|u_n - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}}{4}\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$

Conclusion

VALÉRIEN EBERLIN HTTP://MATHS.CONGO.FREE.FR JUILLET 2020

D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Justifions enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
Par passage à la limite, $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 4

Nous noterons $(x_i, n_{i\bullet})$, les couples qui définissent la distribution marginale de la variable x, et $(y_j, n_{\bullet j})$ les couples qui définissent la distribution marginale de la variable y.
Dans ce cas, on a : $\sum\limits_i n_{i\bullet} = \sum\limits_j n_{\bullet j}$ que l'on pose égal à N.

1

x	-1	0	2
$n_{i\bullet}$	3	a	2

y	1	3
$n_{\bullet j}$	3	$a+2$

2 $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{3} n_{i\bullet} x_i = \dfrac{3\times(-1) + a\times 0 + 2\times 2}{a+5} = \dfrac{1}{5+a}$.

$\overline{y} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{2} n_{\bullet j} y_j = \dfrac{3\times 1 + (a+2)\times 3}{5+a} = \dfrac{3a+9}{a+5}$.

On cherche a tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5+a} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3a+9}{a+5} = 2 \end{cases} \qquad \text{D'où } a = 1.$$

3 Pour $a = 1$, $\overline{x} = \dfrac{1}{6}$ et $\overline{y} = 2$.

Variance de x.

$$\mathrm{V}(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3} n_{i\bullet}\, x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{3(-1)^2 + 1\times 0^2 + 2\times 2^2}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{65}{36}$$

Variance de y.

$$V(y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{2} n_{\bullet j}\, y_j^2 - \overline{y}^2 = \frac{3\times 1^2 + 3\times 3^2}{6} - 2^2 = 1$$

Covariance de la série (x, y).

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} n_{ij} x_i y_j - \overline{x}.\overline{y} \quad \text{où } n_{ij} \text{ est le coefficient associé au couple } (x_i, y_j)$$

$$= \frac{-1-6+0+0+4+0}{6} - \frac{1}{6}\times 2 = -\frac{5}{6}$$