Correction bac 2014 - Série C

Exercice 1

1 L'équation (E) : $Z^2-(2ie^{i\theta}\cos\theta)Z-e^{i2\theta}=0$ admet pour discriminant réduit :
$\Delta' = (ie^{i\theta}\cos\theta)^2-1\times(-e^{2i\theta}) = e^{2i\theta}(-\cos^2\theta+1) = (e^{i\theta}\sin\theta)^2$.
On en déduit que les racines de l'équation (E) sont alors :

$$Z_1=\frac{ie^{i\theta}\cos\theta-e^{i\theta}\sin\theta}{1}=e^{i\theta}\,i\,(\cos\theta+i\sin\theta)=e^{i\theta}\,e^{i\frac{\pi}{2}}\,e^{i\theta}=e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)}.$$

$$Z_2=\frac{ie^{i\theta}\cos\theta+e^{i\theta}\sin\theta}{1}=e^{i\theta}\,i\,(\cos\theta-i\sin\theta)=e^{i\theta}\,e^{i\frac{\pi}{2}}\,e^{-i\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

2 **a.** $arg\left(\dfrac{Z_B-Z_0}{Z_A-Z_0}\right)=arg\left(\dfrac{e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)=arg(e^{i2\theta})\equiv 2\theta\,[2\pi]$

b. Comme $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}\equiv arg\left(\dfrac{Z_B-Z_0}{Z_A-Z_0}\right)\,[2\pi]$, alors $2\theta\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$. D'où $\theta\equiv\dfrac{\pi}{4}\,[\pi]$.

L'ensemble des valeurs de θ est $\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

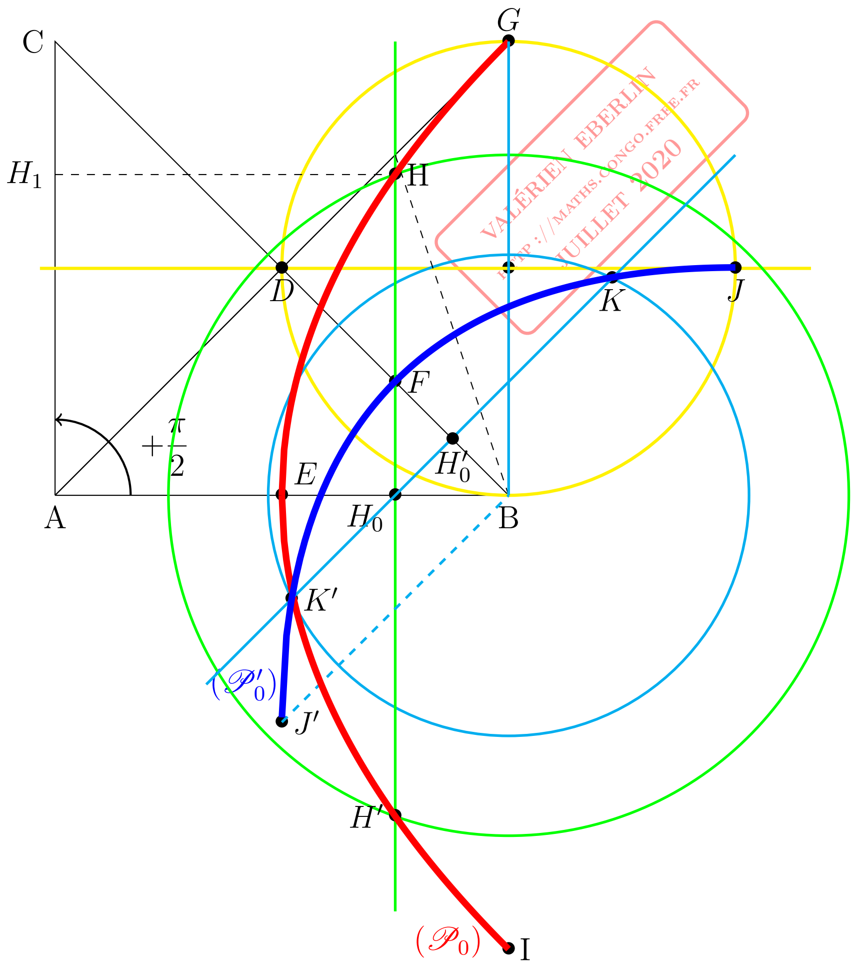
c.

$$\begin{aligned}Z_A+Z_B=e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{i(\frac{\pi}{2}+2\theta)}=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(1+e^{i2\theta}\right)&=e^{i\frac{\pi}{2}}\,(1+\cos2\theta+i\,\sin2\theta)\\&=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\theta+i\,2\sin\theta\cos\theta\right)\\&=2e^{i\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\left(\cos\theta+i\,\sin\theta\right)\quad.\\&=2e^{i\frac{\pi}{2}}\cos\theta\ e^{i\theta}\\&=2\cos\theta\,e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}\end{aligned}$$

On a : $|Z_A+Z_B|=|2\cos\theta|=2\cos\theta$ car $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$.
On en déduit que $2\cos\theta\,e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ est la forme exponentielle de Z_A+Z_B.
Donc la forme exponentielle de $\overline{Z_A+Z_B}$ est $2\cos\theta\,e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$.

Exercice 2

1



2 **a.** On appelle paramètre p d'une parabole, la distance du foyer de cette parabole à sa directrice.

b. AB étant la distance du foyer B à la directrice (AC), alors $\alpha = AB = 6$ cm.

3 **a.**

- B est le foyer de $(\mathscr{P})$;
- $G \in (\mathscr{P})$ car C est le projeté orthogonal de G sur la directrice (AC) et $GB = GC$.
- De plus, (AG) est la médiatrice de $[BC]$.

Donc (AG) est la tangente à $(\mathscr{P})$ en G.

b. Notons H_1 le projeté orthogonal de H sur la directrice (AC) et H_0 le milieu de $[EB]$.
On a : $HH_1 = H_0A$. Or $HH_1 = HB$ car $H \in (\mathscr{P})$. Donc $HB = H_0A$.
On en déduit que H est l'un des points d'intersection de la médiatrice du segment $[EB]$ et du cercle de centre B de rayon H_0A (voir la construction en vert ci-dessous).

c. $E \in (\mathscr{P})$. Les points G et H ainsi que leurs symétriques I et H' par rapport à l'axe focal (AB) sont des points de $(\mathscr{P})$. À partir de ces 5 points, on obtient une allure de l'arc $(\mathscr{P}_0)$.

4 S est la similitude de centre B, de rapport $K = \dfrac{BA}{BD} = \dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}$ et d'angle $\overline{(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})} \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

5 Comme $S(B) = B$ et $S(J) = G$, alors $BG = \sqrt{2}\,BJ$ et $\overline{(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BG})} = \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.
On en déduit que le triangle BJG est rectangle isocèle en J.
J est donc le point d'intersection du cercle de diamètre $[BG]$ et de la médiatrice de $[BG]$ tel que l'angle $\overline{(\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BG})}$ soit orienté positivement (voir construction en jaune).

6 Pour construire l'arc $(\mathscr{P}'_0)$, on applique le même procédé que celui utilisé pour construire l'arc $(\mathscr{P}_0)$ (voir 3.b.).
Soit H'_0, le milieu de $[BF]$. Les points d'intersections K et K' du cercle de centre B de rayon $[H'_0D]$ et de la médiatrice de $[BF]$ appartiennent à $(\mathscr{P}')$.
À l'aide des cinq points, K, K', F, J et J' où J' est le symétrique de J par rapport à l'axe focal (BD), on construit une allure de l'arc $(\mathscr{P}'_0)$.

7 Toute similitude de rapport k multiplie l'aire de sa transformée par k^2.
Comme S est une similitude de rapport $\sqrt{2}$ et que $S((\mathscr{E}'_0)) = (\mathscr{E}_0)$, alors $A_0 = (\sqrt{2})^2 A'_0 = 2A'_0$

8 $S \circ S \circ S \circ S$ est la similitude de centre B, de rapport $(\sqrt{2})^4 = 4$.
D'où $A = 4^2 A'_0 = 16 \times \dfrac{1}{2} A_0 = 8A_0$

Exercice 3

1 La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto x^{n+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\,x^{n+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$. D'où $E_{f_n} = \mathbb{R}$

2 **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ f'_n(x) = (-\,\mathrm{e}^{-x})x^{n+1} + e^{-x}(n+1)x^n = (-x+n+1)\,\mathrm{e}^{-x}\,x^n$
L'entier n étant impair, x^n est de même signe que x. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$n+1$		$+\infty$
$-x+n+1$			$+$		0	$-$	
e^{-x}				$+$			
x^n		$-$	0		$+$		
$f'_n(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $n+1$ étant pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{n+1} = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x}\,x^{n+1} = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x}\,x^{n+1} = 0$.

c.

x	$-\infty$		0		$n+1$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$	$\searrow$	0

3 **a.**

Si l'on choisit $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ v(x) = x^{n+2} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) = (n+2)x^{n+1} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$I_{n+1,p} = \int_0^p \mathrm{e}^{-x}\, x^{n+2} dx = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\, x^{n+2}\Big]_0^p + (n+2)\int_0^p \mathrm{e}^{-x}\, x^{n+1} dx = -\mathrm{e}^{-p}\, p^{n+2} + (n+2) I_{n,p}$$

Par passage à la limite,

$$\lim_{p\to+\infty} I_{n+1,p} = \underbrace{\lim_{p\to+\infty} -\mathrm{e}^{-p}\, p^{n+2}}_{=0} + \lim_{p\to+\infty} (n+2) I_{n,p} = (n+2) \lim_{p\to+\infty} I_{n,p}$$

D'où $J_{n+1} = (n+2)J_n$.

b. $J_n = (n+1)J_{n-1} = (n+1)\times nJ_{n-2} = \cdots = (n+1)\times n\times\cdots\times 2\times J_0 = (n+1)!\, J_0$

Exercice 4

1 Pour tous nombres n et p de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, X est la variable aléatoire qui à tout tirage (n, p) où $n \neq p$, associe $|\, n - p \,|$.

jeton n° \ jeton n°	1	2	3	4
1		1	2	3
2	1		1	2
3	2	1		1
4	3	2	1	

Loi de probabilité de X

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

2 $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, p(X = x_i) = 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{3} + 3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3}$

$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2\, p(X = x_i) - \big(E(X)\big)^2 = 1 \times \dfrac{1}{2} + 4 \times \dfrac{1}{3} + 9 \times \dfrac{1}{6} - \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$

$\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$