Bac Mathématiques

Burkina Faso 2023

Série A4

1er tour

Durée : 3h
Coefficient : 3
Calculatrice non autorisée

Exercice 1 (5 points)

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 4x^3 + ax^2 + bx - 2$ où a et b sont des nombres réels.

1) Déterminer a et b sachant que $\frac{-1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sont des racines de P. (1 pt)
2) On pose $a = 8$ et $b = -1$
   a) Calculer $P(\frac{-1}{2})$ et $P(\frac{1}{2})$. (1 pt)
   b) Factoriser $P(x)$ (0,5 pt)
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. (0,5 pt)
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
   a) $4(\ln x)^3 + 8(\ln x)^2 - 2\ln\sqrt{x} - 2 = 0$ (1 pt)
   b) $4e^{2x} + 8e^x - 2e^{-x} - 1 = 0.$ (1 pt)

Exercice 2 (6 points)

Un joueur lance deux pièces de monnaie parfaitement équilibrées.

1) Le joueur gagne 100F à chaque « pile » obtenu, mais perd 500 F s'il n'obtient aucun « pile ».
   On désigne par X le gain algébrique du joueur.
   a) Quelles sont les valeurs prises par X ? (0,5 pt)
   b) Déterminer la loi de probabilité de X. ((1,5 pt)
   c) Calculer l'espérance mathématique de X. (0,5 pt)
   d) Le jeu est-il favorable au joueur ? (0,5 pt)
2) On suppose que le joueur gagne maintenant « a F » à chaque « pile » obtenu, mais perd 500 F s'il n'obtient aucun « pile ».
   On désigne par Y le gain algébrique du joueur.
   a) Donner les valeurs prises par Y en fonction du réel a. (0,5 pt)
   b) Déterminer la loi de probabilité de Y. (1,5 pt)
   c) Calculer l'espérance mathématique de Y en fonction de a. (0,5 pt)
3) Quelle devrait être la somme gagnée à chaque « pile» pour que le jeu soit équitable ? (0,5 pt)

Problème (9 points)

Partie A (3,5 pts)

On considère la fonction numérique g sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$. (1 pt)
2) a) Calculer $g'(x)$ où g' est la fonction dérivée de g. (0,5 pt)
   b) Etudier le signe de $g'(x)$. (0,5 pt)
   c) En déduire le sens de variations de g puis dresser son tableau de variations. (1 pt)
3) En déduire que pour tout $x > 0$, on a $g(x) > 0$. (0,5 pt)

Partie B (5,5 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique $2cm$).

1) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. En déduire que (C) admet une asymptote verticale dont on précisera l'équation. (1,5 pt)
2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$. (0,5 pt)
   b) En déduire le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation. (1 pt)
3) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est une asymptote à (C).
   Préciser les positions de (C) par rapport à (D). (1 pt)
   b) Déterminer les coordonnées du point B de (C) en lequel la tangente est parallèle à (D). (0,5 pt)
4) Soit (T) la tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse 1. Déterminer une équation de (T). (0,5 pt)
5) Construire (C), (T), (D). (0,5 pt)

N.B : On donne $e \approx 2,7$

Correction

Exercice 1

1) On a $P(x) = 4x^3 + ax^2 + bx - 2$.

Puisque $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ sont des racines de P, alors :

$$\begin{cases} P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0 \\ P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + a\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 2 = 0 \\ 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + a\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + b\left(\dfrac{1}{2}\right) - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{4}{8} + \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{2} - 2 = 0 \\ \dfrac{4}{8} + \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{-2 + a - 2b}{4} = 2 \\ \dfrac{2 + a + 2b}{4} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 2b = 10 \\ a + 2b = 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 10 + 2b \\ 4b = -4 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a = 8 \\ b = -1 \end{cases}}$$

2-a) On a trouvé que $a = 8$ et $b = -1$ si et seulement si $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ sont des racines de P

Donc, directement :

$$\boxed{P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0}$$

b) Puisque $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ sont des racines de P , alors il existe u et v tels que :

$$P(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(ux + v) \iff 4x^3 + 8x^2 - x - 2 = \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)(ux + v)$$

$$\iff 4x^3 + 8x^2 - x - 2 = ux^3 + vx^2 - \dfrac{u}{4}x - \dfrac{v}{4}$$

$$\iff \begin{cases} u = 4 \\ v = 8 \\ \dfrac{u}{4} = 1 \\ \dfrac{v}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} u = 4 \\ v = 8 \end{cases}}$$

Donc :

$$P(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(4x + 8) \iff \boxed{P(x) = 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x + 2)}$$

c) Résolvons l'équation $P(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
P(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x - \frac{1}{2} = 0 \text{ ou } x + \frac{1}{2} = 0 \text{ ou } x + 2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation } P(x) = 0 \text{ est : } S = \left\{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}}$$

3-a) Résolvons l'équation $4(\ln x)^3 + 8(\ln x)^2 - 2\ln\sqrt{x} - 2 = 0$:

$$\begin{aligned}
4(\ln x)^3 + 8(\ln x)^2 - 2\ln\sqrt{x} - 2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 4(\ln x)^3 + 8(\ln x)^2 - \ln\sqrt{x}^2 - 2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4(\ln x)^3 + 8(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4X^3 + 8X^2 - X - 2 = 0 \quad (\text{En posant : } X = \ln x) \\
&\Longleftrightarrow \quad X = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = -2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \ln x = \frac{1}{2} \text{ ou } \ln x = -2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = e^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } x = e^{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = e^{-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } S' = \left\{e^{-2}; e^{-\frac{1}{2}}; e^{\frac{1}{2}}\right\}}$$

b) Résolvons l'équation $4e^{2x} + 8e^{x} - 2e^{-x} - 1 = 0$:

$$\begin{aligned}
4e^{2x} + 8e^{x} - 2e^{-x} - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{x}\left(4e^{2x} + 8e^{x} - 2e^{-x} - 1\right) = 0 \times e^{x} \\
&\Longleftrightarrow \quad 4e^{3x} + 8e^{2x} - 2 - e^{x} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4\left(e^{x}\right)^3 + 8\left(e^{x}\right)^2 - e^{x} - 2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4X^3 + 8X^2 - X - 2 = 0 \quad (\text{En posant : } X = e^{x}) \\
&\Longleftrightarrow \quad X = -\frac{1}{2} \text{ ou } X = \frac{1}{2} \text{ ou } X = -2 \\
&\Longleftrightarrow \quad e^{x} = \frac{1}{2} \quad (\text{car pour tout réel } x : e^{x} > 0) \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \ln\frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = -\ln 2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } S'' = \{-\ln 2\}}$$

Exercice 2

On note $''P''$: pile et $''F''$: face.

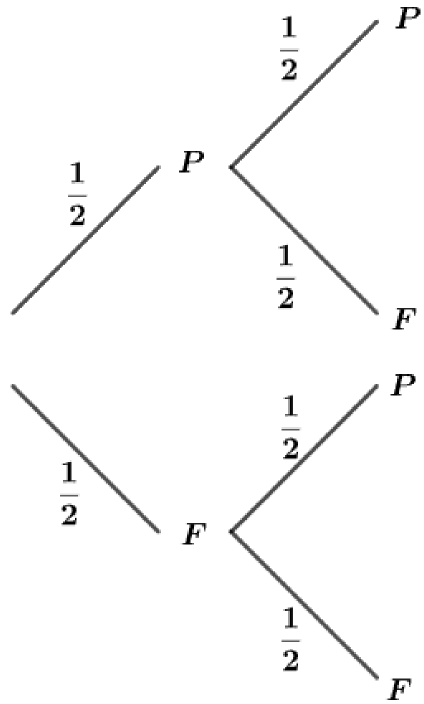
1-a) Directement d'après l'énoncé :

- Si le joueur obtient $(F; F)$, alors : $X = -500$
- Si le joueur obtient $(P; F)$ ou $(F; P)$, alors : $X = 100$

- Si le joueur obtient $(P;P)$, alors : $X = 200$

$$\boxed{\text{Les valeurs prises par } X \text{ sont : } -500\,;\,100 \text{ et } 200}$$

b) Dressons un arbre pondéré :



On a donc :

- $P(X = -500) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(X = 100) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 200) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Et on représente la loi de probabilité de X sous forme de tableau :

Valeur x_i	-500	100	200
Probabilité $P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c) Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ de X .

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \, P(X = x_i) = -500 \times \frac{1}{4} + 100 \times \frac{1}{2} + 200 \times \frac{1}{4} \Longrightarrow \boxed{E(X) = -\frac{1}{4}}$$

d) L'espérance mathématique est négative, donc :

$$\boxed{\text{Le jeu est défavorable au joueur}}$$

2-a) Directement d'après l'énoncé :

- Si le joueur obtient $(F;F)$, alors : $Y = -500$
- Si le joueur obtient $(P;F)$ ou $(F;P)$, alors : $Y = a$
- Si le joueur obtient $(P;P)$, alors : $Y = 2a$

$$\boxed{\text{Les valeurs prises par } Y \text{ sont : } -500\,;\, a \text{ et } 2a}$$

b) De la même manière, et en utilisant le même arbre pondéré, on trouve :

- $P(Y = -500) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $P(Y = a) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(Y = 2a) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Et on représente la loi de probabilité de Y sous forme de tableau :

Valeur y_i	-500	a	$2a$
Probabilité $P(Y = y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

c) Calculons l'espérance mathématique $E(Y)$ de Y .

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} y_i \, P(Y = y_i) = -500 \times \frac{1}{4} + a \times \frac{1}{2} + 2a \times \frac{1}{4} \Longrightarrow \boxed{E(Y) = \frac{-500 + 4a}{4}}$$

3) Le jeu est équitable si et seulement si l'espérance mathématique est nulle, donc :

$$E(Y) = 0 \iff \frac{-500 + 4a}{4} = 0 \iff -500 + 4a = 0 \iff a = \frac{500}{4} \iff \boxed{a = 125}$$

$$\boxed{\text{Le joueur doit gagner 125F à chaque "pile" pour que le jeu soit équitable}}$$

Problème

Partie A :

$$\forall x \in]0;+\infty[\; : \; g(x) = x^2 - 2\ln x$$

1)

• La limite en 0 à droite :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \quad = \quad \lim_{x\to 0^+} x^2 - 2\ln x \quad = \quad 0 - 2\times(-\infty) \quad = \quad +\infty$$

• La limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} x^2 - 2\ln x \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} x\left(x - 2\frac{\ln x}{x}\right) \quad = \quad (+\infty)\times[(+\infty) - 2\times 0] \quad = \quad +\infty$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$$

2-a) La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\begin{aligned} \forall x \in]0;+\infty[\; : \; g'(x) \quad &= \quad \left(x^2 - 2\ln x\right)' \quad = \quad 2x - 2\times\frac{1}{x} \\ &= \quad \frac{2x^2 - 2}{x} \quad = \quad \frac{2(x^2-1)}{x} \\ &= \quad \frac{2(x+1)(x-1)}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\; : \; g'(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}}$$

b) On sait que pour tout réel x strictement positif : $x + 1 > 1 > 0$ et $x > 0$.

Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$, dressons le tableau de signe de $x - 1$:

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Alors :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet & \forall x \in]0;1[\; : \; g'(x) < 0 \\ \bullet & g'(1) = 0 \\ \bullet & \forall x \in]1;+\infty[\; : \; g'(x) > 0 \end{array}}$$

c) On tire de ce qui précède directement que :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet & g \text{ est strictement décroissante sur }]0;1[\\ \bullet & g \text{ admet un minimum en } 1 \\ \bullet & g \text{ est strictement croissante sur }]1;+\infty[\end{array}}$$

Or, $g(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$, et on dresse le tableau de variations de la fonction g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$g(1)=1$	$\nearrow$	$+\infty$

3) La fonction g amdet un minimum en 1, alors, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $g(x) \geqslant g(1) = 1 > 0$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\, : \, g(x) > 0}$$

Partie B :

$$\forall x \in]0;+\infty[\, : \, f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$$

1)

• La limite en 0 à droite :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad = \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x} \quad = \quad 0 + \frac{1+(-\infty)}{0^+} \quad = \quad (-\infty)\times(+\infty) \quad = \quad -\infty$$

• La limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x} \quad = \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \quad = \quad (+\infty) + 0 + 0 \quad = \quad +\infty$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Puisque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, donc :

$$\boxed{\text{La droite d'équation } x = 0 \text{ (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à } (C) \text{ dirigée vers le bas}}$$

2-a) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$\forall x \in]0;+\infty[\,:\, f'(x) = \left(\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}\right)' = \frac{1}{2}+\frac{(1+\ln x)'x-(1+\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}\times x-1-\ln x}{x^2} = \frac{1}{2}-\frac{\ln x}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\,:\, f'(x) = \frac{1}{2}-\frac{\ln x}{x^2}}$$

Et en Mettant les deux fractions au même dénominateur, on obtient :

$$\forall x \in]0;+\infty[\,:\, f'(x) = \frac{1}{2}-\frac{\ln x}{x^2} = \frac{x^2-2\ln x}{2x^2} \Longrightarrow \boxed{\forall x \in]0;+\infty[\,:\, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}}$$

b) Puisque pour tout réel x strictement positif, $2x^2 > 0$, et d'après la **Partie A** , $g(x) > 0$.

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x > 0 : f'(x) > 0}$$

On en tire que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$$

Dressons le tableau de variations de la fonction f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3-a) Calculons la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)-y$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}-\frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x} = 0+0 = 0$$

Interprétation graphique :

$$\boxed{\text{La droite } (D) \text{ d'équation } y = \frac{1}{2}x \text{ est une asymptote oblique à } (C) \text{ au voisinage de } +\infty}$$

Etude de la position relative de (C) par rapport à (D) :

On a pour tout réel $x \in]0; +\infty[$: $f(x) - y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1 + \ln x}{x} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \ln x}{x}$

De plus, pour tout réel $x > 0$, le signe de $f(x) - y$ est celui de $1 + \ln x$, étudions alors ce signe.

Résolvons pour cela l'équation $1 + \ln x = 0$:

$$1 + \ln x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = e^{-1}$$

Par croissance de la fonction ln , on obtient :

$$\begin{array}{c} \forall x \in]0; e^{-1}[\ : 0 > 1 + \ln x \\ \text{Pour } x = e^{-1} : 1 + \ln x = 0 \\ \forall x \in]e^{-1}; +\infty[\ : 1 + \ln x > 0 \end{array} \quad \text{, donc :} \quad \begin{array}{c} \forall x \in]0; e^{-1}[\ : 0 > f(x) - y \\ \text{Pour } x = e^{-1} : f(x) - y = 0 \\ \forall x \in]e^{-1}; +\infty[\ : f(x) - y > 0 \end{array}$$

Finalement, on calcule $f(e^{-1}) = \dfrac{e^{-1}}{2} + \dfrac{1 + \ln e^{-1}}{e^{-1}} = \dfrac{1}{2e} + \dfrac{1-1}{e^{-1}} = \dfrac{1}{2e}$

On en déduit que :

$$\boxed{\begin{cases} (C) \text{ est en dessous de } (D) \text{ sur }]0; e^{-1}[\\ (C) \text{ coupe } (D) \text{ au point } K\left(\dfrac{1}{e}; \dfrac{1}{2e}\right) \\ (C) \text{ est au-dessus de } (D) \text{ sur }]e^{-1}; +\infty[\end{cases}}$$

b) Le coefficient directeur de (D) étant $\dfrac{1}{2}$, l'abscisse du point B qu'on note x_B doit vérifier $f'(x_B) = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{array}{rlcl} f'(x_B) = \dfrac{1}{2} & \Longleftrightarrow \quad \dfrac{g(x_B)}{2x_B^2} = \dfrac{1}{2} & \Longleftrightarrow & g(x_B) = x_B^2 \\ & \Longleftrightarrow \quad x_B^2 - 2\ln x_B = x_B^2 & \Longleftrightarrow & \ln x_B = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad x_B = 1 & & \end{array}$$

Et on calcule l'ordonnée de B qu'on note $y_B = f(x_B)$:

$y_B = f(x_B) = \dfrac{x_B}{2} + \dfrac{1 + \ln x_B}{x_B} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1 + \ln 1}{1} = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$

$$\boxed{\text{Les coordonnées du point } B \text{ demandées sont : } B\left(1; \frac{3}{2}\right)}$$

4) D'après la question précédente, le point A n'est autre que le point B , et on a déjà calculé : $f'(1) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{3}{2}$

Donc la tangente (T) au point $A = B$ a pour équation :

$$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff (T) : y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{2} \iff \boxed{(T) : y = \frac{1}{2}x + 1}$$

5) Le graphique :