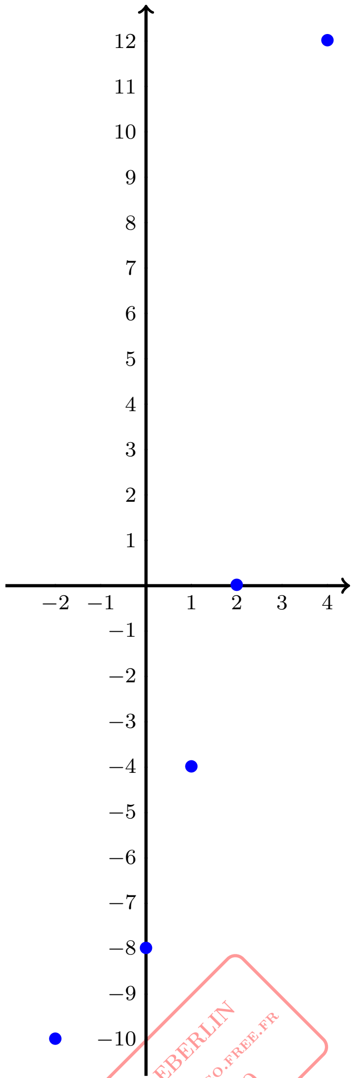
Correction bac 2012 - Série D

Exercice 1

1 $\overline{X} = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_i = \dfrac{a+3}{5}$ et $\overline{Y} = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{i=1}^{5} y_i = \dfrac{b-6}{5}$.

Les coordonnées du point moyen vérifient :

$$\begin{cases} \dfrac{a+3}{5} = 1 \\ \dfrac{b-6}{5} = -2 \end{cases} \quad \text{D'où} \quad a = 2 \text{ et } b = -4.$$



2 **a.** Voir graphique.

b. Pour $a = 2$ et $b = -4$, $\overline{X} = 1$, $\overline{Y} = -2$.

L'équation de régression linéaire de X en Y est donnée par l'équation :

$X = aY + b$ où $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(Y)}$ et $b = \overline{X} - a\overline{Y}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i y_i - \overline{X}.\overline{Y}\\ &= \frac{1}{5}(-2\times(-10) + 0\times(-8) + 1\times(-4) + 2\times 0 + 4\times 12) - 1\times(-2)\\ &= 14,8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(Y) &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i^2 - \overline{Y}^2\\ &= \frac{1}{5}((-10)^2 + (-8)^2 + (-4)^2 + 0^2 + 12^2) - (-2)^2\\ &= 60,8\end{aligned}$$

D'où : $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)} = 0,243$ et $b = 1 - 0,243\times(-2) = 1,486$.
L'équation de la droite de régression linéaire de X en Y est : $X = 0,243Y + 1,486$.

c. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)}\sqrt{\mathrm{V}(Y)}}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \overline{X}^2\\ &= \frac{1}{5}((-2)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2) - 1^2\\ &= 4\end{aligned}$$

D'où $\rho_{X,Y} = \dfrac{14,8}{\sqrt{4}\sqrt{60,8}} = 0,949$.

<u>Interprétation</u>

Le coefficient de corrélation linéaire est proche de 1. Cela indique qu'il existe une relation linéaire forte entre les variables X et Y. Ce coefficient est également positif, cela signifie que lorsqu'une variable augmente, l'autre variable augmente aussi.

Exercice 2

1 **a.** Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, une solution de l'équation (E).

$$z^2 = -8\sqrt{3}+8i \iff r^2\,\mathrm{e}^{i2\theta} = 16\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}} \iff \begin{cases} r^2 = 16\\ 2\theta \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]\end{cases} \iff \begin{cases} r = 4\\ \theta_k = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

D'où les solutions :
$z_1 = 4\,\mathrm{e}^{i\theta_0} = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}} = 4\left(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})\right)$.
$z_2 = 4\,\mathrm{e}^{i\theta_1} = 4\,\mathrm{e}^{i(\frac{5\pi}{12}+\pi)} = 4\left(\cos(\frac{5\pi}{12}+\pi) + i\sin(\frac{5\pi}{12}+\pi)\right) = 4\left(-\cos(\frac{5\pi}{12}) - i\sin(\frac{5\pi}{12})\right)$.

b. On cherche un nombre complexe $z = x + iy$ tel que $z^2 = -8\sqrt{3} + 8i$.
$x^2 - y^2 + 2ixy = -8\sqrt{3} + 8i$. Par identification des parties réelles et des parties imaginaires, $x^2 - y^2 = -8\sqrt{3}$ et $xy = 4$.

D'autre part, comme $|z|^2 = |-8\sqrt{3}+8i|$ alors $x^2+y^2 = 16$.

On obtient le système d'équations : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8\sqrt{3} & (1) \\ x^2+y^2 = 16 & (2) \\ xy = 4 & (3) \end{cases}$

En additionnant membre à membre l'équation (1) et (2), on obtient :
$x^2 = 8-4\sqrt{3} = (\sqrt{2}-\sqrt{6})^2$. On en déduit que $x = \sqrt{2}-\sqrt{6}$ ou $x = -\sqrt{2}+\sqrt{6}$;

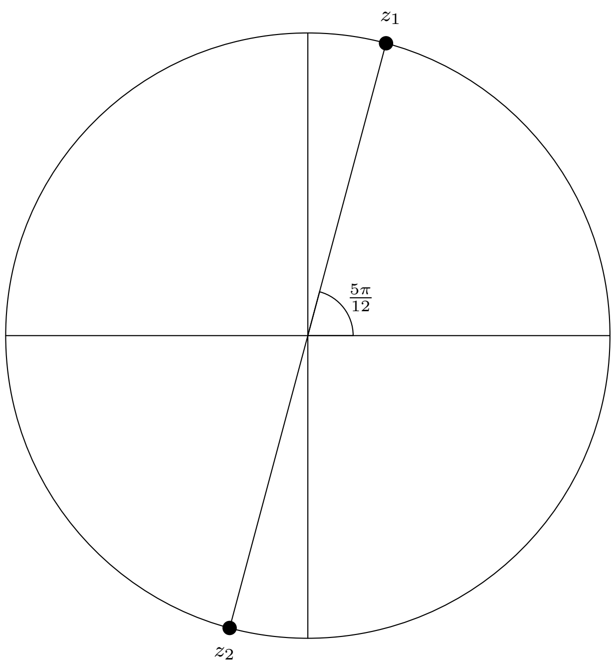
En multipliant l'équation (1) par -1, puis en ajoutant membre à membre la nouvelle équation obtenue et l'équation (2), on obtient $y^2 = 8+4\sqrt{3} = (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$. On en déduit que $y = \sqrt{2}+\sqrt{6}$ ou $y = -\sqrt{2}-\sqrt{6}$;

L'équation (3) nous indique que x et y sont de même signe.

Les solutions de l'équation $z^2 = -8\sqrt{3}+8i$ sont : $-\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ et $\sqrt{2}-\sqrt{6}-i(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

En comparant les signes des parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2, on en déduit que :
$z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ et $z_2 = \sqrt{2}-\sqrt{6}-i(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

2



Cercle de rayon 4 cm

3 De l'égalité $-\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{2}+\sqrt{6}) = 4\left(\cos(\frac{5\pi}{12})+i\sin(\frac{5\pi}{12})\right)$, on en déduit que :
$\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Problème

Partie A

1 L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ est : $r^2 + 2r + 1 = 0$. Elle admet une racine double $r_1 = r_2 = -1$.
Donc la solution générale de l'équation différentielle est : $y(x) = (c_1 x + c_2)\,\mathrm{e}^{-x}$ où c_1, c_2 sont des constantes réelles quelconques.

2 u est de la forme $u(x) = (c_1 x + c_2)\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

$$\begin{cases} u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2\,\mathrm{e}^{-0} = 1 \\ c_1\,\mathrm{e}^{-0} - c_2\,\mathrm{e}^{-0} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

La solution particulière est la fonction u définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $u(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B

3 La fonction $x \mapsto (x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ existe sur $]-\infty; 0]$.
La fonction $x \mapsto 1 - 2x + x\ln x$ existe si et seulement si $x > 0$.
Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

4 Continuité en 0

$\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = f(0) = (0+1)\,\mathrm{e}^{-0} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} (1 - 2x + x\ln x) = 1.$

Comme $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$, la fonction f est continue en 0.

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0_-} \frac{(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} = 1 + \lim_{x\to 0_-} \frac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} = 1 - \lim_{X\to 0_+} \frac{\mathrm{e}^{X} - 1}{X} = 1 - 1 = 0$$

où l'on a posé $X = -x$.

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0_+} (-2 + \ln x) = -\infty.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ n'est pas une valeur finie, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

5 La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ et on a :
$\forall\, x < 0, \quad f'(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x}$.
$\forall\, x > 0, \quad f'(x) = -1 + \ln x$.

Signe de f'

$f'(x) = 0 \iff -1 + \ln x = 0 \iff x = \mathrm{e}$
$f'(x) < 0$ pour tout $x \in]0; \mathrm{e}[$;
$f'(x) > 0$ pour tout $x \in]\mathrm{e}; +\infty[$.
$f'(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$;

Tableau de variation

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = -\infty.$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x\ln x \left(\frac{1}{x\ln x} - \frac{2}{\ln x} + 1 \right) = +\infty.$$

x	$-\infty$		0		e		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$1-\mathrm{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6

Point d'intersection avec l'axe des abscisses pour $x \leq 0$

$$\text{Si } x \leq 0, \quad f(x) = 0 \iff (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$$
$$\iff x = -1$$

Le point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses est le point $(-1, 0)$.

Équation de la tangente

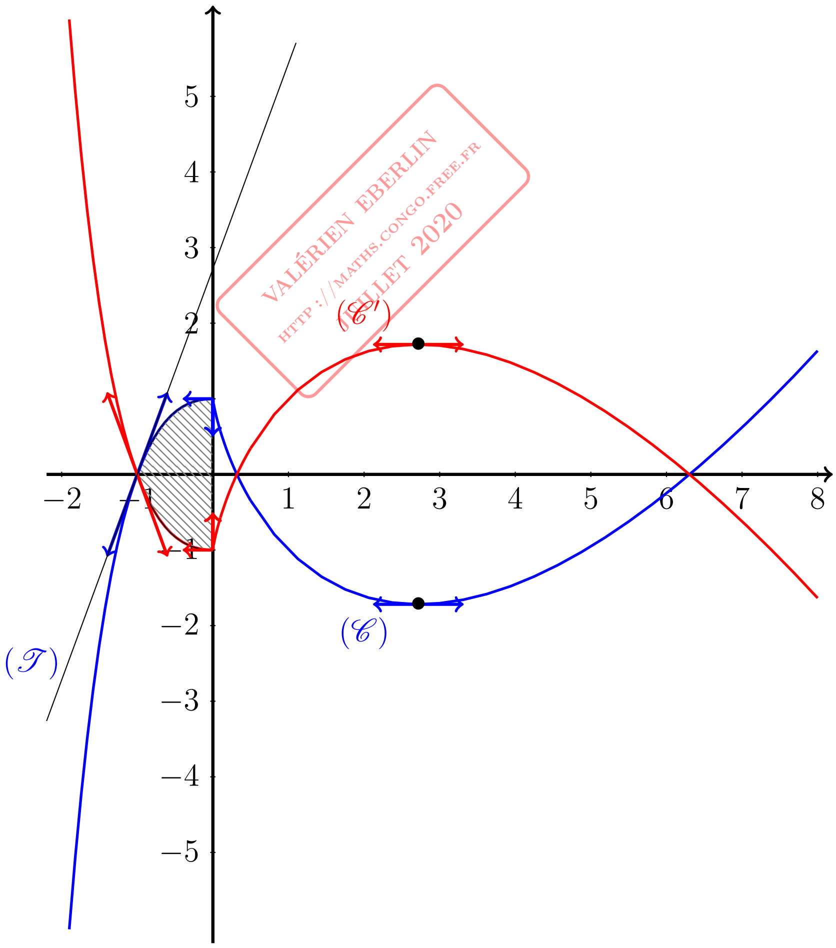
L'équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à $(\mathscr{C})$ est donnée par la formule $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$
D'où $(\mathscr{T})$: $y = \mathrm{e}\,x + \mathrm{e}$.

7 $f(6) \approx -0,25$; $f(7) \approx 0,62$.
La fonction f est continue, strictement croissante sur $]6\,;\,7[$.
De plus, $f(6) \times f(7) < 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]6\,;\,7[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

8 **a.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 2 + \ln x\right) = +\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

b.



Partie C

9 **a.**

x	$-\infty$		0		e		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖	$+$	0		$-$		
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-1+\mathrm{e}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b. Voir graphique.

c. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-1}^{0} \left[f(x) - h(x)\right] dx = 2\int_{-1}^{0} (1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\, dx.$

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = 1 + x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$\mathscr{A} = 2\int_{-1}^{0}(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\ dx = -2\Big[(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}\big]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{-x}\ dx.$

D'où $\mathscr{A} = 2(-2+\mathrm{e})$ u.a $= 8(-2+\mathrm{e})\,\mathrm{cm}^2$