Correction bac 2010 - Série D

Exercice 1

1

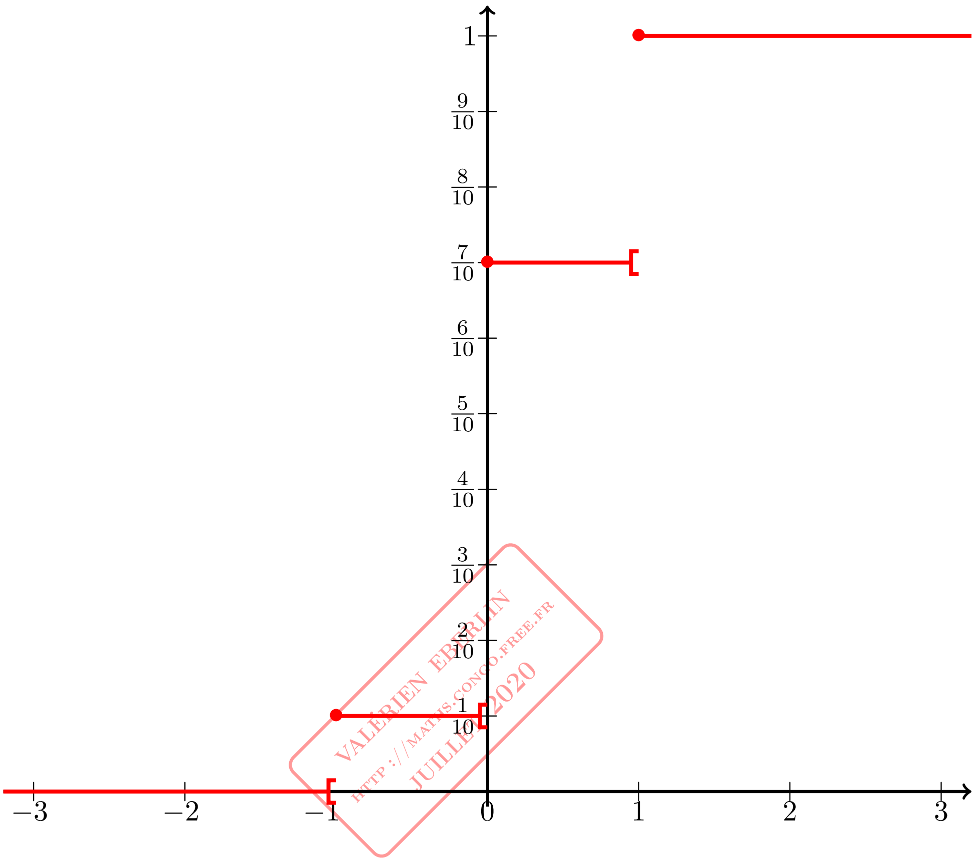
X	-1	0	1
p	$\dfrac{C_2^2.C_3^0}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{C_2^1.C_3^1}{C_5^2}=\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{C_2^0.C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$

2 $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=i}^{3} x_ip_i=-1\times\dfrac{1}{10}+0\times\dfrac{6}{10}+1\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{2}{10}$.

3 **a.** La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par le tableau :

X	$]-\infty;-1[$	$[-1;0[$	$[0;1[$	$[1;+\infty[$
$F_X(x)$	0	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{7}{10}$	1

b.



Exercice 2

1 On peut prendre pour polynôme de degré 3, le polynôme : $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$.
En remarquant que $\overline{z_2} = -z_1$, on a :

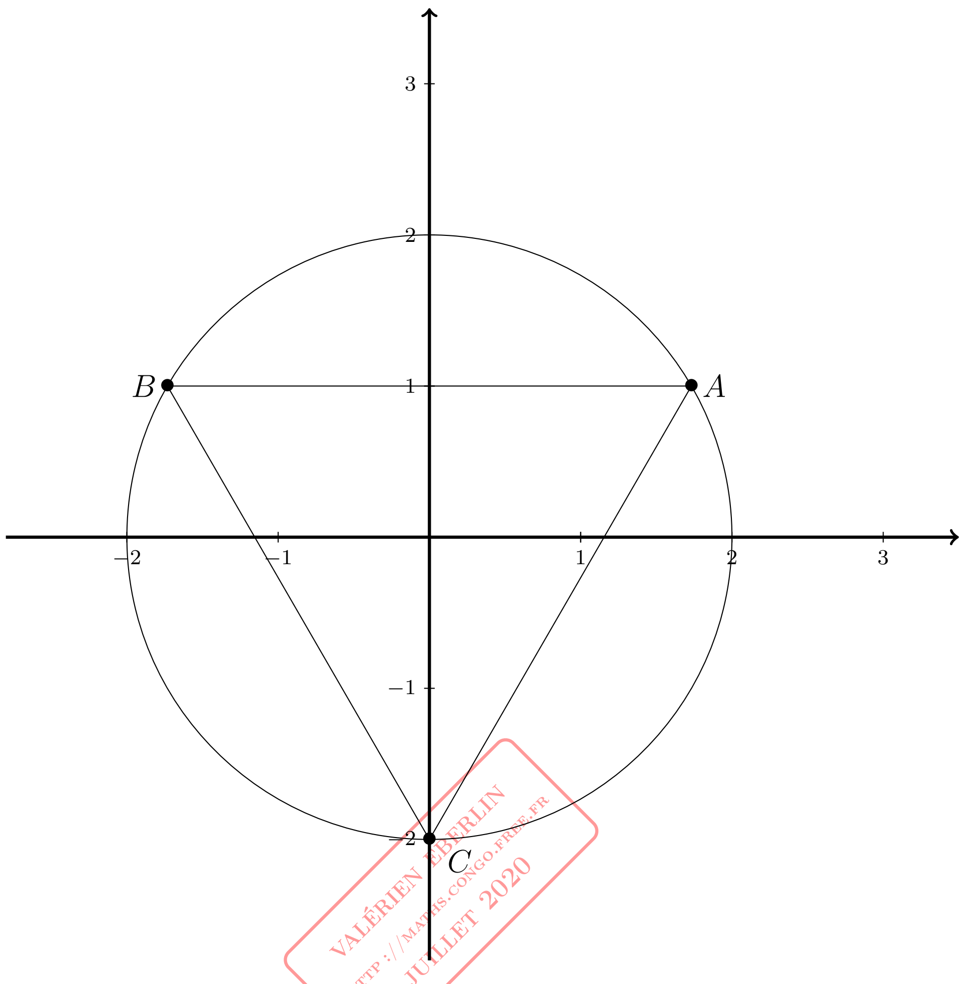
$$\begin{aligned}(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) &= (z-z_1)(z+\overline{z_1})(z-z_3)\\ &= (z^2+(\overline{z_1}-z_1)z-|z_1|^2)(z-z_3)\\ &= (z^2-2iz-4)(z-z_3)\\ &= z^3+(-z_3-2i)z^2+(2iz_3-4)z+4z_3\\ &= z^3-8i\end{aligned}.$$

2 $\sqrt{3}+i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})\right)$.

$-\sqrt{3}+i = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$.

$-2i = 2\times(-i) = 2(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))$.

3 **a.**



b. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi] \equiv \arg\left(\dfrac{-\sqrt{3}-3i}{-2\sqrt{3}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)\ [2\pi] \equiv \arg\left(\dfrac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}+3i}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ [2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

La somme des angles dans un triangle étant égale à 180°, on en déduit que l'angle $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

c. Le triangle ABC est équilatéral.

Problème

Partie A

1 La fonction g est dérivable sur $]-\infty;0[$ et on a : $g'(x) = \dfrac{2}{x}$.

$\forall\, x \in]-\infty;0[,\quad g'(x) < 0$.

La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$		$-$	‖
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$ ‖

2 $g(-1) = 2\ln(1) = 0$.

Signes de g

g est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

De plus, $g(-1) = 0$.

On en déduit que :

$g(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty;-1[$;

$g(x) < 0$ pour tout $x \in]-1;0[$.

Partie B

1 La fonction $x :\mapsto -2x + 1 + 2x\ln|x|$ existe pour tout $x < 0$.

La fonction $x :\mapsto (x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - 1$ existe pour tout $x \geq 0$.

Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2 **a.** Continuité en 0

$\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} (-2x + 1 + 2x\ln|x|) = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} ((x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - 1) = 1 = f(0).$

Comme $\lim\limits_{x\to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = f(0)$, alors la fonction f est continue en 0.

Dérivabilité en 0

$\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0_-} (-2 + 2\ln|x|) = -\infty.$

$\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0_+} \mathrm{e}^{-x} + 2 \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x} = -1.$

Comme $\lim\limits_{x\to 0_-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ n'est pas une valeur finie, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

b. $|x| = -x$ si $x < 0$.

La fonction f s'écrit $f(x) = -2x + 1 + 2x\ln(-x)$ si $x < 0$.

D'où : $\forall\, x \in]-\infty; 0[, \quad f'(x) = -2 + 2\times\ln(-x) + 2x \times \dfrac{-1}{-x} = 2\ln(-x) = g(x).$

3

f est dérivable sur $]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$ et on a : $f'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x<0 \\ -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

On en déduit que :

- pour tout $x \in]-\infty;-1[$, $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$;
- pour tout $x \in]-1;0[$, $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $]-1;0[$.
- pour tout $x > 0$, $f'(x) = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} < 0$ et f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x\ln|x|\left(\dfrac{-2}{\ln|x|} + \dfrac{1}{x\ln|x|} + 2\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left[(x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - 1\right] = -1.$

x	$-\infty$	β	-1		0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0	3		1	0	-1

4 Montrons qu'il existe α vérifiant $1 < \alpha < \frac{3}{3}$, solution de l'équation $f(x) = 0$

$f(1) \approx 0,10$ et $f(\frac{3}{2}) \approx -0,22$.

La fonction f est continue, strictement décroissante sur $\left]1; \frac{3}{2}\right[$.

De plus, $f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in \left]1; \frac{3}{2}\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Montrons qu'il existe β vérifiant $-4 < \beta < -3$, solution de l'équation $f(x) = 0$

$f(-4) \approx -2,09$ et $f(-3) \approx 0,41$.

La fonction f est continue, strictement croissante sur $\left]-4; -3\right[$.

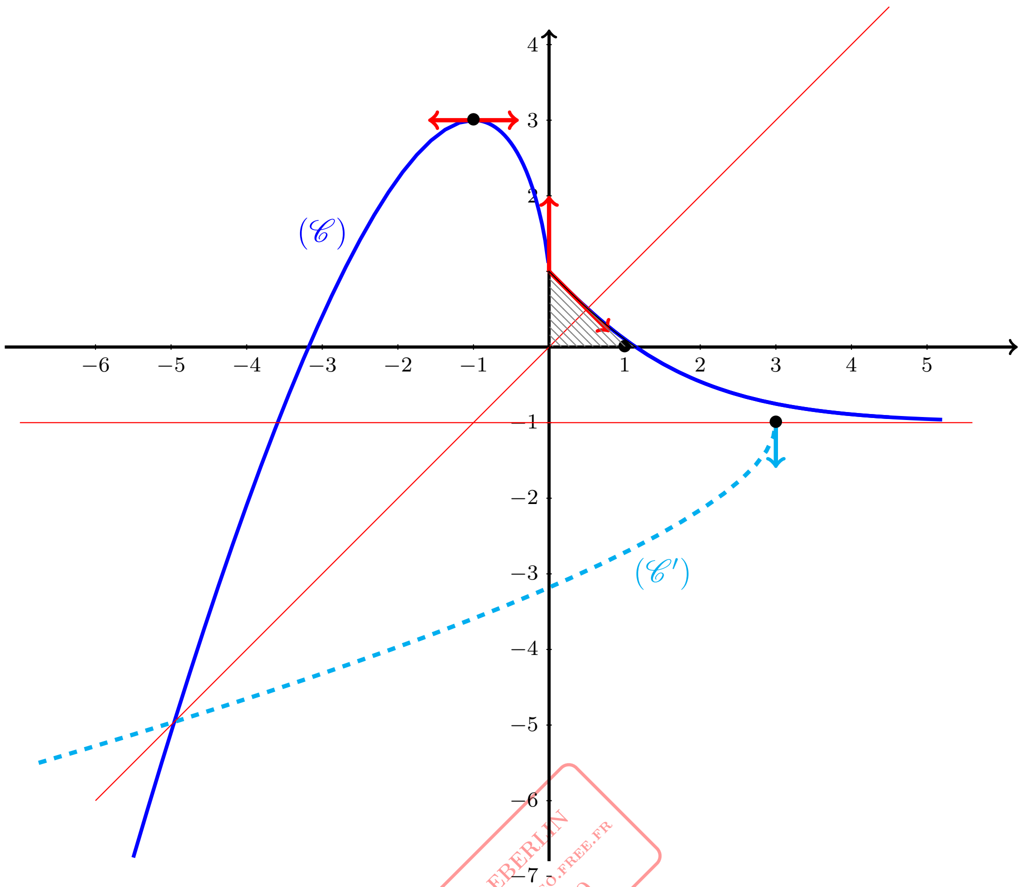
De plus, $f(-4) \times f(-3) < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\beta \in \left]-4; -3\right[$ tel que $f(\beta) = 0$.

5 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2 + \dfrac{1}{x} + 2\ln|x|\right) = +\infty$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une direction asymptotique de direction (Oy) en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$. La courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

6



7 **a.** $\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha [f(x) - 0]\,dx = \int_0^\alpha \left[(x+2)\,\mathrm{e}^{-x} - 1\right] dx = -\alpha + \int_0^\alpha (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx.$

Intégrons $\displaystyle\int_0^\alpha (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx.$

Si l'on choisit $\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ alors on peut prendre $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Il vient, en intégrant par parties :

$$\int_0^{\alpha} (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\; dx = \Big[-\,(x+2)\,\mathrm{e}^{-x} \Big]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} \mathrm{e}^{-x}\; dx.$$

D'où $\mathscr{A}(\alpha) = \Big[-\,(\alpha+3)\,\mathrm{e}^{-\alpha} - \alpha + 3 \Big]\ \mathrm{cm}^2$.

b. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \mathscr{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to 0} [-(\alpha+3)\,\mathrm{e}^{-\alpha} - \alpha + 3] = 0.$

Partie C

1 h est une fonction continue, strictement croissante sur $]-\infty;-1]$.
Donc h réalise une bijection de $]-\infty;-1]$ sur $\left]\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)\,;\,h(-1)\right] =]-\infty;3]$.

J est l'intervalle $]-\infty;3]$.

2

Comme h et h^{-1} ont le même sens de variation, on en déduit le tableau de variation de h^{-1}.

x	$-\infty$		3
$\left(h^{-1}\right)'(x)$		$+$	
$h^{-1}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1