Correction bac 2012 - Série C

Exercice 1

1 Soit $z = ib$ où $b \in \mathbb{R}$, une solution de l'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$.

$$\begin{aligned}(ib)^4 - \sqrt{2}(ib)^3 - 4\sqrt{2}(ib) - 16 = 0 &\iff b^4 - 16 + i\sqrt{2}b(b^2-4) = 0\\ &\iff b^4 - 16 = 0 \text{ et } b(b^2-4) = 0\\ &\iff b = 2 \text{ ou } b = -2\end{aligned}$$

Les solutions imaginaires pures sont $z_0 = 2i$ et $z_1 = -2i$.

L'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16$ peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 &= (Z-2i)(Z+2i)(Z^2+cZ+d)\\ &= (Z^2+4)(Z^2+cZ+d)\end{aligned}.$$

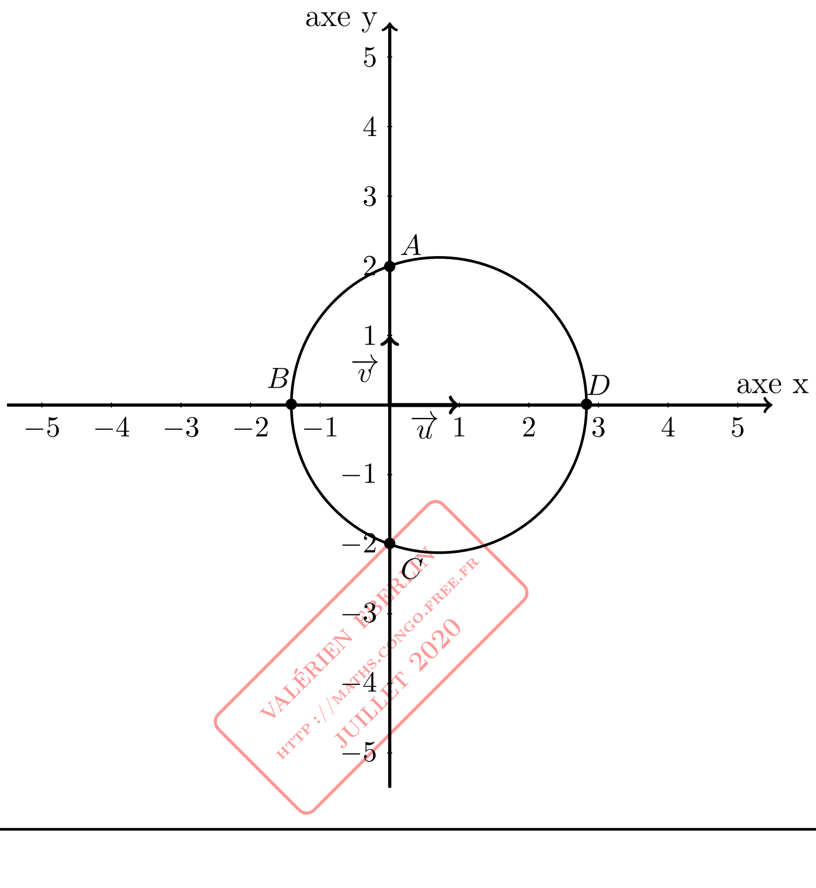
Le terme de degré 0 du second membre est $4d$. On en déduit que $4d = -16$. D'où $d = -4$.
Le terme de degré 1 du second membre est $4c$. On en déduit que $4c = -4\sqrt{2}$. D'où $c = -\sqrt{2}$.

Il vient que : $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = (Z^2+4)(Z^2 - \sqrt{2}Z - 4)$.

L'équation $Z^2 - \sqrt{2}Z - 4 = 0$, de discriminant $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(-4) = 18$ admet deux racines $z_2 = 2\sqrt{2}$ et $z_3 = -\sqrt{2}$.

Donc les solutions de l'équation $Z^4 - \sqrt{2}Z^3 - 4\sqrt{2}Z - 16 = 0$ sont : $z_0 = 2i$, $z_1 = -2i$, $z_2 = 2\sqrt{2}$ et $z_3 = -\sqrt{2}$.

2 **a.**



b.

$$\text{Les points } A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ sont cocycliques} \iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})\ [\pi]$$
$$\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D} = \frac{-4i}{-\sqrt{2} - 2i} \div \frac{-2i - 2\sqrt{2}}{-3\sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{6} \in \mathbb{R}$$

Donc les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$.

Le cercle $(\mathscr{C})$ a pour centre, le point d'affixe $\dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et pour rayon $\dfrac{1}{2}|z_D - z_B| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2

1 $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^1 = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + 1$

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $x \longmapsto x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0;1]$.

De plus : $\forall\, x \in [0;1],\quad x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \geq 0$.

Donc $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Soit n un entier tel que $n \geq 3$.

$I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n-1}.\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$

Si l'on choisit $\begin{cases} u = x^{n-1} \\ v' = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u' = (n-1)x^{n-2} \\ v = -\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$I_n = \left[-x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^1 + (n-1)\displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}.$

D'où : $I_n = -\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + (n-1)I_{n-2}$ pour tout entier n tel que $n \geq 3$.

4 Décroissance de la suite (I_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(x-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$

La fonction $x \longmapsto x^n(x-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0;1]$.

De plus, $\forall\, x \in [0\,;\,1],\ x^n(x-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \leq 0$.

Donc $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La suite (I_n) est décroissante.

Convergence de la suite (I_n)

La suite (I_n) est décroissante d'après 4..

De plus, (I_n) est minorée par 0 d'après 2..

Donc la suite (I_n) converge vers une limite l.

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall x \in [0;1], \quad -\frac{x^2}{2} \leq 0.$

Par croissance de la fonction exponentielle, $0 < \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \leq \mathrm{e}^0 = 1.$

On en déduit que : $0 \leq x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \leq x^n.$

Par passage à l'intégrale, on a : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

D'où $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

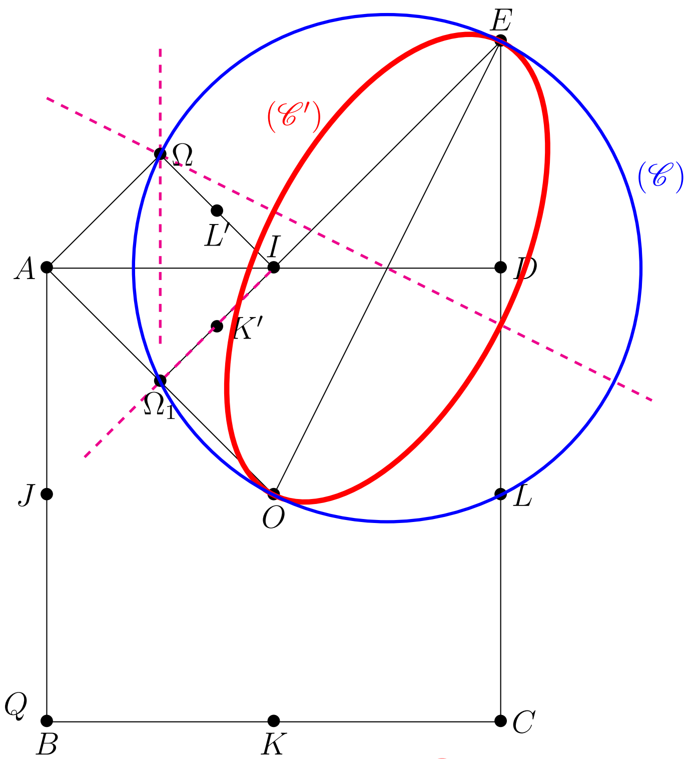
<u>Calcul de l</u>

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}.$

Par passage à la limite, on a $\quad 0 \leq \displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$

On en déduit que $\quad l = 0.$

Problème



1 $IE^2 = ID^2 + DE^2 = AI^2 + IO^2 = AO^2$. Donc $IE = AO$.

2 Comme $IE = AO$ et $\overrightarrow{IE} \neq \overrightarrow{AO}$ alors il existe une unique rotation r, d'angle $\overline{(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AO})}$ qui transforme I en A et E en O.
Cet angle vaut $\overline{(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{AO})} = \overline{(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})} \equiv -\dfrac{\pi}{2} \; [2\pi]$

VALÉRIEN EBERLIN http://maths.congo.free.fr JUILLET 2020

3 Ω le point d'intersection de médiatrices des segments $[IA]$ et $[EO]$.

4 Comme $r(E) = O$, alors $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

D'autre part, $(\overrightarrow{\Omega_1 O}, \overrightarrow{\Omega_1 E}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

D'où, $(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega E}) \equiv (\overrightarrow{\Omega_1 O}, \overrightarrow{\Omega_1 E})\ [2\pi]$. Les points Ω, E, O, Ω_1 sont cocycliques.

5
- Le triangle ΩAI est rectangle isocèle

  En effet, comme $r(I) = A$, alors $\Omega A = \Omega I$ et $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. D'où le triangle ΩAI est rectangle isocèle en Ω.
- Le triangle $\Omega_1 AI$ est rectangle isocèle

  - Dans le triangle AOD,
    $\Omega_1 \in [AO]$; $I \in [AD]$.
    De plus, $(\Omega_1 I)//(OD)$.
    D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{A\Omega_1}{AO} = \frac{\Omega_1 I}{OD}$.
    On en déduit que $\frac{A\Omega_1}{\Omega_1 I} = \frac{AO}{OD} = 1$ d'où $A\Omega_1 = \Omega_1 I$.
  - De plus, $(\overrightarrow{\Omega_1 I}, \overrightarrow{\Omega_1 A}) = (\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

  Donc le triangle $\Omega_1 AI$ est rectangle isocèle en Ω_1.

Les triangles ΩAI et $\Omega_1 AI$ sont alors rectangles isocèles, d'hypoténuse commune $[AI]$. Donc le quadrilatère $A\Omega_1 I\Omega$ est un carré.

6 $S(ABCD) = A\Omega_1 I\Omega$.

La similitude S vérifie en particulier : $S(A) = A$ et $S(B) = \Omega_1$.

D'où, S est la similitude de centre A, d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega_1}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et de rapport :

$$\frac{A\Omega_1}{AB} = \frac{\frac{1}{4}.AC}{AB} = \frac{1}{4}.\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

7
- $S(B) = \Omega_1$ et $S(C) = I$.

  Comme K est le milieu du segment $[BC]$, alors $S(K) = K'$ est le milieu du segment $[\Omega_1 I]$.
- $S(C) = I$ et $S(D) = \Omega$.

  Comme L est le milieu du segment $[CD]$, alors $S(L) = L'$ est le milieu du segment $[I\Omega]$.

8 $\overline{S}(Q) = Q$.

$\overline{S}$ est une similitude plane indirecte de centre Q, d'axe (OD) et de rapport $\frac{1}{2}$.

9 **a.**

$\overline{S}(C) = J$.
$\overline{S}(C) = h_{(Q,\frac{1}{2})} \circ S_{OD}(C) = h_{(Q,\frac{1}{2})}(A)$.

On en déduit que $h_{(Q,\frac{1}{2})}(A) = J$. D'où $\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA}$.

b.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA} &\iff \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \\ &\iff \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BJ} \\ &\iff \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{0} \\ &\iff Q = B\end{aligned}$$

10 **a.** f est est une affinité orthogonale d'axe (OE), de rapport $\frac{1}{2}$.

b. Voir figure.

c. $(\mathscr{C}')$ est un ellipse.