

EXERCICE 1 (04 points)

1. En notant $p(A/B)$ la probabilité de l'événement « A sachant B » et \bar{B} l'événement contraire de B, démontrer que :

$$p(A/\bar{B}) = \frac{p(A) - p(A/B).p(B)}{1 - p(B)}.$$

2. Lors d'une récente saison de chasse (période durant laquelle la chasse est autorisée dans une région donnée), on a pu établir les statistiques suivantes :

30% des renards sont enragés ; parmi les renards abattus, 40% étaient enragés.

a) En désignant par b ($b \neq 1$) la probabilité pour qu'un renard soit abattu lors de la saison de chasse, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un renard survivant soit enragé.

(Durant la période considérée, on négligera les autres causes de décès ainsi que les nouveaux cas de rage).

b) Quelle est la plus petite valeur b pour que p soit inférieure ou égale à 0,1 ?

c) A l'issue d'une saison de chasse, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à $1/3$. Une chasse est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la saison de chasse.

Quelle est, dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la saison ?

EXERCICE 2 (05,50 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

1. a) Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$ est nul.

c) Démontrer de même que le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE}$ est nul.

d) Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. Soit I le centre de gravité du triangle BDE.

Déduire de 1. a) que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) ; préciser la position du point I sur le segment [AG].

3. Dans cette question, l'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) Écrire une équation du plan (BDE).

b) Écrire une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite (Δ) avec le plan (BDE).

d) Calculer $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE}$.

e) En déduire la distance du point H au plan (BDE), puis le volume du tétraèdre HBDE.

Rappel : Volume du tétraèdre : $\frac{1}{3} b \times h$, où b est la surface de base et h la hauteur.

PROBLÈME (10,50 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Unité graphique : 2 cm.
Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + e^x & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{-x^2 \ln x}{1+x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On désigne par (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Soit k la fonction numérique définie par : $k(x) = (x + 2)\ln x + x + 1$.
 - a) Étudier le sens de variation de la dérivée k' de k .
 - b)
 - b₁) Montrer que l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution α .
 - b₂) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
En déduire le signe de $k(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
(On pourra utiliser les questions 1 et 2).
4. a) Étudier les branches infinies de (\mathcal{C}) .
b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (\mathcal{C}) au point d'abscisse $x_0 = 1$.
c) Tracer (\mathcal{C}) et (T) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
5. Soit F l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y. \end{cases}$$
 - a) Montrer que F est une bijection de \mathcal{P} et que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ garde une direction fixe à préciser.
 - b) Déterminer l'ensemble des points invariants par F .
 - c) Déterminer l'ensemble des milieux de $[MM']$ quand M décrit \mathcal{P} .
 - d) Montrer que F est une affinité que l'on caractérisera.
 - e) Soit M un point de (\mathcal{C}) , déterminer les équations de l'ensemble (\mathcal{C}') décrit par son image M' par l'application F .

Partie B

On pose sur $[0, 1]$,
$$\begin{cases} g_n(t) = -t^n \ln t, & t \neq 0; n \in \mathbb{N}^* \\ g_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$J_n = \int_0^1 g_n(t) dt \text{ et } J = \int_0^1 f(t) dt.$$

1. a) Montrer que J_n existe.
b) En admettant que $J_n = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 g_n(t) dt$ pour $x \in]0, 1]$, calculer J_n .
2. Soit t un nombre réel et $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Calculer le produit : $P_n(t) = (1 + t)(1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1})$.
b) Montrer que : $\forall t \in [0, 1], g_2(t) - g_3(t) + g_4(t) \dots + (-1)^{n-1} g_{n+1}(t) + (-1)^n \frac{g_{n+2}(t)}{1+t} = f(t)$

puis que : $J = J_2 - J_3 + J_4 - \dots + (-1)^{n-1} J_{n+1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t} dt.$

c) En s'aidant d'une majoration de $\frac{g_{n+2}(t)}{1+t}$, démontrer que : $0 \leq \int_0^1 \frac{g_{n+2}(t)}{1+t} dt \leq \frac{1}{(n+3)^2}.$

3. Soit n un entier naturel strictement positif. On pose : $S_n = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n+2)^2}.$

Montrer que : $\lim S_n = J.$